Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
01–09–2023 A.A. 2022/2023, sesto appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

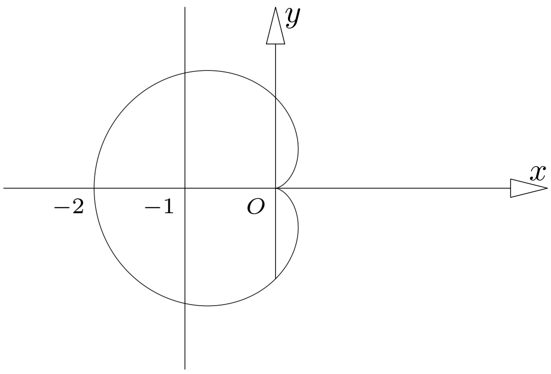
CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco permettono di conseguire 22 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1)* (12 punti) Sia dato il cardioide di equazione $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$



sul piano (x, y). Si calcoli l'area della parte interna che soddisfa la condizione $x \geq -1$.

2) (12 punti) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Ax \displaystyle\int_0^t \sin(\lambda\tau)\cos(\mu t - \mu\tau)d\tau \quad \lambda, \mu, \omega, A \in \mathbf{R}, \quad \lambda \neq \mu, \quad x, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \end{cases}$$

2.1)* Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$

2.2) Si antitrasformi $v(x, p)$ ottenendo la soluzione $u(x, t)$

3) (8 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $V.P. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}\, dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 64)}$ [Si tratta di un Valor Principale con cammino "a Pac–man"]

3.1)* Si indichi il persorso dell'integrale curvilineo nel piano complesso e si scriva la formula per il calcolo dell'integrale

3.2) Si concluda l'esercizio calcolando i contributi delle singolarità non sul cammino di integrazione e quella/e sul cammino di integrazione

4) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet**

Sia data la seguente funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $2x^2 + y^2 + xy = 1$

4.1)* Si trovino i punti critici vincolati e se ne stabilisca la natura

4.2) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione vincolata

Soluzioni

1) Prima soluzione Il bordo del cardioide si ottiene imponendo coordinate polari $x = rC$, $y = rS$ ($C \doteq \cos t, S \doteq \sin t$) da cui $r = 1 - C$. L'integrale che cerchiamo è

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq \sqrt{x^2+y^2}-x, \\ x \geq -1}} dx\, dy = 2 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq \sqrt{x^2+y^2}-x, \\ x \geq -1,\, y \geq 0}} dx\, dy$$

Chiaramente $0 \leq t \leq \pi$ e il problema è esprimere la condizione $x \geq -1$ in termini delle variabili (r, t).

Primo caso $0 \leq t \leq \pi/2$.

$$x \geq -1 \iff rC \geq -1 \iff r \geq -1/C < 0 \impliedby 0 \leq r \ \leq 1 - C$$

per cui abbiamo il contributo

$$2 \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{1-C} r dr = \frac{3\pi - 2}{4}$$

Secondo caso $\pi/2 \leq t \leq \pi$.

$$x \geq -1 \iff r \leq -1/C > 0$$

per cui dobbiamo studiare l'equazione $-1/C \leq 1 - C$ e viene fuori $t \geq \arccos(1 - \sqrt{5})/2 \doteq t_0$ ed otteniamo

$$2 \int_{\pi/2}^{t_0} dt \int_0^{1-C} r dr + 2 \int_{t_0}^{\pi} dt \int_0^{-1/C} r dr$$

$$2 \int_{\pi/2}^{t_0} dt \int_0^{1-C} r dr = \int_{\pi/2}^{t_0} dt \left(1 + \frac{1 + \cos(2t)}{2} - 2\cos t\right) = \frac{3}{2}(t_0 - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4} \left[\sin(2t)\right]\Big|_{\pi/2}^{t_0} - 2\sin t\Big|_{\pi/2}^{t_0} =$$

$$= \frac{3}{2}(t_0 - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + 2 - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

$$2 \int_{t_0}^{\pi} dt \int_0^{-1/C} r dr = \tan t\Big|_{t_0}^{\pi} = -\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5} - 1}}$$

Il risultato è

$$\frac{3}{2}(t_0 - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + 2 - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5} - 1}} + \frac{3\pi}{4} - 2 =$$

$$= \frac{3t_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5} - 1}}$$

Seconda soluzione (Gauss-Green)

Consideriamo solo la parte superiore il cui bordo è formato da tre parti.

$$\gamma_1(t) = (t, 0),\ -1 \leq t \leq 0, \quad \gamma_2(t) = ((1 - C)C, (1 - C)S),\ 0 \leq t \leq t_0$$

$$\gamma_3(t) = (-1, -t),\ -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \leq t \leq 0$$

$$2\int_{\gamma_1}\frac{xdy-ydx}{2}=\int_{-1}^{0}0=0\qquad (dy|_{\gamma_1}=0,\qquad y|_{\gamma_1}=0)$$

$$2\int_{\gamma_2}\frac{xdy-ydx}{2}=\int_0^{t_0}(1+C^2-2C)dt=\int_0^{t_0}dt\left(1+\frac{1+\cos(2t)}{2}-2\cos t\right)=$$

$$=\frac{3t_0}{2}+\frac{1}{4}\left[\sin(2t)\right]\Big|_0^{t_0}-2\sin t\Big|_0^{t_0}=\frac{3t_0}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$2\int_{\gamma_3}\frac{xdy-ydx}{2}=\int_{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{0}-dt=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2\sqrt{5}-1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})4}{2}}=\sqrt{\frac{16}{8(\sqrt{5}-1)}}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

Sommando le due quantità otteniamo

$$\frac{3t_0}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

2)

In trasformata di Laplace $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$p^2v-a^2v_{xx}=\frac{Ax\lambda p}{(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)},\quad v_x(0,p)=0, \tag{1}$$

Si vede subito che $v(x,p)=\alpha e^{-px/a}+\dfrac{Ax\lambda}{p(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)}$,

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}+\frac{A\lambda}{p(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)}=0\iff\alpha=\frac{A\lambda a}{p^2(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)}$$

Si ottiene

$$v(x,p)=\frac{A\lambda a}{p^2(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)}e^{-px/a}+\frac{Ax\lambda}{p(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Ax\lambda}{p(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)}\right)=Ax\left(\frac{1}{\lambda\mu^2}-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda(\mu^2-\lambda^2)}-\frac{\lambda\cos(\mu t)}{\mu^2(\lambda^2-\mu^2)}\right)$$

Sia $\hat{t}=t-x/a$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Aa\lambda e^{-xp/a}}{p^2(p^2+\lambda^2)(p^2+\mu^2)}\right)=\left(\frac{Aa\hat{t}}{\lambda\mu^2}-\frac{Aa\sin(\lambda\hat{t})}{\lambda^2(\mu^2-\lambda^2)}+\frac{Aa\lambda\sin(\mu\hat{t})}{\mu^3(\mu^2-\lambda^2)}\right)H(\hat{t})$$

Quindi

$$u(x,t)=Ax\left(\frac{1}{\lambda\mu^2}-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda(\mu^2-\lambda^2)}-\frac{\lambda\cos(\mu t)}{\mu^2(\lambda^2-\mu^2)}\right)+\left(\frac{Aa\hat{t}}{\lambda\mu^2}-\frac{Aa\sin(\lambda\hat{t})}{\lambda^2(\mu^2-\lambda^2)}+\frac{Aa\lambda\sin(\mu\hat{t})}{\mu^3(\mu^2-\lambda^2)}\right)H(\hat{t})$$

3) Solo per Informatica

Giornale delle lezioni, 24/11/2022, pag.5–7. Il risultato è

$$\frac{\pi \text{cotg}\frac{-\pi}{3}}{-63\cdot 2}+\frac{8^{\frac13}\pi\text{cotg}\frac{-\pi}{3}}{(64-1)\cdot 16}+\frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2i\pi}{3}}}\left(\frac{e^{i\pi/3}}{-2\cdot(-63)}+\frac{2e^{i\pi/3}}{63\cdot 2\cdot(-8)}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}\cdot 63\cdot 2}-\frac{2\pi}{\sqrt{3}\cdot 63\cdot 16}+$$
$$+\frac{\pi}{\sqrt{3}\cdot 63\cdot 2}\left(-1+\frac18\right)=\frac{-5\pi}{\sqrt{3}\cdot 21\cdot 16}$$

3) Solo per Elettronica&Internet

prima soluzione $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(2x^2+y^2+xy-1)$

$$x(2-4\lambda)-y\lambda=0,\quad 2y(1-\lambda)-x\lambda=0,\quad 2x^2+y^2+xy-1=0$$

$x=0$ oppure $y=0$ sono esluse. Il sistema $x(2-4\lambda)-y\lambda=0$, $\quad 2y(1-\lambda)-x\lambda=0$ ammette soluzione (x,y) non nulla se e solo se il determinante $4(1-\lambda)(1-2\lambda)-\lambda^2$ è nullo da cui $\lambda_{1,2}=(6\pm 2\sqrt{2})/7$.

$\boxed{\lambda=\lambda_1}$

$$(-10-8\sqrt{2})x=(6+2\sqrt{2})y,\quad (2-4\sqrt{2})y=x(6+2\sqrt{2}),\quad x=y\frac{-3-\sqrt{2}}{5+4\sqrt{2}}$$

che con $2x^2+y^2+xy=1$ ci dà

$$2y^2\frac{(3+\sqrt{2})^2}{(5+4\sqrt{2})^2}+y^2-y^2\frac{3+\sqrt{2}}{5+4\sqrt{2}}=1,\quad y^2=\frac{(5+4\sqrt{2})^2}{56+35\sqrt{2}},\quad y=\frac{\pm(5+4\sqrt{2})}{\sqrt{7}\sqrt{8+5\sqrt{2}}},\quad x=\frac{\mp(3+\sqrt{2})}{\sqrt{7}\sqrt{8+5\sqrt{2}}}$$

I punti critici sono regolari. Li indichiamo con (x_1,y_1), (x_2,y_2)

$$(4x+y,2y+x)\Big|_{(x_1,y_1)}=-(4x+y,2y+x)\Big|_{(x_2,y_2)}=(\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{8+5\sqrt{2}}},\frac{\sqrt{7}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{8+5\sqrt{2}}})\neq(0,0)$$

L'ortogonalitá al vincolo ci dà

$$a\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{8+5\sqrt{2}}}+b\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{7}}{\sqrt{8+5\sqrt{2}}}=0\iff a=(1+\sqrt{2})b\doteq cb$$

Dobbiamo studiare la quantità

$$(cb,b)\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}4&1\\1&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}cb\\b\end{pmatrix}=(\frac{-80}{7}-\frac{64\sqrt{2}}{7})b^2<0 \text{ massimo}$$

Il calcolo con la coppia (x_2,y_2) dà esattamente lo stesso risultato.

$\boxed{\lambda=\lambda_2}$

$$x=\frac{y(3-\sqrt{2})}{-5+4\sqrt{2}},\quad 2y^2\frac{(3-\sqrt{2})^2}{(-5+4\sqrt{2})^2}+y^2+y^2\frac{(3-\sqrt{2})}{-5+4\sqrt{2}}=1$$

$y_{3,4}=\pm\dfrac{5-4\sqrt{2}}{\sqrt{7}(8-5\sqrt{2})}$, $x_{3,4,}=\mp\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{7}(8-5\sqrt{2})}$

I punti critici sono regolari. Li indichiamo con (x_3,y_3), (x_4,y_4)

$$(4x+y,2y+x)\Big|_{(x_3,y_3)}=-(4x+y,2y+x)\Big|_{(x_4,y_4)}=(\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{8-5\sqrt{2}}},\frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{7}}{\sqrt{8-5\sqrt{2}}})\neq(0,0)$$

L'ortogonalitá al vincolo ci dà $a=(\sqrt{2}-1)b\doteq cb$

$$(cb,b)\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}4&1\\1&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}cb\\b\end{pmatrix}=(\frac{-40}{7}+\frac{32\sqrt{2}}{7})b^2\sim 0.75b^2 \text{ minimo}$$