Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
23–01–2023 A.A. 2022/2023

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco consentono di conseguire 22 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1)* (10 punti) Si calcoli il volume ($|V|$) dell'insieme definito da $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z \geq x^2 + 2y^2,\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{29}{32} \leq z \leq x + y + \frac{13}{8}\}$

2) (12 punti) Sia $f(t)$ la funzione che vale $2-t$ per $0 \leq t \leq 1$, e vale 1 per $t \geq 1$. Si risolva la seguente equazione differenziale (A costante)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Af(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}), \quad x, t > 0 \quad a > 0, A \in \mathbf{R}\backslash 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

2.1)* Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ [Nella soluzione della non omogenea per $v(x,p)$, si provi la funzione $c\, x \exp(-(px)/a)$. Può essere utile ricordare che $(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''f$. Inoltre per non appesantire troppo i calcoli e soprattutto inutilmente, conviene chiamare $\mathcal{L}(f) = F(p)$ (o scegliete voi la notazione) e portare tale notazione fino alla fine quando si trova la formula finale $v(x,p)$. Solo a quel punto esplicitate $F(p)$

2.2) Si antitrasformi $v(x,p)$ ottenendo la soluzione $u(x,t)$

2.1) (3 punti) Si dica quanto vale $u_t(x,t)$ per $x = a$ e $t = 3$.

3) (11 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $\oint_D \frac{(e^{4\pi iz} - 1)\cos\frac{3\pi z}{2}}{\sin(\pi z)(e^{2\pi iz} - 1)^2} dz$ con D pari a: 1)* il rettangolo di vertici i punti $(1/2, -1/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(3/2, 1/2)$, $(3/2, -1/2)$, 2) Il rettangolo di vertici i punti $(-1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$, $(3/2, 1/2)$, $(3/2, -1/2)$

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia data la funzione $z = x + \sqrt{6}y$ soggetta la vincolo $x^2 + 2y^2 = 1$.

3.1)* Si trovino i punti critici della funzione [Non si dimentichi di verificare se i punti critici trovati sono regolari oppure no.]

3.2) Se ne stabilisca la natura.

Regole per la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.

3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile

4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.

6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Soluzioni

1) Calcoliamo il volume per sottrazione $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+2y^2\le x+y+\frac{13}{8}\}\backslash\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+2y^2\le \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{29}{32}\}\doteq V_1\backslash V_2$ quindi

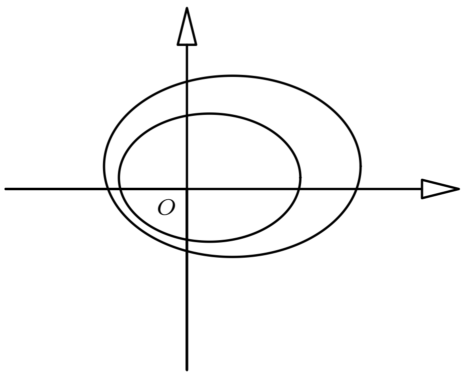
$$|V_1|=\iint_{x^2+2y^2\le x+y+\frac{13}{8}}(x+y+\frac{13}{8}-x^2-2y^2)dx\,dy=\iint_{(x-\frac12)^2+2(y-\frac14)^2\le 2}(x+y+\frac{13}{8}-x^2-2y^2)dx\,dy$$

$x^2+2y^2=x+y+\dfrac{13}{8}$ è la circonferenza grande. Si può passare a coordinate polari $x=\frac12+\sqrt{2}r\cos t$, $y=\frac14+r\sin t$, e ottenere $|V_1|=\pi\sqrt{2}$

$$|V_2|=\iint_{x^2+2y^2\le\frac{x+y}{2}+\frac{29}{32}}(\frac{x+y}{2}+\frac{29}{32}-x^2-2y^2)dx\,dy=\iint_{(x-\frac14)^2+2(y-\frac18)^2\le 1}(\frac{x+y}{2}+\frac{29}{32}-x^2-2y^2)dx\,dy$$

Cambiamo variabili $x=\frac14+\cos t$, $y=\frac18+\frac{1}{\sqrt2}\sin t$ e $|V_2|=\pi\sqrt2/4$ da cui $|V|=3\pi\sqrt2/4$.

$x^2+2y^2=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{29}{32}$ è la circonferenza piccola.



2)

$f(t)=2H(t)-tH(t)+(t-1)H(t-1)$. $\mathcal{L}(f)\doteq F(p)=\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p^2}$, $\mathcal{L}(f(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a}))=e^{-px/a}F(p)$

In trasformata di Laplace $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$p^2v-a^2v_{xx}=Ae^{\frac{-px}{a}}F(p)\quad v_x=0 \tag{1}$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x,t)=cxe^{\frac{-px}{a}}$

$$a^2R_{xx}=cxp^2e^{\frac{-px}{a}}-2acpe^{\frac{-px}{a}}$$

che inserita nella equazione (1) dà

$$p^2cxe^{\frac{-px}{a}}-cxp^2e^{\frac{-px}{a}}+2acpe^{\frac{-px}{a}}=Ae^{\frac{-px}{a}}F(p)\implies c=\frac{AF(p)}{2ap}$$

La soluzione è

$$v(x,p)=\alpha e^{\frac{-px}{a}}+\frac{AxF(p)}{2ap}e^{\frac{-xp}{a}}$$

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}+\frac{AF(p)}{2ap}=0 \implies \alpha=\frac{AF(p)}{2p^2}$$

quindi

$$v(x,p)=\frac{AF(p)}{2p^2}e^{\frac{-px}{a}}+\frac{AxF(p)}{2ap}e^{\frac{-xp}{a}}=\frac{A}{2}e^{\frac{-px}{a}}\left(\frac{2}{p^3}-\frac{1}{p^4}+\frac{e^{-p}}{p^4}\right)+\frac{Ax}{2a}e^{\frac{-px}{a}}\left(\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p^3}+\frac{e^{-p}}{p^3}\right)$$

Sia $\hat{t}=t-x/a$

$$u(x,t)=H(\hat{t})\Big[\frac{A}{2}(\hat{t})^2-\frac{A}{12}(\hat{t})^3+\frac{Ax}{a}\hat{t}-\frac{Ax}{4a}(\hat{t})^2\Big]+H(\hat{t}-1)\left[\frac{A}{12}(\hat{t}-1)^3+\frac{Ax}{4a}(\hat{t}-1)^2\right]$$

2.1) $\left((\hat{t})^kH(\hat{t})\right)_t\Big|_{t=3,x=a}=k\hat{t}^{k-1}H(\hat{t})+\hat{t}^k\delta(\hat{t})\Big|_{t=3,x=a}=k2^{k-1}$ (per $k\geq 1$ come nel nostro caso)

$$\left((\hat{t}-1)^kH(\hat{t}-1)\right)_t\Big|_{t=3,x=a}=\Big(k(\hat{t}-1)^{k-1}H(\hat{t}-1)\Big|_{t=3,x=a}+(\hat{t}-1)^k\delta(\hat{t}-1)\Big)\Big|_{t=3,x=a}=k$$

$$u_t(a,3)=\frac{7}{4}A$$

3) Solo per Informatica

1) Solo $z=1$ cade dentro il rettangolo ed è un polo di ordine 1 in quanto $\sin(\frac{3\pi}{2})\neq 0$. Per il residuo basta fare

$$\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\cos\left(\frac{3\pi z}{2}\right)(e^{4i\pi z}-1)}{\sin(\pi z)(e^{2i\pi z}-1)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\cos\left(\frac{3\pi(z-1)}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)(e^{4i\pi(z-1)}-1)}{\sin(\pi(z-1)+\pi)(e^{2i\pi(z-1)}-1)^2}=$$
$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\sin\left(\frac{3\pi(z-1)}{2}\right)(e^{4i\pi(z-1)}-1)}{-\sin(\pi(z-1))(e^{2i\pi(z-1)}-1)^2}=$$
$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{\pi}\frac{\pi(z-1)}{-\sin(\pi(z-1))}\frac{3\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{3\pi(z-1)}{2}\right)}{\left(\frac{3\pi(z-1)}{2}\right)}\frac{(z-1)^2}{(e^{2i\pi(z-1)}-1)^2}\frac{(e^{4i\pi(z-1)}-1)}{z-1}=$$
$$=\frac{1}{\pi}(-1)\frac{3\pi}{2}\frac{1}{(2\pi i)^2}4\pi i=\frac{3i}{2\pi}$$

per cui l'integrale è $2\pi i\dfrac{3i}{2\pi}=-3$

2). Dentro il rettangolo cade pure il punto $z=0$. Per calcolare il residuo scriviamo lo sviluppo di Laurent

$$f(z)=\frac{(4i\pi z-8\pi^2z^2+O(z^3))(1-\frac{9\pi^2z^2}{8}+O(z^4))}{(\pi z-\frac{\pi^3z^3}{6}+O(z^5))(2\pi iz-2\pi^2z^2+O(z^3))^2}=\frac{-i}{\pi z^2}\frac{(1+2\pi iz+O(z^2))(1-\frac{9\pi^2z^2}{8}+O(z^4))}{(1-\frac{\pi^2z^2}{6}+O(z^4))(1+2\pi iz+O(z^2))}=$$
$$=\frac{-i}{\pi z^2}\frac{1+2\pi iz+O(z^2)}{1+2\pi iz+O(z^2)}=\frac{-i}{\pi z^2}(1+2\pi iz+O(z^2))(1-2\pi iz+O(z^2))=\frac{-i}{\pi z^2}(1+O(z^2))$$

per cui il residuo è zero e l'integrale è uguale a prima.

3) Solo per Elettronica&Internet

Prima soluzione Scriviamo il vincolo come $x=\cos t$, $y=(\sin t)/\sqrt{2}$, $0\leq t\leq 2\pi$ per cui sul vincolo la funzione da estremizzare diventa $z(t)=\cos t+\sqrt{3}\sin t$ e a questo punto usiamo le derivate.

$$\frac{dz}{dt}=2\frac{d}{dt}\sin(\frac{\pi}{6}+t)=2\cos(t+\frac{\pi}{6})\geq 0 \iff 0\leq\frac{\pi}{6}+t\leq\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}\leq t+\frac{\pi}{6}\leq 2\pi$$

ossia $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3} \le t \le 2\pi$, per cui a $t = 4\pi/3$ corrisponde un minimo mentre a $t = \pi/3$ corrisponde un massimo i valori sono rispettivamente -2, 2,

Seconda soluzione Moltiplicatori di Lagrange.

$$F(x, y, \lambda) = x + \sqrt{6}y - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$$

$$F_x = 1 - 2\lambda x = 0, \quad F_y = \sqrt{6} - 4\lambda y = 0, \quad F_\lambda = 1 - x^2 - 2y^2 = 0$$

$\lambda = 0$ è escluso. $x = 1/(2\lambda)$, $y = \sqrt{6}/(4\lambda)$ da cui $\dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{3}{4\lambda^2} = 1$ da cui $\lambda = \pm 1$. Per $\lambda = 1$ otteniamo $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/(2\sqrt{2}))$ mentre per $\lambda = -1$ otteniamo $(-1/2, -\sqrt{3}/(2\sqrt{2}))$ la cui z è chiaramente 1 e -1. I due punti sono regolari

$$(2\frac{1}{2}, 4\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}) \neq (0, 0), \quad (2\frac{-1}{2}, 4\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}) \neq (0, 0)$$

Il fatto che l'insieme $\{z = x + \sqrt{6}y, x^2 + 2y^2 = 2\}$ sia compatto ci consente di dire che il primo punto è un massimo e il secondo è minimo. Alternativamente possiamo usare la matrice hessiana

$$F_{\underline{\underline{xx}}} = -\lambda \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Inoltre $(1, 2\sqrt{3}) \cdot (a, b) = 0$ e $(-1, -2\sqrt{3}) \cdot (a, b) = 0$ da cui $a = -2\sqrt{3}b$ e quindi

$$(2\sqrt{3}b, b) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}b \\ b \end{pmatrix} = 28b^2, \qquad -(2\sqrt{3}b, b) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}b \\ b \end{pmatrix} = -28b^2$$

Il primo è un minimo e il secondo un massimo