Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
23–04–2022 A.A. 2021/2022, Appello straordinario

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco consentono di conseguire 25 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1)* (10 punti) Si calcoli l'area $|S|$ della superficie definita da $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x = \gamma_1(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}t^3}{3},\ y = \gamma_2(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}t^3}{3},\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3},\quad 0 \le z \le \sqrt{2}(x+y)/4\}$

2) (12 punti) Siano date le funzioni: 1) $f(t)$ che vale t^2 per $0 \le t \le 1$, vale 1 per $t \ge 1$, 2) $g(t)$ che vale t per $0 \le t \le 1$, e vale 1 per $t \ge 1$, Si risolva la seguente equazione differenziale (A e B costanti)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Axf(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}), \quad x, t > 0 \quad a > 0, A \in \mathbf{R}\backslash 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = B \cdot g(t), \quad B \in \mathbf{R}\backslash 0, \end{cases}$$

2.1)* Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ [Nella soluzione della non omogenea per $v(x,p)$, si provi la funzione $c\, x \exp(-(px)/a) + d\, x^2 \exp(-(px)/a)$, c,d costanti. Può essere utile ricordare che $(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''f$. Inoltre per non appesantire troppo i calcoli e soprattutto inutilmente, conviene chiamare $\mathcal{L}(f) = F(p)$ e $\mathcal{L}(g) = G(p)$ (o scegliete voi la notazione) e portare tale notazione fino alla fine quando si trova la formula finale $v(x,p)$. Solo a quel punto vanno esplicitate sia $F(p)$ che $G(p)$]

2.2) Si antitrasformi $v(x,p)$ ottenendo la soluzione $u(x,t)$

2.1) (3 punti) Dire che relazione intercorre fra A e B affinché $u_t(2a, 4) = 0$ ricordando che $f(x)\delta(x-a) = f(a)$

3) (11 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $\displaystyle\oint_D \frac{\cos\frac{\pi z}{2}\sin(\pi z^2)dz}{(e^{2\pi iz}-1)^3}$ con: 1)* D è il cerchio di centro l'origine e raggio 3/2 2) Il trapezio di vertici i punti $(-1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$, $(5/2, 5/2)$, $(5/2, -5/2)$

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia data la funzione $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ soggetta al vincolo $xyz + x + y + z = 0$ e stabilirne la natura

3.1)* Si trovino i punti critici della funzione [Non si dimentichi di verificare se i punti critici trovati sono regolare oppure no.]

3.2) Se ne stabilisca la natura.

Regole per lo svolgimento e la consegna in presenza

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.

3) Il compito dura tre ore e l’istante d’inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile

4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.

6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall’inizio del compito

Regole per lo svolgimento e la consegna da remoto

1) Munirsi di una telecamera che deve essere posizionata di lato alle vostre spalle e inquadrare: i) la vostra persona ii) il supporto su cui siete appoggiati per scrivere iii) l’eventuale schermo (unico) posto davanti a voi

2) UN SOLO file (pdf o jpeg o jpg) 2) Controllare che le pagine non siano sfocate 3) Controllare che le pagine non siano ruotate le une rispetto alle altre 4) Scrivere in modo leggibile

3) Per unire più file esistono dei programmi online

4) **Il file va spedito entro le tre ore dall’inizio a paolo.perfetti@uniroma2.eu e non ci sono vincoli sull’orario di spedizione. Non sono possibili deroghe per non creare disparità con chi svolge il compito in presenza**

5) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

6) Il vostro file deve essere così nominato: **cognome-nome-matricola-23-04-2022-Elettronica(o Internet o Informatica)**

7) Chi svolge il compito da remoto e intende ritirarsi spedisca (anche in foto) il presente foglio a paolo.perfetti@uniroma2.eu scrivendo nome, cognome, matricola e la parola “ritirato/a”;

Soluzioni

1) Integriamo per fili. L'integrale che cerchiamo è

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2|t|\sqrt{1+t^2}\frac{2t^2}{4}dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} t^3\sqrt{1+t^2}dt = \frac{116}{15}$$

2)

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2H(t) + (1-t^2)H(t) = t^2H(t) + (1-t)H(t) + (1-t)tH(t) = \\ &= t^2H(t) + (1-t)H(t) + (1-t)(t-1)H(t) + (1-t)H(t) = \\ &= t^2H(t) - 2(t-1)H(t-1) - (t-1)^2H(t-1) \end{aligned}$$

$$g(t) = tH(t) - (t-1)H(t-1),$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{2}{p^3} - \frac{2e^{-p}}{p^2} - \frac{2e^{-p}}{p^3} \doteq F(p) \qquad \mathcal{L}(g) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} \doteq G(p)$$

In trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$a^2v_{xx} - p^2v = -Axe^{\frac{-px}{a}}F(p) \quad v_x = BG(p) \tag{1}$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x,t) = cxe^{\frac{-px}{a}} + dx^2e^{\frac{-px}{a}}$

$$a^2R_{xx} = cxp^2e^{\frac{-px}{a}} - 2acpe^{\frac{-px}{a}} + 2a^2de^{\frac{-px}{a}} + p^2dx^2e^{\frac{-px}{a}} - 4dapxe^{\frac{-px}{a}}$$

che inserita nella equazione (1) dà

$$\begin{aligned} &cxp^2e^{\frac{-px}{a}} - 2acpe^{\frac{-px}{a}} + 2a^2de^{\frac{-px}{a}} + p^2dx^2e^{\frac{-px}{a}} - 4dapxe^{\frac{-px}{a}} + \\ &- p^2cxe^{\frac{-px}{a}} - p^2dx^2e^{\frac{-px}{a}} = -Axe^{\frac{-px}{a}}F(p) \end{aligned}$$

ossia

$$-2acp + 2a^2d - 4dapx = -AxF(p) \implies \begin{cases} ad = cp \\ -4adp = -AF(p) \end{cases}$$

$c = \dfrac{AF(p)}{4p^2}$, $d = \dfrac{AF(p)}{4ap}$

La soluzione è

$$v(x,p) = \alpha e^{\frac{-px}{a}} + \frac{AxF(p)}{4p^2}e^{\frac{-xp}{a}} + \frac{AF(p)x^2}{4ap}e^{\frac{-px}{a}}$$

$$v_x(0,p) = \frac{-p\alpha}{a} + \frac{AF(p)}{4p^2} = BG(p) \implies \alpha = \frac{-aBG(p)}{p} + \frac{AF(p)a}{4p^3}$$

quindi

$$\begin{aligned} v(x,p) &= \left(\frac{-aBG(p)}{p} + \frac{AF(p)a}{4p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}} + \frac{AxF(p)}{4p^2}e^{\frac{-xp}{a}} + \frac{AF(p)x^2}{4ap}e^{\frac{-px}{a}} = \\ &= -aB\left(\frac{1}{p^3} - \frac{e^{-p}}{p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}} + \frac{aA}{4}\left(\frac{2}{p^6} - \frac{2e^{-p}}{p^5} - \frac{2e^{-p}}{p^6}\right)e^{\frac{-px}{a}} + \\ &+ \frac{Ax}{4}\left(\frac{2}{p^5} - \frac{2e^{-p}}{p^4} - \frac{2e^{-p}}{p^5}\right)e^{\frac{-px}{a}} + \frac{Ax^2}{4a}\left(\frac{2}{p^4} - \frac{2e^{-p}}{p^3} - \frac{2e^{-p}}{p^4}\right)e^{\frac{-px}{a}} \end{aligned}$$

Sia $\hat{t} = t - x/a$

$$u(x,t) = H(\hat{t})\Big[-\frac{aB}{2}\hat{t}^2 + \frac{aA\hat{t}^5}{240} + \frac{Ax\hat{t}^4}{48} + \frac{Ax^2\hat{t}^3}{48a}\Big] +$$
$$+ H(\hat{t}-1)\Bigg[\frac{aB(\hat{t}-1)^2}{2} - \frac{aA(\hat{t}-1)^4}{48} - \frac{aA(\hat{t}-1)^5}{120} - \frac{Ax(\hat{t}-1)^3}{12} - \frac{Ax(\hat{t}-1)^4}{48} - \frac{Ax^2(\hat{t}-1)^2}{4a} +$$
$$- \frac{Ax^2(\hat{t}-1)^3}{12a}\Bigg]$$

2.1) $\big((\hat{t})^k H(\hat{t})\big)_t\Big|_{t=4,x=2a} = k\hat{t}^{k-1}H(\hat{t}) + \hat{t}^k\delta(\hat{t})\Big|_{t=4,x=2a} = k2^{k-1}$ (per $k \geq 1$ come nel nostro caso)

$\big((\hat{t}-1)^k H(\hat{t}-1)\big)_t\Big|_{t=4,x=2a} = \Big(k(\hat{t}-1)^{k-1}H(\hat{t}-1)\Big|_{t=4,x=2a} + (\hat{t}-1)^k\delta(\hat{t}-1)\Big)\Big|_{t=4,x=2a} = k$

$u_t(2a,4) = -aB - \frac{9}{8}aA = 0$ se e solo se $B = \frac{-9A}{8}$

3) Solo per Informatica
1)

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\sin(\pi z^2)}{(e^{2i\pi z}-1)^3} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z^2)}{\pi z^2}\frac{-8\pi^3 i z^3}{(e^{2i\pi z}-1)^3}\frac{\pi z^3}{-8\pi^3 i z^3} = \frac{i}{8\pi^2}$$

Calcoliamo ora il residuo in $z = 2n+1$ ponendo $z = w + (2n+1) \doteq w + q_n$.

$$\cos\frac{\pi z}{2} = \cos(\frac{\pi w}{2} + \pi n + \frac{\pi}{2}) = -(-1)^n\cos(\frac{\pi w}{2} - \frac{\pi}{2}) = -(-1)^n\sin\frac{\pi w}{2}$$

$$\sin(\pi z^2) = \sin(\pi w^2 + 2\pi q_n + \pi q_n^2) = -\sin(\pi w^2 + 2\pi w q_n), \qquad e^{2\pi i(w+q_n)} = e^{2\pi i w}$$

$$\frac{1}{(e^{2i\pi w}-1)^3} = \frac{1}{(2\pi i w - 2\pi^2 w^2 + O(w^3))^3} = \frac{1}{-i8\pi^3 w^3}\frac{1}{(1+i\pi w + O(w^2))^3}$$

Domanda che a questo punto gli studenti si pongono *È lecito fermarsi a $O(w^2)$ o devo andare avanti?*

Per rispondere bisogna guardare la funzione $\dfrac{-(-1)^n\sin\frac{\pi w}{2}(-\sin(\pi w^2 + 2\pi w q_n))}{-i8\pi^3 w^3(1+i\pi w + O(w^2))^3}$ e osservare che quando $w \to 0$ il numeratore comincia con $w \cdot w$. Il primo viene da $\sin\dfrac{\pi w}{2}$ e il secondo da $\sin(\pi w^2 + 2\pi w q_n)$. Poi c'è w^3 a denominatore quindi della serie di Taylor in $w = 0$ di $\dfrac{1}{(1+i\pi w + O(w^2))^3}$ mi basta il termine proporzionale a w^0 ossia 1

Otteniamo

$$\frac{1}{-i8\pi^3 w^3}(1 - i\pi w + O(w^2))(-1)^n\left(\frac{\pi w}{2} + O(w^3)\right)\left(\pi w^2 + 2\pi w q_n + O(w^3)\right) =$$
$$= \frac{1}{-i8\pi^3 w}(1 - i\pi w + O(w^2))(-1)^n\left(\frac{\pi}{2} + O(w^2)\right)\left(\pi w + 2\pi q_n + O(w^2)\right)$$

e il termine proporzionale a $1/w$ è $\dfrac{(-1)^n}{-i8\pi^3}\pi^2(2n+1)$. Solo i termini $n = 0, -1$ ci interessano e quindi l'integrale è

$$2\pi i\left(\frac{i}{8\pi^2} + \frac{i}{8\pi} + \frac{i}{8\pi}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4\pi}$$

Quindi $\displaystyle\oint_{|z|=3/2} f(z)dz = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4\pi}$.

Domanda 2). Il punto $z=2$ è uno zero di ordine 2 in quanto il numeratore si annulla per $z=2$ e la sua derivata no mentre il denominatore ha uno zero di ordine 3. Poniamo $z=2+w$ e sulla stessa falsariga dell'esercizio precedente abbiamo

$$\frac{-\cos\frac{\pi w}{2}\sin(\pi w^2+4\pi w)}{(e^{2\pi i w}-1)^3} = \frac{-(1-\frac{\pi^2 w^2}{8}+O(w^4))(\pi w(w+4)+O(w^3))}{-8\pi^3 i w^3(1+i\pi w+O(w^2))^3}$$

Solo il termine proporzionale a $1/w$ ci interessa ossia $-i/(8\pi)$ per cui l'integrale è

$$2\pi i\,(\mathrm{Res} f(0)+\mathrm{Res} f(1)+\mathrm{Res} f(2)) = 2\pi i\left(\frac{i}{8\pi^2}+\frac{i}{8\pi}-\frac{i}{8\pi}\right) = \frac{-1}{4\pi}$$

3) Solo per Elettronica&Internet

La funzione di Lagrange è $f(x,y,z,\lambda) = xy+yz+zx-\lambda(xyz+x+y+z)$

$$f_x = y+z-\lambda(yz+1)=0,\quad f_y = z+x-\lambda(zx+1)=0,\quad f_z = x+y-\lambda(xy+1)=0,\quad -(xyz+x+y+z)=0$$

Sottraendo fra di loro le prime tre otteniamo

$$x-y=\lambda z(x-y),\quad y-z=\lambda x(y-z),\quad z-x=\lambda y(z-x) \qquad (Eq)$$

Una prima soluzione è $x=y=z$ e dalla quarta equazione otteniamo $x^3+3x=0$ da cui $x=y=z=0$ e $\lambda=0$

Supponiamo ora che $x=y\neq z$. La seconda e la terza di Eq ci restituiscono $x=y=1/\lambda$ e quindi la quarta ci dà $z=-(2\lambda)/(1+\lambda^2)$. Inserendo tali valori in $x+y-\lambda(xy+1)=0$ si ottiene $\lambda=\pm1$. Abbiamo quindi le soluzioni (x,y,z,λ)

$$(1,1,-1,1),\quad (-1,1,1,1),\quad (1,-1,1,1)$$

$$(-1,-1,1,-1),\quad (1,-1,-1,-1),\quad (-1,1,-1,-1)$$

Per sapere se sono massimi minimi o selle ci basta studiare le prime due soluzioni.

Verifica che i punti critici sono regolari (ne basta uno per simmetria)

$$\underline{F}(\underline{x}) \doteq \underline{\partial}(xyz+x+y+z) = (yz+1, zx+1, xy+1)$$

$\boxed{(0,0,0),\ \lambda=0}$

$$\underline{F}(0,0,0) = (1,1,1) \neq \underline{0}(punt0\ regolare$$

$\underline{F}(0,0,0)\cdot(a,b,c)=0 \iff c=-a+b$. Dobbiamo studiare la forma quadratica

$$(a,b,-a-b)\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0,0)}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\-a-b\end{pmatrix}=0$$

la matrice hessiana non ci dice nulla.

$\boxed{(1,1,-1) \doteq P_1,\, \lambda = 1}$

$$\underline{F}(P_1) = (0,0,2) \neq \underline{0}(\textit{punto regolare}$$

$\underline{F}(P_1) \cdot (a,b,c) = 0 \iff c = 0$. Dobbiamo studiare la forma quadratica

$$(a,b,0)\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,-1)}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= (a,b,0)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 2(a^2+b^2) \quad \text{(minimo)}$$

$\boxed{(-1-,1,1) \doteq P_2,\, \lambda = -1}$

$$\underline{F}(P_2) = (0,0,2) \neq \underline{0}(\textit{punto regolare}$$

$\underline{F}(P_2) \cdot (a,b,c) = 0 \iff c = 0$. Dobbiamo studiare la forma quadratica

$$(a,b,0)\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,-1)}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= (a,b,0)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 2(a^2+b^2) \quad \text{(minimo)}$$