Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
19–06–2023 A.A. 2022/2023, quarto appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco permettono di conseguire 22 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1)* (10 punti) Calcolare il volume dello spazio che soddisfa le seguenti relazioni: $x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$, $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 64 - x^2 - y^2$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Ax^2 H(t - \frac{x}{a}), \quad x, t > 0 \quad a > 0, A \in \mathbf{R} \backslash 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = \sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbf{R} \end{cases}$$

2.1)* Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$

2.2) Si antitrasformi $v(x,p)$ ottenendo la soluzione $u(x,t)$

3) (11 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/4}\, dx}{(x-1)(x+1)^2}$ [Si tratta di un Valor Principale con cammino "a Pac–man"]

3.1)* Si indichi il persorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

3.2) Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la seguente funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 - \frac{4}{3}xy$

4.1)* Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

4.2) Si consideri la relazione $f(x,y) = 0$ e si dimostri che nell'intorno del punto $(1,0)$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$. Calcolare la retta tangente a $g(x)$ in $x = 1$.

Soluzioni

1) Si operi per sottrazione come nel compito del 10/02/2018. Il risultato è 279π.

2)

In trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$p^2 v - a^2 v_{xx} = \frac{Ax^2 e^{-px/a}}{p}, \quad v_x(0,p) = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2} \tag{1}$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x,p) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) e^{-px/a}$, $E \doteq e^{-px/a}$

$$R_{xx} = \left(c_0 \frac{p^2}{a^2} - \frac{2pc_1}{a} + c_1 x \frac{p^2}{a^2} + 2c_2 - \frac{4c_2 xp}{a} + \frac{c_2 x^2 p^2}{a^2} + 6xc_3 - \frac{6c_3 x^2 p}{a} + \frac{c_3 x^3 p^2}{a^2} \right) E$$

$$\begin{aligned}
&p^2 R - a^2 R_{xx} = p^2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)E + \\
&+ \left(-c_0 p^2 + 2pc_1 a - c_1 x p^2 - 2c_2 a^2 + 4c_2 xpa - c_2 x^2 p^2 - 6xc_3 a^2 + 6c_3 x^2 pa - c_3 x^3 p^2 \right) E \\
&= \left(2pc_1 a - 2c_2 a^2 + 4c_2 xpa - 6xc_3 a^2 + 6c_3 x^2 pa \right) E = Ax^2 E/p
\end{aligned}$$

$$c_3 = A/(6ap^2), \quad c_2 = A/(4p^3), \quad c_1 = aA/(4p^4)$$

Apparentemente a c_0 si può dare qualsiasi valore. Cercare di capire perché

La soluzione è

$$v(x,p) = \alpha e^{\frac{-px}{a}} + \left(\frac{aAx}{4p^4} + \frac{Ax^2}{4p^3} + \frac{Ax^3}{6ap^2} \right) e^{-px/a}$$

$$v_x(0,p) = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2} \implies \alpha = \frac{a^2 A}{4p^5} - \frac{a\omega}{p(p^2 + \omega^2)}$$

quindi

$$v(x,p) = \left[\frac{a^2 A}{4p^5} - \frac{a}{\omega} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) \right] e^{-px/a} + \left(\frac{aAx}{4p^4} + \frac{Ax^2}{4p^3} + \frac{Ax^3}{6ap^2} \right) e^{-px/a}$$

$$u(x,t) = \left(\frac{a^2 A \hat{t}^4}{96} - \frac{a}{\omega} + \frac{a}{\omega} \cos(\omega \hat{t}) + \frac{aAx\hat{t}^3}{24} + \frac{Ax^2 \hat{t}^2}{8} + \frac{Ax^3 \hat{t}}{6a} \right) H(t - \frac{x}{a}), \qquad \hat{t} = t - x/a$$

3) Solo per Informatica

Giornale delle lezioni, 24/11/2022, pag.5–7. Il risultato è $\dfrac{-\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

3) Solo per Elettronica&Internet

1) Si veda il compito del 2/7/2018

2) Videolezione del 5 dicembre 2022 pag.6–7. $y = \dfrac{-3}{4}(x - 1)$