Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
22–04–2023 A.A. 2022/2023, Appello straordinario

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco permettono di conseguire 22 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1)* (10 punti) Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y,z) = 1/z$ sull'insieme $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon 4x^2 - 4x + 4 \leq z \leq 4, \text{ e } y^2 \leq z^4\}$. [La visione geometrico–spaziale non è di aiuto. Conviene concentrarsi sul dover scrivere un integrale del tipo $\int_a^b dx_1 \int_{p(x_1)}^{q(x_1)} dx_2 \int_{r(x_1,x_2)}^{s(x_1,x_2)} dx_3 f(x_1,x_2,x_3)$ (integrazione per strati) e la parte più importante consiste nel capire chi è x_1. Una volta capito bisogna risolvere alcune semplici disequazioni di secondo grado, alcune con modulo, per capire chi è a e chi sono le funzioni r,s,p,q. Il resto viene da sé. Nell'integrale conviene osservare che $t\sqrt{t+t_0}=(t+t_0)^{3/2}-t_0\sqrt{t+t_0}$]

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale (A costante)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Ax^2 \cdot te^{-t} \quad x,t>0 \quad a>0, A \in \mathbf{R}\backslash 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

2.1)* Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ [**Non** ci si azzardi a scrivere $\mathcal{L}(te^{-t})=\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(e^{-t})$. Per non appesantire troppo e inutilmente i calcoli, conviene chiamare $\mathcal{L}(f)=F(p)$ (o scegliete voi la notazione) e portare tale notazione fino alla fine quando si trova la formula finale $v(x,p)$. Solo a quel punto esplicitate $F(p)$. Per la soluzione della non omogenea si provi $c_0+c_1x+c_2x^2$]

2.2) Si antitrasformi $v(x,p)$ ottenendo la soluzione $u(x,t)$

3) (11 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}\,dx}{x^4-1}$ [Si tratta di un Valor Principale con cammino "a Pac–man"]

3.1)* Si indichi il persorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

3.2) Si concluda l'esercizio calcolando i residui nelle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la relazione $\sin(xz) + \sin^2 y + \ln^2 z + (xyz)^3 = 0$.

3.1)* Si dimostri che in $(0,0,1)$ definisce implicitamente una funzione f di due delle variabili (x,y,z).

3.2)* Si dimostri che $(0,1)$ è un punto critico di f

3.3) Si stabilisca la natura del punto critico

[Si tratta di un problema di massimi e minimi di *una funzione di* **due** *variabili definita implicitamente*]

Regole per la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.

3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile

4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.

6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Soluzioni

1) Prima soluzione

$$4x^2-4x+4\le z \iff \frac{1-\sqrt{z-3}}{2}\le x\le \frac{1+\sqrt{z-3}}{2} \implies z\ge 3$$

$$y^2\le z^4 \iff \sqrt{y^2}\le\sqrt{z^4} \iff |y|\le |z^2|=z^2 \iff -z^2\le y\le z^2$$

L'integrale è

$$\int_3^4 dz\int_{\frac{1-\sqrt{z-3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{z-3}}{2}} dx\int_{-z^2}^{z^2}\frac{dy}{z}=\frac{24}{5}$$

2). Seconda soluzione

$$\int_0^1 dx\int_{4x^2-4x+4}^{4}\frac{dz}{z}\int_{-z^2}^{z^2}dy=\frac{24}{5}$$

2)

In trasformata di Laplace $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$p^2v-a^2v_{xx}=\frac{Ax^2}{(p+1)^2}\qquad v_x=0 \tag{1}$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x,t)=c_0+c_1x+c_2x^2$

$$p^2(c_0+c_1x+c_2x^2)-2a^2c_2=\frac{Ax^2}{(p+1)^2}\implies c_2=\frac{A}{p^2(p+1)^2}\quad c_0=\frac{2a^2A}{p^4(p+1)^2}$$

La soluzione è

$$v(x,p)=\alpha e^{\frac{-px}{a}}+\frac{Ax^2}{p^2(p+1)^2}+\frac{2a^2A}{p^4(p+1)^2}$$

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}+\frac{2Ax}{p^2(p+1)^2}\Big|_{x=0}=0\implies \alpha=0$$

quindi

$$\begin{aligned}v(x,p)&=\frac{Ax^2}{p^2(p+1)^2}+\frac{2a^2A}{p^4(p+1)^2}=\\&=Ax^2\left[\frac{-2}{p}+\frac{2}{p+1}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\right]+\frac{1}{p^4}-\frac{2}{p^3}+\frac{3}{p^2}-\frac{4}{p}+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{4}{p+1}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=H(t),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]=e^{-t}H(t),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=tH(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2}\right]=te^{-t}H(t),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^3}\right]=\frac{t^2}{2}H(t),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^4}\right]=\frac{t^3}{6}e^{-t}H(t)$$

da cui

$$u(x,t)=Ax^2H(t)\left[-2+2e^{-t}+t+te^{-t}\right]+H(t)\left[\frac{t^3}{6}-t^2+3t-4+te^{-t}+4e^{-t}\right]+$$

Se non ci si vuole addentrare nei fratti semplici si può sempre usare la formula

$$\frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{pt} v(x,p)dp$$

e calcolare i residui.

3) Solo per Informatica

Giornale delle lezioni, 24/11/2022, pag.5–7. La ivi formula nel nostro caso fa corrispondere

$$p=-1,\ q=3,\ a=1,\ f(x)=\frac{1}{(x+1)(x^2+1)},\ F(x)=\frac{1}{x^{-1/3}(x+1)(x^2+1)(x-1)}$$

Applichiamo la formula

$$\pi f(a) a^{\frac{-p}{q}} \cot\frac{\pi p}{q} + \frac{2\pi i}{1-e^{-i2\pi p/q}} \sum \mathrm{Res} F(z) \underbrace{=}_{p=-1,q=3} \frac{-\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi/3}} \sum \mathrm{Res} F(z) =$$

$$= \frac{-\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{4\pi i}{3+i\sqrt{3}} \sum_{z=-1, z=\pm i} \mathrm{Res} \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z^2+1)(z^2-1)} =$$

$$= \frac{-\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{4\pi i}{3+i\sqrt{3}} \left(\frac{e^{i\pi/3}}{-4} + \frac{e^{i\pi/6}}{-4i} + \frac{e^{i\pi/2}}{4i} \right) = \frac{-\pi}{4\sqrt{3}}$$

3) Solo per Elettronica&Internet

Videolezione del 5 dicembre 2022 pag.6–7

$(y,z)=(0,1)$ è un massimo per la funzione $x=f(y,z)$ definita implicitamente