Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”, facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
24–02–2023 A.A. 2022/2023

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco permettono di conseguire 22 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1)* (10 punti) Si calcoli il volume ($|V|$) dell'insieme definito da
$V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2-4x-4y \le -4,\ 0 \le z \le \min\{x^2+y^2,\ 4x+4y-7\}\}$.

Si può anche scrivere
$V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2-4x-4y \le -4,\ z \ge 0, \quad z \le x^2+y^2,\ z \le 4x+4y-7\}$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale (A costante)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Ax \cdot te^{-t} \quad x,t>0 \quad a>0, A \in \mathbf{R}\backslash 0, \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

2.1)* Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ [**Non** ci si azzardi a scrivere $\mathcal{L}(te^{-t}) = \mathcal{L}(t)\mathcal{L}(e^{-t})$. Può essere utile ricordare che $(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''f$. Inoltre per non appesantire troppo i calcoli e soprattutto inutilmente, conviene chiamare $\mathcal{L}(f) = F(p)$ (o scegliete voi la notazione) e portare tale notazione fino alla fine quando si trova la formula finale $v(x,p)$. Solo a quel punto esplicitate $F(p)$

2.2) Si antitrasformi $v(x,p)$ ottenendo la soluzione $u(x,t)$

3) (11 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(x^2-1)(x^2-x+1)}$ [Si tratta di un Valor Principale con singolarità sul cammino di integrazione $[0,+\infty)$]

3.1)* Si indichi il persorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

3.2) Si concluda l'esercizio calcolando i residui nelle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la relazione $3x + y^2 + z^2 + x^2 + y^4 + z^4 = 0$.

3.1)* Si dimostri che in $(0,0,0)$ definisce implicitamente una funzione f di due delle variabili (x,y,z).

3.2)* Si dimostri che $(0,0)$ è un punto critico di f

3.3) Si stabilisca la natura del punto critico
[Si tratta di un problema di massimi e minimi di *una funzione di* **due** *variabili definita implicitamente*]

Regole per la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d’esame. Scrivere in modo leggibile

2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.

3) Il compito dura tre ore e l’istante d’inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile

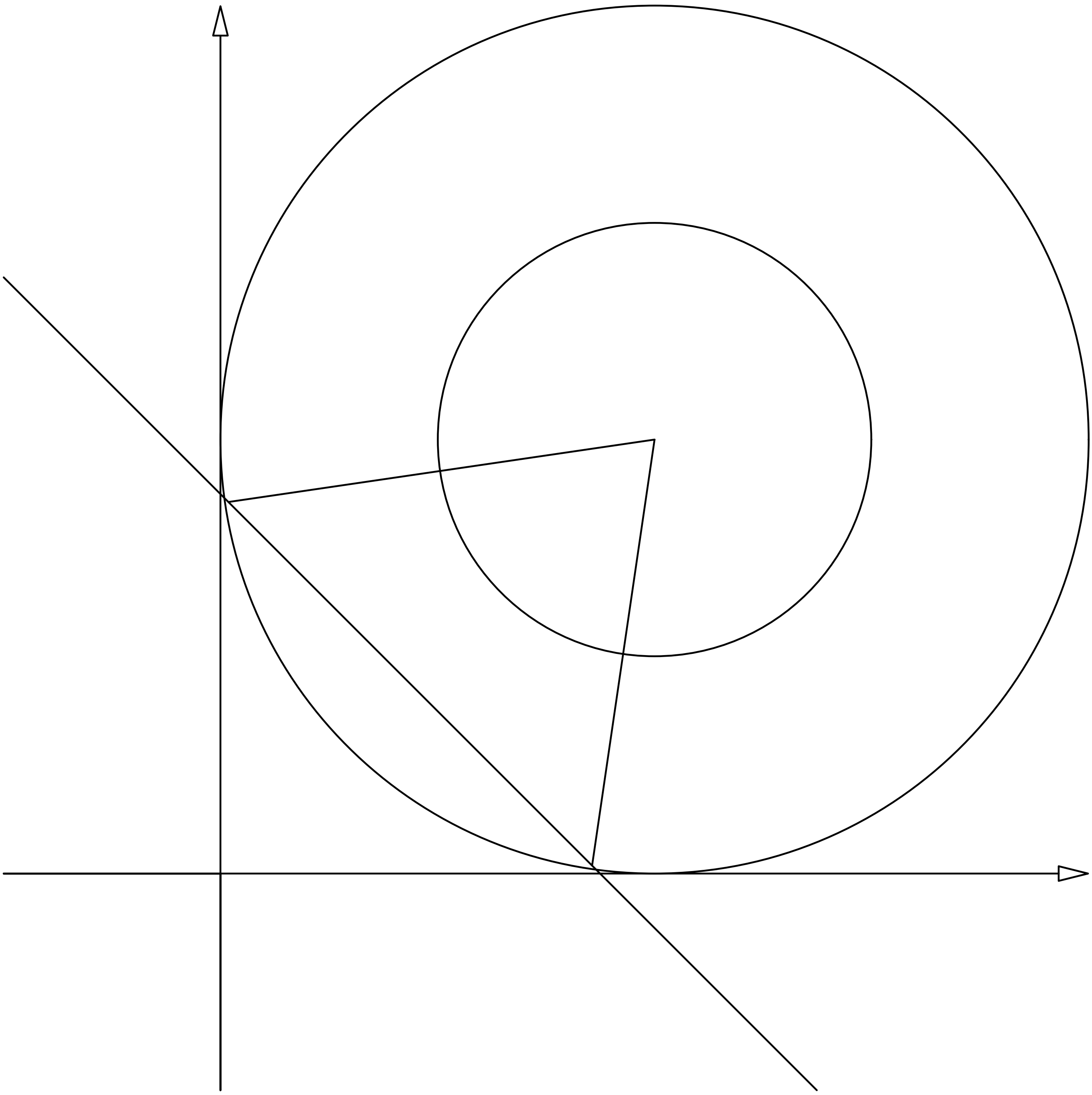
4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.

6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall’inizio del compito

Soluzioni

1) Non è stato necessario esibire tutti i seguenti calcoli per poter giudicare positivamente o anche molto positivamente l'esercizio



$x^2 + y^2 - 4x - 4y \leq -4 \iff (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4$ e stiamo dentro il cerchio grande e solo lì possiamo stare

$x^2 + y^2 \leq 4x + 4y - 7 \iff (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ stiamo dentro il cerchio piccolo per cui il primo contributo è

$$\iint_{(x-2)^2+(y-2)^2\leq 1} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} dt r(2+r\cos t)^2+(2+r\sin t)^2 = 2\pi \int_0^1 drr(8+r^2) = \frac{17\pi}{2}$$

Se $4x+4y-t \leq x^2+y^2$ stiamo fuori dal cerchio piccolo ma deve inoltre essere $4x+4y-7 \geq 0$ quindi $y \geq -x + 7/4$ che graficamente vuol dire sopra la retta disegnata. In altre parole devo integrare sulla regione compresa fra i le due circonferenze ma sopra alla corda disegnata. Servono quindi i punti di intersezione fra la circonferenza grande e la retta $y=-x+7/4$ che hanno coordinate $\left(\frac{7-\sqrt{47}}{8}\frac{7+\sqrt{47}}{8}\right)$, $\left(\frac{7+\sqrt{47}}{8},\frac{7-\sqrt{47}}{8}\right)$. Dividiamo la regione su cui integrare in due parti: 1) la parte che sta dentro il triangolo disegnato e 2) la rimanente.

Calcolo contributo di 2).

Il vertice in basso del triangolo corrisponde all'angolo

$$t_0=\frac{-\pi}{2}-\arctan\frac{2-\frac{7+\sqrt{47}}{8}}{2-\frac{7-\sqrt{47}}{8}}=\frac{-\pi}{2}-\underbrace{\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}}_{\sim 0.134\,rad.,\ 7{,}702^\circ}$$

Il vertice sinistro del triangolo corrisponde a $t_1=\pi+\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}$. Il contributo 2) è quindi

$$\iint_{\text{regione2)}}(4x+4y-7)dx=\int_1^2 dr\int_{t_0}^{t_1} r\big(4(2+r\cos t)+4(2+r\sin t)-7\big)=$$
$$=\frac{27}{2}(t_1-t_0)+\frac{28}{3}(\sin t_1-\sin t_0+\cos t_0-\cos t_1)=\frac{27}{2}(t_1-t_0)+\frac{28}{3}(-2\sin t_0-2\cos t_0)=$$
$$=\frac{27}{2}(t_1-t_0)+\frac{56}{3}\left(\cos\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}-\sin\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}\right)\qquad\text{(I)}$$

$$t_1-t_0=\frac{3\pi}{2}+\arctan\frac{\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}+\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}}{1-\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}}=\frac{3\pi}{2}+\arctan\frac{17}{9\sqrt{47}}$$

e ricordando $\cos(\arctan x)=1/\sqrt{1+x^2}$, $\sin(\arctan x)=x/\sqrt{1+x^2}$ si ha

$$\cos\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}=\frac{9+\sqrt{47}}{16},\qquad \sin\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}=\frac{9-\sqrt{47}}{16}$$

e quindi otteniamo

$$\frac{27}{2}(t_1-t_0)+\frac{56}{3}\left[\frac{9+\sqrt{47}}{16}-\frac{9-\sqrt{47}}{16}\right]=\frac{27}{2}(t_1-t_0)+\frac{112\sqrt{47}}{48}$$

per cui (I) diventa

$$\frac{81\pi}{4}+\frac{27}{2}\arctan\frac{17}{9\sqrt{47}}+\frac{7\sqrt{47}}{3}\qquad\text{(II)}$$

ed è il contributo al volume della regione 2) descritta prima.

Calcolo contributo in 1). L'integrale che dobbiamo calcolare è

$$\iint_{(parte\ del\ triangolo\ fra\ le\ due\ circonferenze\ e\ sopra\ la\ rettta)}(4x+4y-7)dxdy$$

e dobbiamo parametrizzare il triangolo.

Prima maniera. Spezzare il triangolo come unione di due triangoli ciascuno dei quali rappresenta un dominio normale rispetto all'asse x.

Seconda maniera. Usiamo coordinate polari. $x = 2 + r\cos t$, $y = 2 + r\sin t$, $4x + 4y - 7 = 0$ se e solo se $r = \dfrac{-9}{8}\dfrac{1}{\sin t + \cos t} = \dfrac{-9}{8\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sin(t+\pi/4)}$ e l'integrale che cerchiamo è

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{2\pi+t_0} dt \int_1^{\frac{-9}{8\sqrt{2}}\frac{1}{\sin(t+\pi/4)}} (9r + 4r^2(\cos t + \sin t))dr = \\
&= \int_{t_1}^{2\pi+t_0} dt \left(\frac{9}{2}\left[\frac{81}{128\sin^2(t+\pi/4)} - 1\right] + \frac{4\sqrt{2}}{3}\sin(t+\pi/4)\left[\frac{-729}{2048\sqrt{2}\sin^3(t+\pi/4)} - 1\right]\right) \\
&= \int_{t_1+\frac{\pi}{4}}^{2\pi+t_0+\frac{\pi}{4}} dt \left(\frac{9}{2}\left[\frac{81}{128\sin^2 t} - 1\right] + \frac{4\sqrt{2}}{3}\sin t\left[\frac{-729}{2048\sqrt{2}\sin^3 t} - 1\right]\right) \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Notare che

$$
r = \frac{-9}{8}\frac{1}{\sin t_1 + \cos t_1} = \frac{-9}{8}\frac{1}{-\sin\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}} - \cos\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}} = \frac{9}{8}\frac{16}{9} = 2
$$

in quanto se l'angolo corrisponde al vertice sinistro del triangolo, il valore di r deve essere pari a 2. Chiaramente per il vertice basso abbiamo

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{-9}{8}\frac{1}{\sin(2\pi+t_0) + \cos(2\pi+t_0)} = \frac{-9}{8}\frac{1}{\sin t_0 + \cos t_0} = \\
&= \frac{-9}{8}\frac{1}{-\cos\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}} - \sin\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}} = \frac{9}{8}\frac{16}{9} = 2
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\cos x}\frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin x\cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\sin x\cos x} + \tan x = -\cot x
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1+\frac{\pi}{4}}^{2\pi+t_0+\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot(2\pi + t_0 + \frac{\pi}{4}) + \cot(t_1 + \frac{\pi}{4}) = -\cot(t_0 + \frac{\pi}{4}) + \cot(t_1 + \frac{\pi}{4}) = \\
&= \frac{\cos t_1 - \sin t_1}{\sin t_1 + \cos t_1} - \frac{\cos t_0 - \sin t_0}{\sin t_0 + \cos t_0} \underbrace{=}_{a=\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}}} = \frac{-\cos a + \sin a}{-\cos a - \sin a} - \frac{-\sin a + \cos a}{-\cos a - \sin a} = \frac{2\sqrt{47}}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1+\frac{\pi}{4}}^{2\pi+t_0+\frac{\pi}{4}} \sin t\, dt = \cos(t_1 + \frac{\pi}{4}) - \cos(2\pi + t_0 + \frac{\pi}{4}) = \cos(t_1 + \frac{\pi}{4}) - \cos(t_0 + \frac{\pi}{4}) = \\
&= \frac{\cos t_1 - \sin t_1 - \cos t_0 + \sin t_0}{\sqrt{2}} = \frac{-\cos a + \sin a + \sin a - \cos a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sin a - \cos a) = \frac{-\sqrt{2}\sqrt{47}}{8}
\end{aligned}
$$

(III) quindi diventa

$$
\begin{aligned}
&\frac{729}{256}\frac{2\sqrt{47}}{9} - \frac{9}{2}(2\pi + t_0 - t_1) - \frac{4}{3}\frac{729}{2048}\frac{2\sqrt{47}}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{-\sqrt{2}\sqrt{47}}{8} = \\
&= \sqrt{47}\left(\frac{81}{128} - \frac{27}{256} + \frac{1}{3}\right) - \frac{9\pi}{4} + 9\arctan\frac{9-\sqrt{47}}{9+\sqrt{47}} \sim 0.4175
\end{aligned}
$$

che possiamo riscrivere come

$$
\sqrt{47}\left(\frac{81}{128} - \frac{27}{256} + \frac{1}{3}\right) - \frac{9\pi}{4} + \frac{9}{2}\arctan\frac{17}{9\sqrt{47}}
$$

Alla fine abbiamo

$$\frac{17\pi}{2}+\frac{81\pi}{4}+\frac{27}{2}\arctan\frac{17}{9\sqrt{47}}+\frac{7\sqrt{47}}{3}+\sqrt{47}\left(\frac{81}{128}-\frac{27}{256}+\frac{1}{3}\right)-\frac{9\pi}{4}+\frac{9}{2}\arctan\frac{17}{9\sqrt{47}}=$$
$$=14\pi+\sqrt{47}\frac{2453}{768}+18\arctan\frac{17}{9\sqrt{47}}$$

2)

In trasformata di Laplace $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$p^2v-a^2v_{xx}=\frac{Ax}{(p+1)^2}\qquad v_x=0 \tag{1}$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x,t)=cx$

$$p^2R-a^2R_{xx}=p^2cx=\frac{Ax}{(p+1)^2}\implies c=\frac{A}{p^2(p+1)^2}$$

La soluzione è

$$v(x,p)=\alpha e^{\frac{-px}{a}}+\frac{Ax}{p^2(p+1)^2}$$

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}+\frac{A}{p^2(p+1)^2}=0\implies \alpha=\frac{Aa}{p^3(p+1)^2}$$

quindi

$$v(x,p)=\frac{Aa}{p^3(p+1)^2}e^{\frac{-px}{a}}+\frac{Ax}{p^2(p+1)^2}=$$
$$=Aa\left[\frac{3}{p}-\frac{3}{p+1}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p^3}-\frac{1}{(p+1)^2}\right]e^{\frac{-px}{a}}+Ax\left[\frac{-2}{p}+\frac{2}{p+1}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-px/a}}{p}\right]=H(t-\frac{x}{a}),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-px/a}}{p+1}\right]=e^{-(t-x/a)}H(t-\frac{x}{a})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-px/a}}{p^2}\right]=(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a}),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-px/a}}{(p+1)^2}\right]=(t-\frac{x}{a})e^{-(t-x/a)}H(t-\frac{x}{a})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-px/a}}{p^3}\right]=\frac{(t-\frac{x}{a})^2}{2}H(t-\frac{x}{a}),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-px/a}}{(p+1)^3}\right]=\frac{(t-\frac{x}{a})^2}{2}e^{-(t-x/a)}H(t-\frac{x}{a})$$

da cui

$$u(x,t)=AaH(t-\frac{x}{a})\left[3-2(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})^2-3e^{-(t-x/a)}-(t-\frac{x}{a})e^{-(t-x/a)}\right]+$$
$$+axH(t)\left[-2+2e^{-t}+t+te^{-t}\right]$$

Ho usato i fratti semplici e non è uno scherzo anche se non è necessario sottoporsi a sforzi sovrumani.

Partiamo da

$$\frac{1}{p^3(p+1)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p^3}+\frac{D}{(p+1)}+\frac{E}{(p+1)^2}\doteq F(p),$$

$$\lim_{p\to 0}\frac{p^3}{p^3(p+1)^2}=1=\lim_{p\to 0}p^3F(p)=C \implies C=1$$

$$\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\frac{p^3}{p^3(p+1)^2}=-2, \qquad \lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}p^3F(p)=B \implies B=-2$$

$$\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\frac{p^3}{p^3(p+1)^2}=6, \qquad \lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}p^3F(p)=2A \implies A=3$$

Per fare in fretta $\lim\limits_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\frac{p^3}{(p+1)}$ o $\lim\limits_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\frac{p^3}{(p+1)^2}$ conviene ricordare $(fg)''=f''g+2f'g'+g''f$ e si vede subito che valgono zero.

$$\lim_{p\to -1}\frac{(p+1)^2}{p^3(p+1)^2}=-1=\lim_{p\to 0}(p+1)^2F(p)=E \implies E=-1$$

$$\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\frac{(p+1)^2}{p^3(p+1)^2}=-3=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}(p+1)^2F(p)=D \implies D=-3$$

Lo stesso per $\dfrac{1}{p^2(p+1)^2}$

In ogni caso, se non ci si vuole addentrare nei fratti semplici si può sempre usare la formula

$$\frac{1}{2\pi i}V.P.\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p^3(p+1)^2}$$

e calcolare i residui.

3) Solo per Informatica

Giornale delle lezioni, 24/11/2022, pag.5–7. La ivi formula nel nostro caso fa corrispondere

$$p=-1,\ q=2,\ a=1,\ f(x)=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},\ F(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x^2-1)(x^2-x+1)}$$

Applichiamo la formula

$$\pi f(a)a^{\frac{-p}{q}}\cot\frac{\pi p}{q}+\frac{2\pi i}{1-e^{-i2\pi p/q}}\sum \mathrm{Res}F(z) \underbrace{=}_{p=-1,q=2} \frac{2\pi i}{1-e^{i\pi}}\sum \mathrm{Res}F(z)=$$

$$=\frac{2\pi i}{2}\sum_{z=-1,z=e^{i\pi/3},z=e^{i5\pi/3}}\mathrm{Res}\frac{\sqrt{z}}{(z^2-1)(z^2-z+1)}=$$

$$=\pi i\left(\frac{\sqrt{e^{i\pi}}}{2(-1)((-1)^2-(-1)+1)}+\frac{e^{i\pi/6}}{(e^{i2\pi/3}-1)(2e^{i\pi/3}-1)}+\frac{e^{i5\pi/6}}{(e^{i10\pi/3}-1)(2e^{i5\pi/3}-1)}\right)=$$

$$=\pi i\left(\frac{-i}{6}+\frac{i+\sqrt{3}}{(i\sqrt{3}-3)i\sqrt{3}}+\frac{-\sqrt{3}+i}{(-3-i\sqrt{3})(-i\sqrt{3})}\right)=\frac{-\pi}{2}$$

3) Solo per Elettronica&Internet

Videolezione del 5 dicembre 2022 pag.6–7

L'unica derivata non nulla in $(0,0,0)$ è quella rispetto a x per cui si definisce implicitamente la funzione $x=X(y,z)$ tale che $X(0,0)=0$. X è definita in un intorno $(-y_0,y_0)\times(-z_0,z_0)$.

Inoltre se indichiamo $f(x,y,z) = 3x + y^2 + z^2 + x^2 + y^4 + z^4$ si ha $f(X(y,z),y,z) = 0$ in $(-y_0,y_0) \times (-z_0,z_0)$. Possiamo fare le derivate parziali

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} f(X(y,z),y,z)\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)\Big|_{(0,0,0)} \frac{\partial X}{\partial y}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)} = 3 \cdot \frac{\partial X}{\partial y}\Big|_{(0,0)} + 0$$

da cui $\dfrac{\partial X}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0$. La stessa cosa accade per la derivata rispetto a z.

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(X(y,z),y,z) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x,y,z) \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y,z) \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \frac{\partial^2 X}{\partial^2 y} + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$

e una volta calcolato in $(0,0)$ o $(0,0,0)$ sopravvive solamente $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \dfrac{\partial^2 X}{\partial^2 y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$ da cui $\dfrac{\partial^2 X}{\partial^2 y}(0,0) = -2/3$. La derivata rispetto a z fa la stessa cosa per come è fatta $f(x,y,z)$. Ora calcoliamo

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} f(X(y,z),y,z) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x,y,z) \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x,y,z) \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial y} + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

Il primo, il secondo e il quarto valgono zero in $(0,0)$ o $(0,0,0)$ da cui $\dfrac{\partial^2 X}{\partial z \partial y}(0,0) = 0$. La matrice hessiana di $X(y,z)$ ha quindi solo gli elementi diagonali e valgono $-2/3$ per cui $(0,0)$ è un massimo