

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
20-07-2023 A.A. 2022/2023, quinto appello

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco permettono di conseguire 22 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1)* (10 punti) Calcolare l'area della regione definita da $\left\{x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 1 - |x|(2 + \sqrt{3}\frac{x}{|x|})\right\} \cup \{(0, 1)\}$

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = AxtH(t - \frac{x}{a}), & x, t > 0 \quad a > 0, A \in \mathbf{R} \setminus 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \end{cases}$$

2.1)* Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$

2.2) Si antitrasformi $v(x, p)$ ottenendo la soluzione $u(x, t)$

3) (11 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/4} dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$ [Si tratta di un Valor Principale con cammino "a Pac-man"]

3.1)* Si indichi il persorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

3.2) Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

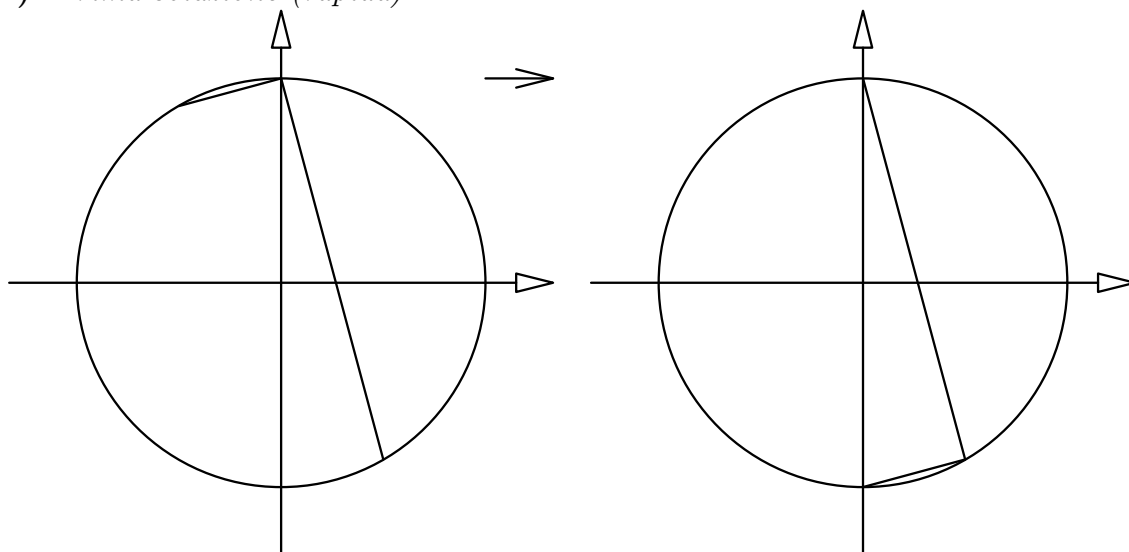
Sia data la seguente funzione $f(x, y) = 3x^3 - 12x^2 + 11x + 3y^3 + 6y^2 + 7y - 2 - 4xy$

4.1)* Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

4.2) Si consideri la relazione $f(x, y) = -2$ e si dimostri che nell'intorno del punto $(0, 0)$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$. Calcolare la retta tangente a $g(x)$ in $x = 0$.

Soluzioni

1) Prima soluzione (rapida)



Le due aree sono uguali ma la seconda è facilmente calcolabile come $(\pi + 1)/2$

Seconda dimostrazione Per $x \geq 0$ spezziamo l'area come unione del triangolo di vertici $(0, 1)$, $(0, -\sqrt{3}/2)$, $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ e della parte che sta sotto la retta di equazione $y = -\sqrt{3}/2$. Il triangolo ha evidentemente area $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{4}$. La seconda parte ha area (in coordinate polari centrate in $(0, 0)$)

$$\int_0^{\pi/6} dt \int_{\frac{\sqrt{3}}{2 \cos t}}^1 r dr = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Sia $x \leq 0$. Conduciamo il raggio che passa per il punto $(-1/2, \sqrt{3}/2)$. La parte che sta sotto a tale raggio ha area $5\pi/12$. La parte che sta sopra ha area $1/4$ per cui alla fine la somma dei due contributi è $(\pi + 1)/2$

2)

Scriviamo $tH(t - x/a) = (t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) + \frac{x}{a}H(t - \frac{x}{a})$ per cui in trasformata di Laplace $v(x, p) = \mathcal{L}u(x, t)$ abbiamo

$$p^2 v - px - a^2 v_{xx} = A x e^{-px/a} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{x}{pa} \right), \quad v_x(0, p) = 0, \quad (1)$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x, p) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) e^{-px/a} + c_4 x$, $E \doteq e^{-px/a}$

$$\begin{aligned} p^2 R - a^2 R_{xx} &= ((2apc_1 - 2a^2 c_2) + (-6a^2 c_3 + 4apc_2)x + 6apc_3 x^2)E + p^2 c_4 x \\ &= \frac{Ax^2 E}{ap} + \frac{Ax E}{p^2} + px \end{aligned}$$

$$c_4 = \frac{1}{p}, \quad c_3 = \frac{A}{6a^2 p^2}, \quad c_2 = \frac{A}{2ap^3}, \quad c_1 = \frac{A}{2p^4}$$

Apparentemente a c_0 si può dare qualsiasi valore. Cercare di capire perché

La soluzione è

$$v(x, p) = \alpha e^{-\frac{px}{a}} + \left(\frac{Ax}{2p^4} + \frac{Ax^2}{2ap^3} + \frac{Ax^3}{6a^2 p^2} \right) e^{-px/a} + \frac{x}{p}$$

$$v_x(0, p) = 0 \implies \alpha = \frac{Aa}{2p^5} + \frac{a}{p^2}$$

quindi

$$v(x, p) = \left(\frac{Aa}{2p^5} + \frac{a}{p^2} \right) e^{-\frac{px}{a}} + \left(\frac{Ax}{2p^4} + \frac{Ax^2}{2ap^3} + \frac{Ax^3}{6a^2p^2} \right) e^{-px/a} + \frac{x}{p}$$

$$u(x, t) = \left(\frac{aA\hat{t}^4}{48} + a\hat{t} + \frac{Ax\hat{t}^3}{12} + \frac{Ax^2\hat{t}^2}{4a} + \frac{Ax^3\hat{t}}{6a^2} \right) H\left(t - \frac{x}{a}\right) + xH(t), \quad \hat{t} = t - x/a$$

3) Solo per Informatica

Giornale delle lezioni, 24/11/2022, pag.5–7. Il risultato è

$$\frac{\pi}{6} \cotg \frac{-\pi}{4} + \frac{2^{\frac{1}{4}}\pi}{6} \cotg \frac{-\pi}{4} + \frac{2\pi i}{1 - e^{\frac{i\pi}{2}}} \left(\frac{e^{i\pi/4}}{6} + \frac{2^{\frac{1}{4}}e^{i\pi/4}}{12} \right) = \frac{-\pi\sqrt{2}}{6} - \frac{2^{\frac{3}{4}}\pi}{6} - \frac{\pi\sqrt{2}}{6}(1 + 2^{-3/4})$$

3) Solo per Elettronica&Internet

1) I punti critici sono $(1, -1)$, massimo, $(7/9, -5/9)$, sella, $(19/9, 1/9)$, minimo, $(13/9, -11/9)$ sella.

$f_x = 0 \iff y = (9x^2 - 24x + 11)/4$ che sostituito in $f_y = 0$ dà $729x^4 - 3888x^3 + 7398x^2 - 5968x + 1729 = 0$. $x = 1$ è una soluzione ed abbiamo (Ruffini)

$$729x^4 - 3888x^3 + 7398x^2 - 5968x + 1729 = (x - 1)(729x^3 - 3159x^2 + 4239x - 1729)$$

$729 = 9^3$ e $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ per cui uno degli elementi da provare è $7/9$ (si “cerchi” equazioni polinomiali con coefficienti interi) che funziona e di nuovo con Ruffini otteniamo $729x^3 - 3159x^2 + 4239x - 1729 = (x - 7/9)(729x^2 - 2592x + 2223)$. Finalmente $729x^2 - 2592x + 2223 = 9(9x - 13)(9x - 19)$. Il resto è standard.

2) Videolezione del 5 dicembre 2022 pag.6–7. $y = \frac{-11x}{7}$