Ing. Elettronica& Internet, Informatica (frontale e online), A.A.2021–2022

Giornale delle lezioni e materiale svolto a lezione ma non presente sulle dispense

Gli esercizi per casa e non svolti a lezione iniziano con ♠ e finiscono con ♠♠

L'inizio di esercizi e/o argomenti svolti a lezione ma non presenti sulle dispense è contraddistinto con • e la fine con ••

Le dispense del Prof.Tauraso sono divise in 4 capitoli. Le pagine da studiare dopo ogni lezione si riferiscono al capitolo relativo

Le prime 6 ore circa di lezione non sono coperte dalle dispense di Tauraso. Il materiale verrà qui esposto

105 min. 1–Lezione del 20/09/2021 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Nozioni di topologia in $\mathbf{R}^n$. Distanza, sfera aperta, sfera chiusa, frontiera della sfera. Nozione di punti interni di un insieme e di punto isolato

Distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$ (o norma di $\underline{x}-\underline{x}'$)

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i-x_i')^2\right)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \{\|\underline{x}-\underline{x}'\|,\ \text{dist}(\underline{x},\underline{x}'),\ \rho(\underline{x},x')\} \tag{1.1}$$

Se $n=1$ si ottiene

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i-x_i')^2\right)^{1/2} = |x_1-x_1'|$$

Se $n=2$ si ottiene

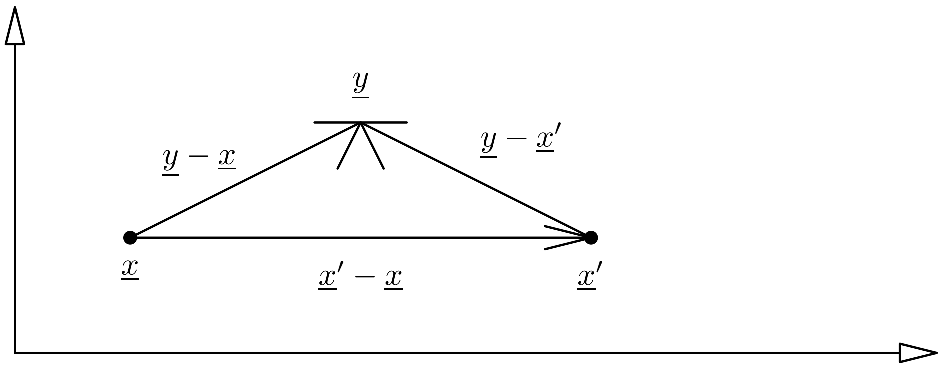
$$\big((x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2\big)^{1/2}$$

che è l'usuale teorema di Pitagora imparato alle scuole medie.

La distanza fra due punti soddisfa

$$\begin{array}{ll} 1)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\| \ge 0, & 2)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\|=0 \iff \underline{x}=\underline{x}' \\ 3)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\| = \|\underline{x}'-\underline{x}\| & 4)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\| \le \|\underline{x}-\underline{y}\|+\|\underline{y}-\underline{x}'\| \end{array}$$

La 4) è la disuguaglianza triangolare disegnata: in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due. L'uguaglianza si ha solo quando il triangolo degenera e i lati si allineano lungo un segmento.



Definizione Dato $\underline{x}_o \in \mathbf{R}^n$, e dato un numero reale positivo r, l'insieme

$$B_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x}\in\mathbf{R}^n : \|\underline{x}-\underline{x}_o\| < r\}$$

si dice *sfera aperta di centro* $\underline{x}_o$ *e raggio* r. A volte la parola "aperta" viene omessa.
L'insieme

$$\overline{B}_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| \le r\}$$

si dice *sfera chiusa di centro* $\underline{x}_o$ *e raggio* r.
L'insieme

$$\partial B_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| = r\}$$

si dice *frontiera* di $B_r(\underline{x}_o)$
Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$. Un punto $\underline{x} \in E$ è detto *punto interno ad* E se

$$\exists\, r > 0 : \; B_r(\underline{x}) \subset E$$

♠ **Esercizio** La *sfera aperta* $B_r(\underline{\xi})$ è un insieme aperto. Infatti se $\underline{x} \in B_r(\underline{\xi})$ allora

$$\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^2\right)^{1/2} \doteq\!= d < r$$

Consideriamo ora la sfera aperta $B_{r-d}(\underline{x})$ e quindi

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} < r - d$$

Sia $\underline{y} \in B_{r-d}(\underline{x})$. Abbiamo

$$\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

Eleviamo al quadrato

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 + 2\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i)$$

La disuguaglianza di Cauchy–Schwarz ci dà

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i) \le \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

per cui otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 \le & \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \\
& + 2\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} = \\
& = \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \left((r-d) + d\right)^2 = r^2
\end{aligned}$$

♠♠

Definizione $\underline{y} \in E$ è *punto isolato* se

$$\exists\, r > 0:\ B_r(y) \cap E \backslash \{\underline{y}\} = \emptyset$$

105 min. 2–Lezione del 21/09/2021 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Definizione L'insieme dei punti interni ad E è indicato $\overset{o}{E}$. Un insieme è detto *aperto*, se tutti i suoi punti sono interni e quindi $E = \overset{o}{E}$.

L'insieme vuoto per definizione è aperto. $\mathbf{R}^n$ e $\emptyset$ sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi

Definizione *La frontiera di* E, ∂E, *è definita come l'insieme dei punti (non necessariamente appartenenti a* E*) tali che qualunque sia la sfera aperta contenente il punto, tale sfera contiene sia punti di* E *che punti del complementare* E^c*.*

In formule $\underline{y} \in \partial E$ se

$$\forall\, r > 0,\ B_r(\underline{y}) \cap E \neq \emptyset \ \wedge\ B_r(\underline{y}) \cap E^c \neq \emptyset$$

Un punto $\underline{y} \in \partial E$ può appartenere ad E così come al complementare. La frontiera della sfera aperta appartiene al complementare mentre la frontiera della sfera chiusa apppartiene alla sfera. Per definizione $\partial E = \partial E^c$.

Definizione $\underline{y}$ *è punto di accumulazione per* E *(in simboli* $\underline{y} \in E'$*)* se

$$\forall\, r > 0\ B_r(\underline{y}) \cap E \backslash \{\underline{y}\} \neq \emptyset$$

In altre parole parole, ogni sfera aperta contenente $\underline{y}$, deve contenere almeno un punto di E. In termini di successioni si traduce in

$$\exists\ \{\underline{x}_n\}\ :\ \underline{x}_n \in E,\ \underline{x}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underline{y}\ \wedge\ \forall\, m\ \exists\, n > m : \underline{x}_n \neq \underline{y}$$

Definizione $\underline{y} \in E$ è *punto isolato* se

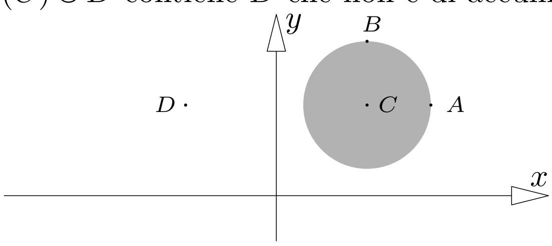
$$\exists\, r > 0:\ B_r(y) \cap E \backslash \{\underline{y}\} = \emptyset$$

Un punto isolato è necessariamente di frontiera. Un punto di frontiera o è di accumulazione o è isolato.

Definizione $E \cup E'$ è detto *chiusura* di E e si indica con $\overline{E}$. Dunque un insieme è detto *chiuso* se $E = E \cup E' = \overline{E}$ per cui è chiuso se $E' \subset E$.

Un esempio in $\mathbf{R}^2$. Il cerchio in figura è $B_r(C)$, $r = 0.7$, $C = (1, 1)$. I punti A e B sono sia di accumulazione che di frontiera ma non interni. Il punto C è di accumulazione e interno ma non di frontiera

La frontiera dell'insieme $B_r(C) \cup D$ contiene D che non è di accumulazione.



Equazioni parametriche del segmento $\underline{a} \in \mathbf{R}^3$, $\underline{b} \in \mathbf{R}^3$. Basta scrivere $\underline{x} = \lambda \underline{b} + (1 - \lambda)\underline{a} \in \mathbf{R}^3$, $0 \le \lambda \le 1$. Possiamo pure riscrivere $\underline{x} = \underline{a} + (\underline{b} - \underline{a})\lambda$

In realtà gli studenti gà conoscono tale formula. Partiamo dalla formula della retta in $\mathbf{R}^3$ $x = c_1 + d_1 t$, $y = c_2 + d_2 t$, $z = c_3 + d_3 t$, che riscriviamo come $\underline{x}(t) = \underline{c} + \underline{d}t$ e $\underline{x}(0) = \underline{c}$, $\underline{x}(1) = \underline{d}$.

Definizione di limite per funzioni di più variabili

Definizione *Sia* $\underline{x}_o \in E'$ *e* $l \in \mathbf{R}$. *Diremo che*

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = l \qquad (f(\underline{x}) \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}_o]{} l) \quad \text{se} \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E\backslash\{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ |f(\underline{x}) - l)| < \varepsilon$$

Per $l = +\infty$ si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = +\infty$ se $\forall\, M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E\backslash\{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ f(\underline{x}) > M$

Per $l = -\infty$ si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = -\infty$ se $\forall\, M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E\backslash\{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ f(\underline{x}) < M$

L'esistenza del limite implica che so *ogni* restrizione della funzione il limite faccia zero.

I polinomi di due variabili $P(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{i,j}x^i y^j$ sono funzioni definite su tutto $\mathbf{R}^2$ e ammettono limite in ogni punto. Il limite vale $P(x^0, y^0)$.

Una funzione razionale, rapporto di due polinomi, $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ ammette limite in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore e il limite vale $P(x^0, y^0)/Q(x^0, y^0)$.

Definizione di funzione continua Sia $f\colon A \to \mathbf{R}$ e $A \subset \mathbf{R}^2$. Sia $\underline{x}^0 \in A$. Se $\underline{x}^0$ è un punto isolato allora per definizione f è continua in $\underline{x}^0$. Se invece $\underline{x}^0 \in A'$ allora si dice che f è continua in $\underline{x}^0$ se

$$\forall\ r > 0\ \exists\ B_r(\underline{x}^0)\colon \underline{x} \in B_r(\underline{x}^0) \cap A \implies |f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0)| < \varepsilon$$

• Esercizio. Dimostrare che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}x = 0$

Svolgimento usiamo il fatto che $f(\underline{x}) \to 0$ se e solo se $|f(\underline{x})| \to 0$ per cui dimostriamo che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}|x| = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2}|x| = 0$ Ora usiamo $(|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|x|\cdot|y| \geq 0$ da cui $|x|\cdot|y| \leq (x^2+y^2)/2$. Si ha

$$0 \leq \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2}|x| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|x| = \frac{|x|}{2}$$

e per il torema del confronto (o dei carabinieri), il limite è zero dal momento che sia la parte sinistra che destra tendono a zero. ••

• Esercizio. Dimostrare che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste

Svolgimento osserviamo che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(x, mx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{m}{1+m^2}$ e quindi il limite dipende dalla restrizione, fatto impossibile se esistesse il limite per $\underline{x} \to \underline{0}$.

Se ripetessimo i calcoli precedenti arriveremmo a

$$0 \leq \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

ma stavolta $1/2 \not\to 0$. ••

105 min. 3–Lezione del 23/09/2021

Definizione (derivata parziale) *Il limite*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x_j+t,x_{j+1},\ldots,x_n)-f(\underline{x}))$$

è la derivata parziale rispetto a x_j $1\le j\le n$ *della funzione calcolata nel punto* $\underline{x}$. *Una funzione è derivabile in* $\underline{x}$ *se ammette tutte le derivate parziali in* $\underline{x}$

La derivata parziale j–esima può essere scritta anche come $\partial_j f(\underline{x})$, $\partial_{x_j} f(\underline{x})$, $f_{x_j}(\underline{x})$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x})$, $D_{\underline{e}_j} f(\underline{x})$. Il vettore applicato in $\underline{x}$ dato da tutte le n derivate parziali verrà scritto come $\underline{\partial} f(\underline{x})$ ed è detto *gradiente (in* $\underline{x}$*)* . Le derivate parziali sono un caso particolare delle *derivate direzionali*

Definizione 2 (derivata direzionale) *Dato il vettore* $\underline{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ *tale che* $v_1^2+v_2^2+\ldots v_n^2=1$. *Il limite*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x_1+v_1t,x_2+v_2t,\ldots,x_n+v_nt)-f(\underline{x}))$$

dicesi derivata direzionale della funzione nel punto $\underline{x}$

Osservazioni *i)* Abbreviando si scrive $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}(f(\underline{x}+t\underline{v})-f(\underline{x}))$. La derivata direzionale in $\underline{x}$ (che si badi bene è un numero reale e non un vettore) si indica talvolta con $D_{\underline{v}} f(\underline{x})$. Con $\underline{v}=(0,\ldots,0,1,0\ldots,0)$ (1 al j-esimo posto) si ottiene f_{x_j}.
L'espressione $\underline{x}+t\underline{v}$ rappresenta l'equazione parametrica della retta passante per $\underline{x}$ ed avente direzione data da $\underline{v}$. Quindi, al variare di t,

$$f(x_1+v_1t,x_2+v_2t,\ldots,x_n+v_nt)\overset{\text{def}}{=}f(\underline{x}+t\underline{v})$$

è l'insieme dei valori delle ordinate della funzione quando ci si muove sulla retta in questione.

Definizione 3 (differenziabilità) *Una funzione è differenziabile in* $\underline{x}$ *se è ivi derivabile e*

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x})-\underline{\partial} f(\underline{x})\cdot\underline{h}))=0$$

Se una funzione è differenziabile in ogni punto del suo dominio si dice che è differenziabile

Esercizio Il viceversa non è vero ossia si può avere una funzione derivabile in un punto ma non differenziabile. Sia data la funzione $\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}$

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

e lo stesso per f_y quindi $f(\underline{x})$ è derivabile nell'origine. Per essere differenziabile deve accadere che

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{0}+\underline{h})-f(\underline{0})-\underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h}))=\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{f(\underline{0}+\underline{h})}{\|\underline{h}\|}=\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2}=0$$

ma è impossibile; basta prendere la restrizione $h_1=h_2$, $h_2\to 0$.

Esercizio Dimostrazione che

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \geq x^2 \\ 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è continua nell'origine.

Esercizio

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\ln(x^2+y^4)}{\sin(xy)} = \frac{2x}{x^2+y^4}\frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2+y^4)\frac{\cos(xy)y}{\sin^2(xy)},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(x^2+y^4)}{\sin(xy)} = \frac{4y^3}{x^2+y^4}\frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2+y^4)\frac{\cos(xy)x}{\sin^2(xy)}$$

Alcuni studenti hanno chiesto se esiste una strategia per capire se una data funzione ammette limite e/o è continua in un determinato punto. Si possono dare delle linee guida.

1) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste e valga l. In tal caso non resta che dimostrarlo usando i vari teoremi sulla somma, prodotto, quoziente di funzioni. A volte bisogna maggiorare o minorare a seconda dei casi. È il caso della funzione $(x^2y)/(x^2+y^2)$

2) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste ma non si sa quanto valga. In tal caso si può prendere una particolare restrizione e calcolare il limite su tale restrizione, diciamo che valga l. A questo punto non resta che dimostrare che il limite è effettivamente l.

3) Ci si convince che il limite non esiste. In tal caso: o si si dimostra che il limite non esiste lungo una particolare restrizione della funzione o si trovano due restrizioni lungo le quali i limiti esistono ma sono diversi

Nel secondo caso rientra la funzione $(xy)/(x^2+y^2)$

• Verificare se esiste o meno $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ dove $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y-x} & \underline{x}\neq\underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$

Il limite non esiste. Prendiamo la restrizione $y = x+\sqrt{x}$ ed otteniamo

$$f(x, x+\sqrt{x}) = \frac{x^2+x^2+2x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} \to 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x, x+x^3) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2+2x^4+x^3}{x^3} \not\exists$$

e quindi il limite non esiste

Sia fata $f\colon A\subseteq \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ differenziabile e $\underline{x}^0 \in \overset{\circ}{A}$.

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x}^0+\underline{h}) - f(\underline{x}^0) - \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{h}) = 0$$

quindi $f(\underline{x}^0+\underline{h}) = f(\underline{x}^0) + \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$ Sia $\|\underline{v}\| = 1$ da cui

$$f(\underline{x}^0+t\underline{v}) - f(\underline{x}^0) = t\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v} + o(\|t\underline{v}\|) \iff \frac{\Delta f_{\underline{v}}}{t} \doteq \frac{1}{t}(f(\underline{x}^0+t\underline{v}) - f(\underline{x}^0) = \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v} + o(1)$$

Ora prendiamo $\underline{w} = \underline{\partial} f(\underline{x}^0)/\|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|$ nell'ipotesi che $\underline{\partial} f(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$.

$$\frac{\Delta f_{\underline{w}}}{t} \doteq \frac{1}{t}(f(\underline{x}^0+t\underline{w}) - f(\underline{x}^0) = \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{w} + o(1) = \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\| + o(1)$$

e da Cauchy–Schwarz sappiamo che $|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot \underline{v}| \leq \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|\|\underline{v}\| = \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|$. L'uguaglianza si ha solo nel caso $\underline{v} = \underline{w}$.

$$\frac{\Delta f_{\underline{w}}}{t} - \frac{\Delta f_{\underline{v}}}{t} = \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\| - \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot \underline{v} + o(1) > 0$$

per ogni $t > 0$ e sufficientemente piccolo. Se ne conclude che la direzione data dal gradiente è quella di massima crescita della funzione.

Esercizi Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni (se è presente α lo si faccia al variare di α)

$$f_1(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad f_2(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad f_3(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \end{cases}$$

$$f_4(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad f_5(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+\sin y)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

$$f_6(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4+xy}{(y^4+3x^4)^\alpha} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases} \qquad f_7(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^2-x^2y}{(y^2+x^2)^\alpha} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases}$$

$$f_8(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{(3x^2+\sin^4 y)^\alpha}{(4y^2+x^2)} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases} \qquad f_9(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x\sin^4 y)}{(e^{x^4+y^4}-1)} & \underline{x}\neq 0 \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases}$$

Per le soluzioni si veda qui http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/eserci/13duevar.pdf

105 min. 4–Lezione del 27/09/2021

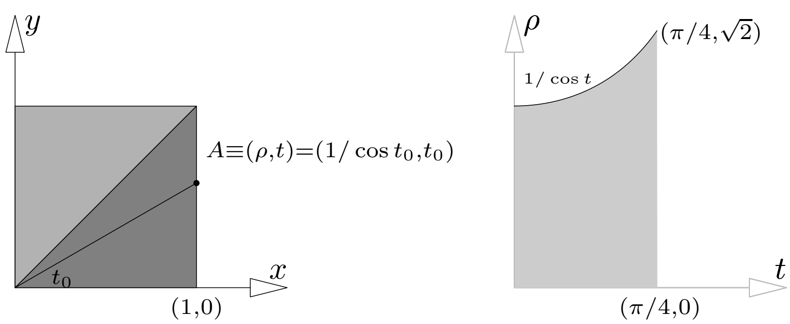
Dispense di Tauraso: pag.1,2. Pag.5 con esclusione del Teorema 2. Nel Teorema 1 sostituire "semplice rispetto ad almeno uno degli assi" alla parola misurabile. Pag.6,7. Esempio 2 pag.8–9. Pag.20. Calcolo dell'area del cerchio. Esempio 4 pag.10 che a lezione è stato visto come applicazione di quanto scritto a pag.20

105 min. 5–Lezione del 28/09/2021

• Calcolato $\displaystyle\iint_D |y-x^2|dx\,dy$ dove D è il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.12/5]** ••

Esempio 3) pag.9 dispense di Tauraso. Cambio di variabili in integrali doppi (pag.12–13 fino a "Osservazione" delle dispense di Tauraso). Esempio delle coordinate polari (fine pag.14 delle dispense di Tauraso). Calcolo dell'area del cerchio di raggio R usando le coordinate polari.

• Calcolare l'area del quadrato usando coordinate polari.



L'area è due volte l'area della metà inferiore.

$$\iint_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2: x\in[0,1],\ 0\le y\le x\}} dxdy = \iint_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2: t\in[0,\pi/4],\ 0\le\rho\le 1/\cos t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano} d\rho\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1/\cos t} \rho\, d\rho\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\cos t}}\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'area è due volte la quantità trovata. ●●

♠ Calcolare $\iint_D |\, x|y| - x^2| dx\, dy$ dove D è il quadrato di centro l'origine e lato lungo 2. **[R.3/2]**

Svolgimento La funzione integranda **e** il dominio di integrazione sono simmetrici rispetto allo scambio $(x,y)\to(x,-y)$ quindi integriamo per $y\ge 0$ e poi moltiplichiamo per 2. Il calcolo è

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy x(-y+x) + \int_0^1 dx \int_x^1 dy x(y-x) + \int_{-1}^0 dx \int_0^1 dy(-x)(y-x) = \frac{3}{4}$$

Calcolare $\iint_D |y - x^3| dx\, dy$ dove D è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.16/7]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.8/7]** iii) L'insieme defnito da $x^2\le|y|\le 1$. **[R.8/5]**

Calcolare il volume del seguente insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 0\le z\le r-\sqrt{x^2+y^2}\}$ (cono) $\mathbf{R.}\pi r^3\mathbf{/3}$

Calcolare il volume dell'insieme in $\mathbf{R}^3$ definito da $x^2+y^2\le z\le 1+x+y$. $\mathbf{R.}9\pi/8$

Svolgimento Integriamo per fili. Avendo in mente la figura di pag.20 delle dispense di Tauraso, dobbiamo trovare l'insieme D' e per farlo intersechiamo il paraboloide e il piano ottenendo $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$. L'insieme D' è quindi $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}\right\}$. $\varphi_1(x,y)=x^2+y^2$ e $\varphi_2(x,y)=1+x+y$. Integrando "per fili" l'integrale è pertanto

$$\iint_{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}} (1+x+y-x^2-y^2)dx$$

Passiamo a coordinate polari nel piano centrate in $(1/2,1/2)$, $x=1/2+\sqrt{3/2}r\cos t$, $y=1/2+\sqrt{3/2}r\sin t$, e l'integrale diventa

$$\int_0^1 dr\,\frac{3r}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-\frac{3r^2}{2}) = \frac{9\pi}{8}$$

♠♠

Degli esercizi di Tauraso sugli integrali multipli, fare tutti quelli dal num.1 al num.10

105 min. 6–Lezione del 30/09/2021

Nel calcolo del volume dellla semisfera, una volta arrivati all'integrale $\iint_{x^2+y^2\le r^2}\sqrt{r^2-x^2-y^2}dx\,dy$ introdurre coordinate polari nel piano (x,y) ed è l'esempio 7 a pag. 16 delle dispense di Tauraso

Esempio pag.15 dispense di Tauraso. Calcolo dello stesso integrale senza usare il cambio di coordinate indicato.

Pag.25 coordinate sferiche. Calcolo del volume della sfera usando le coordinate sferiche.

• Sia dato il volume $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ avente densità di massa costante δ. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Sia $\underline{y}_0 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto $\underline{y}_0$ stia sull'asse z ossia abbia coordinate $(0, 0, \zeta)$. Il potenziale generato da V in $\underline{y}_0$ è (G è la costante gravitazionale) $I = \iiint_V \dfrac{-\delta G dxdydz}{dist(\underline{x}, \underline{y}_0)}$. L'integrale diventa

$$-\delta G \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^r d\rho \frac{\rho^2 \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}} = \frac{-2\pi\delta G}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(|\rho + \zeta| - |\rho - \zeta|).$$

Si è usato il fatto che

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\rho\zeta}\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}\right) = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}}$$

Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta > r$ e $\zeta \leq r$.

Primo caso. Sia $\zeta > r$. L'integrale è

$$\frac{-2\pi\delta G}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) = \frac{-2\pi\delta G}{\zeta} \int_0^r d\rho 2\rho^2 = \frac{-4\pi}{3}\delta G \frac{r^3}{\zeta} = \frac{-MG}{\zeta}$$

Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso. Se $r > \zeta > 0$ otteniamo invece

$$\frac{-2\pi\delta G}{\zeta}\left(\int_0^{\zeta} d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) + \int_{\zeta}^r \rho(\rho + \zeta - (\rho - \zeta))d\rho\right) = 2\pi\delta G(\frac{1}{3}\zeta^2 - r^2) = \frac{MG}{r^3}(\frac{\zeta^2}{2} - \frac{3}{2}r^2)$$

e si può notare che per $\zeta = r$ le due formule coincidono. Si può notare anche che nel secondo caso il potenziale è armonico quindi generante oscillazioni. Se ipoteticamente praticassimo un tunnel che corre dal polo nord al polo sud e facessimo cadere un punto materiale, questi oscillerebbe continuamente fra i due poli ••

♠ Calcolare l'integrale triplo della funzione $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ esteso al volume compreso fra il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il piano $z = 1$. ♠♠

Fare l'esercizio 11 delle dispense di Tauraso.

Oltre a quelli già indicati potete provare a risolvere i seguenti esercizi d'esame

9/9/2020 ex.1 domanda 1), 15/6/2020 ex.1 domanda 1), 20/1/2019 ex.1 (soluz. nel compito del 11/11/2006), 21/3/2019 ex.1, 25/9/2020 ex.1 prima soluzione, 28/11/2020 ex.1, 29/2/2020 ex.1 (soluz. nel compito del 10/9/2016)

105 min. 7–Lezione del 04/10/2021

Calcolo del volume dell'insieme $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z \leq x^2 + 2y^2, x^2 + \dfrac{5y^2}{3} - \dfrac{2xy}{\sqrt{3}} \leq 2\}$.

Prima soluzione: diagonalizzazione di forme quadratiche (vedi la video–lezione che contiene un errore di calcolo corretto alla fine del secondo file pdf della lezione 7)

Seconda soluzione sollecitata da uno studente.

Dobbiamo risolvere l'integrale

$$\iint_{x^2+\frac{5y^2}{3}-\frac{2xy}{\sqrt{3}}\leq 2}(x^2+2y^2)dxdy$$

$$x^2+\frac{5y^2}{3}-\frac{2xy}{\sqrt{3}}\leq 2 \iff \frac{\sqrt{3}x-\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}}{5}\leq y\leq \frac{\sqrt{3}x+\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}}{5} \qquad |x|\leq\sqrt{5}$$

e quindi

$$\int_{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}dx\int_{\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}}{5}}^{\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}}{5}}(x^2+2y^2)dy=\int_{\frac{-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{2\sqrt{6}}{5}x^2\sqrt{5-2x^2}dx+$$

$$+\int_{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{3}x+\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}\right)^3}{125}-\frac{\left(\sqrt{3}x-\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}\right)^3}{125}\right)dx$$

$$\int_{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\frac{2\sqrt{6}}{5}x^2\sqrt{5-2x^2}dx=5\sqrt{3}\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}dt\underbrace{=}_{t=\sin u}5\sqrt{3}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2u)}{4}du=\frac{5\sqrt{3}\pi}{8}$$

$$\int_{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{3}x+\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}\right)^3}{125}-\frac{\left(\sqrt{3}x-\sqrt{6}\sqrt{5-2x^2}\right)^3}{125}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\frac{1}{125}\int_{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\left(18\sqrt{6}(5-2x^2)x^2+12\sqrt{6}(5-2x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$$

usando $\int_{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}x^2(5-2x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{25\pi}{16\sqrt{2}}$ e $\int_{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}(5-2x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{25\pi}{2\sqrt{2}}$ che vanno calcolati attraverso gli stessi cambi di variabile.

Sommando otteniamo $(11\sqrt{3}\pi)/8$ come deve essere.

Domanda posta da una studentessa. Se la matrice del cambio di base fosse quella data ma scambiando le colonne ossia mettendo in colonna prima $\underline{v}_1$ e poi $\underline{v}_2$ si otterrebbe $2\xi^2/3+2\eta^2$ e chiaramente il calcolo dell'integarle dà lo stesso risultato

Integrazione per strati pag.21 delle dispense di Tauraso e applicazione alla sfera.

105 min. 8–Lezione del 05/10/2021

Integrazione per strati ed esempio 10 delle dispense di Tauraso. Calcolo del volume dell'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1, z\leq 2(x^2+y^2)\}$ usando l'integrazione per strati.

Coordinate cilindriche a pag.25 delle dispense di Tauraso e applicazione al calcolo del volume dell'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1, z\leq 2(x^2+y^2)\}$

• Volumi di rotazione. Nel piano (z,y) si abbia un insieme chiuso e limitato (ad esempio un poligono) che non intersechi né l'asse z né l'asse y (oppure intersechi almeno uno degli assi in un insiene avente area nulla) e lo si ruoti intorno all'asse z di α radianti. Il volume della regione ottenuta è

$$\alpha\iint_D y\,dy\,dz$$

Se invece ruotiamo intorno all'asse y abbiamo

$$\alpha\iint_D z\,dy\,dz$$

Ragionamento intuitivo Sia $C_{y,z}$ la circonferenza ottenuta a partire da (y,z) e ruotando di 360 gradi intorno a z. Possiamo pensare che il volume di rotazione sia $\displaystyle\bigcup_{y,z\in D} C_{y,z}$. Un facile disegno mostra che se $(y',z')\neq(y,z)$ allora $C_{y',z'}\cap C_{y,z}=\emptyset$. Per il calcolo del volume dovrei "sommare" la lunghezza di tutte le circonferenze $C_{y,z}$ al variare di (y,z) in D. Ciascuna circonferenza è lunga $2\pi y$ e la "somma" è $\displaystyle\iint_D 2\pi y\,dy\,dz$ appunto.

Se la rotazione avviene intorno all'asse y, allora il volume è

$$2\pi\iint_D z\,dy\,dz$$

Dimostrazione rigorosa nel caso della rotazione intorno all'asse z. Siano (u,v) le coordinate dell'insieme D. Le coordinate (x,y,z) sono $x=u\cos t$, $y=u\sin t$, $z=v$ e l'insieme è

$$V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon (u,v)\in D, x=u\cos t, y=u\sin t, z=v, 0\le t\le\alpha\}$$

e l'integrale è

$$|V|=\iiint_V dx\,dy\,dz=\int_0^\alpha dt\iint_D \underbrace{u}_{iacobiano}\,du\,dv=\alpha\iint_D u\,du\,dv$$

Applicazione all'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+y^2+(z-1)^2\le 1, z\le 2(x^2+y^2)\}$

♠ Calcolare $\displaystyle\iiint_D e^z dxdydz$, $D=\{(z-1)^2+x^2+y^2\le 1\}$. ♠♠

• **Superfici** Sia $\underline{\varphi}\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ (ci limitiamo a superfici che dipendono da due parametri ed il cui grafico è contenuto in $\mathbf{R}^3$.)

Definizione *Sia $D=\overline{D}=\overset{\circ}{D}\cup\partial D$ un insieme in $\mathbf{R}^2$ e sia $\underline{\varphi}$ una applicazione da D a valori in $\mathbf{R}^3$. $\underline{\varphi}=\overset{\text{def}}{=}(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))$ con le seguenti condizioni: i) $\alpha,\beta,\gamma,\in C^1(D;\mathbf{R})$ ii) il rango della matrice $J=\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}$ è due iii) $(u,v)\neq(u',v')$ implica $\underline{\varphi}(u,v)\neq\underline{\varphi}(u',v')$ per ogni $(u,v),(u',v')\in D$;*

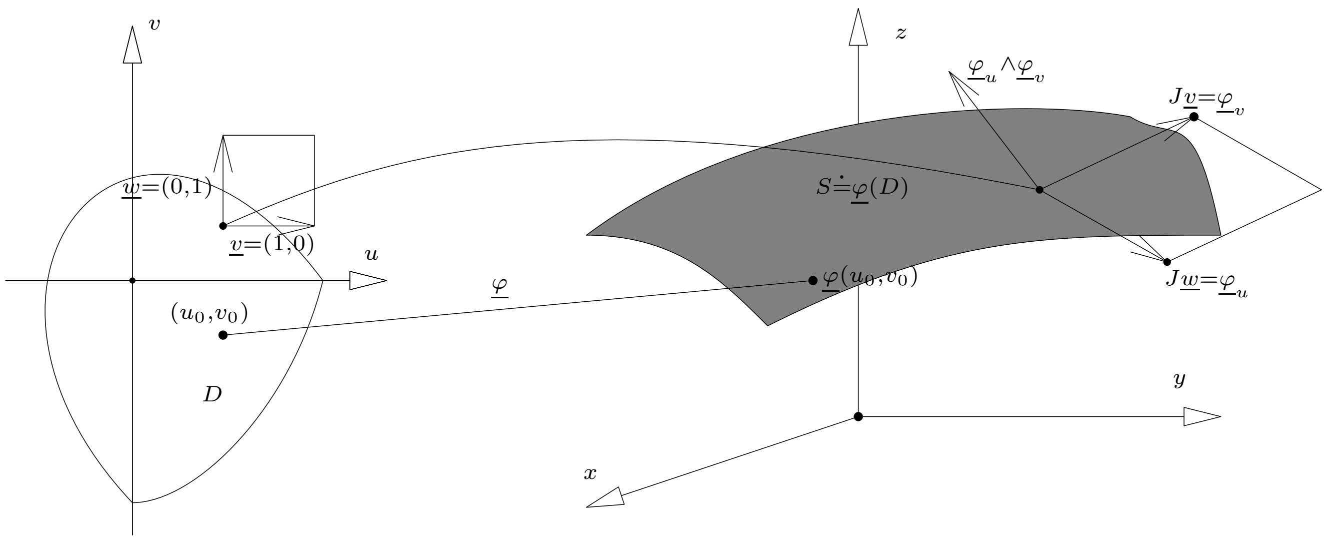
La *ii)* è equivalente a dire che la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine due è non nulla ossia

$$\sqrt{\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\right|^2+\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|^2+\left|\begin{pmatrix}\beta_u & \beta_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|^2}\neq 0$$

La superficie descritta è detta *regolare.*

Sia $I_1=\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\right|$, $I_2=\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|$, $I_3=\left|\begin{pmatrix}\beta_u & \beta_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|$

Osservazion1 La matrice J definisce un operatore lineare che manda vettori a due componenti in vettori a tre componenti. Il rango pari a due garantisce che due vettori linearmente indipendenti vengono mandati in due vettori linearmente indipendenti.



La matrice J applicata al vettore $(1,0)$ produce il vettore $\underline{\varphi}_u \doteq (\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ mentre applicata al vettore $(0,1)$ produce $\underline{\varphi}_v \doteq (\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$

$$\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_u & \beta_u & \gamma_u \\ \alpha_v & \beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \underline{i}(\beta_u\gamma_v - \beta_v\gamma_u) - \underline{j}(\alpha_u\gamma_v - \gamma_u\alpha_v) + \underline{k}(\alpha_u\beta_v - \beta_u\alpha_v)$$

per cui il modulo delle componenti del prodotto vettoriale corrispondono a (I_1, I_2, I_3). Il rettangolo definito dai vettori $\underline{\varphi}_u$ e $\underline{\varphi}_v$ giace sul piano tangente alla superficie e la sua area è pari a $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$. L'equazione del piano tangente a (x_0, y_0, z_0) è data da $(\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot (\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v)(u_0, v_0) = 0$ dove $\underline{x}_0 = \underline{\varphi}(u_0, v_0)$.

I vettori tangenti in un qualsiasi punto $\underline{\varphi}(u_0, v_0)$ sono combinazione lineare dei due vettori $\underline{\varphi}_u(u_0, v_0)$ e $\underline{\varphi}_v(u_0, v_0)$. Infatti prendiamo una curva giacente su $\underline{\varphi}(D)$ ossia
$\big(\alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \gamma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\big) \doteq \underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t))$ dove $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ è una curva tale che $\underline{\gamma}(t_0) = (u_0, v_0)$.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t)) = \Big(\alpha_u\gamma_1' + \alpha_v\gamma_2', \beta_u\gamma_1' + \beta_v\gamma_2', \gamma_u\gamma_1' + \gamma_v\gamma_2'\Big) = \\ &= \gamma_1'(\alpha_u\underline{i} + \beta_u\underline{j} + \gamma_u\underline{k}) + \gamma_2'(\alpha_v\underline{i} + \beta_v\underline{j} + \gamma_v\underline{k}) \end{aligned}$$

●●

Definizione *Si definisce area della superficie l'integrale doppio* $\displaystyle\iint_D dudv \underbrace{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}_{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$ ed a volte lo si indica con $\displaystyle\iint_S d\sigma$ dove S è il grafico della superficie in questione.

Se abbiamo una funzione $f(x, y, z)$ possiamo definire
l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S f(\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))d\sigma$

Si possono risolvere gli esercizi di Tauraso fino a pag.12.

• Nozione di *superficie cartesiana* ossia il grafico della superficie $z = f(x, y)$ $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. In tal caso la parametrizzazione è del tutto ovvia, $x = \alpha(u, v) = u$, $y = \beta(u, v) = v$, $z = \gamma(u, v) = f(u, v)$. In forma vettoriale si ha $u\underline{i} + v\underline{j} + f(u, v)\underline{k}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$; $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} =$

$\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$. Se $f(x,y)\in C^1(D)$ allora la superficie cartesiana soddisfa tutte le tre condizioni $i), ii)$ e $iii)$. Infatti la $i)$ è chiaramente verificata. Per la $ii)$ basta verificare ad esempio che la matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inoltre la $iii)$ è verificata sempre grazie al fatto che sia la prima che la seconda componente della superficie è data da funzioni iniettive. ●●

105 min. 9–Lezione del 07/10/2021

Calcolo dell'area della superficie di una sfera di raggio r.

• Calcolo del potenziale elettrico generato da una sfera in un punto interno ed esterno alla sfera.

Sia S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ (vuota all'interno). $\underline{y}_0\equiv(\xi,\eta,\zeta)$ un punto dello spazio. Il potenziale nel punto $\underline{y}_0$ generato da un “pezzettino” della sfera intorno al punto della sfera $\underline{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ è dato da (δ è la densità di carica elettrica o gravitazionale ossia densità di massa che assumiamo costante)

$$\frac{-\delta d\sigma}{4\pi\varepsilon_0 dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}=\frac{-\delta\|\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v\|dudv}{4\pi\varepsilon_0 dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}=$$

Il potenziale generato dalla sfera in $\underline{y}_0$ è $I=\dfrac{-\delta}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_S\frac{d\sigma}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}$. Con la parametrizzazione in coordinate polari *avente l'asse z posto lungo la retta congiungente il centro di V con il punto* $\underline{y}_0$, l'integrale diventa

$$\frac{-r^2\delta}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-2r\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}}=\frac{-2\pi r\delta}{4\pi\varepsilon_0\zeta}(|r+\zeta|-|r-\zeta|)$$

Se $\zeta>r$ abbiamo $=\dfrac{-\pi r^2\delta}{\varepsilon_0\zeta}=\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0\zeta}$ dove $Q=4\pi r^2\delta$ è la carica della superficie sferica.

Se $|\zeta|<r$ abbiamo $I=\dfrac{-\delta r}{\varepsilon_0}=\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ All'interno della sfera non vi è campo elettrico ossia un corpo materiale non sarebbe soggetto ad alcuna forza. ●●

Esercizio num.12 degli esercizi di Tauraso.

• Calcolo della superficie laterale del volume dell'esercizio precedente ●●

Calcolo dell'area della superficie conica in due modi diversi

Nozioni di base di una curva in $\mathbf{R}^2$. Pag.1–4 tranne le ultime tre righe delle dispense di Tauraso. A pag.1, alla parola iniettiva sostituire

“$t_1\neq t_2$ e t_1 oppure t_2 appartengono alla parte interna di I allora $\underline{\gamma}(t_1)\neq\underline{\gamma}(t_2)$”

105 min. 10–Lezione del 11/10/2021

Studio del cardioide di equazione cartesiana $x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}+x$ (esempio 5 pag.9 dispense di Tauraso).

Ultime tre righe di pag.4 e prime due righe di pag.5 dispense di Tauraso.

• Parametrizzazione della superficie la cui area è rappresentata dalla formula $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}f(\underline{\gamma})ds$ ●●

• Superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva e calcolo della sua area tramite la formula $2\pi\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}\gamma_1 ds$ oppure $2\pi\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}\gamma_2 ds$. Parametrizzazione della superficie la cui area è data dalle formule appena scritte ●●

105 min. 11–Lezione del 12/10/2021

Nozione di **baricentro** (o “centro di massa”) di una curva (pag.8 dispense di Tauraso).

Teorema 1 pag.7 (con dimostrazione)

Pag.11 e pag.17 fino a Teorema 3 escluso. Esercizi

A beneficio di chi vorrà trarne beneficio

Sia R_{ij} una matrice nxn e $(R^T)_{ij}$ la sua trasposta. Facciamo vedere che $(R\underline{x}, R\underline{x}) = (\underline{x}, R^T R\underline{x})$. $\underline{x}$ è inteso come vettore colonna ossia $x_i = (\underline{x})_{i1}$

$$(R\underline{x}, R\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}(R\underline{x})_i(R\underline{x})_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}x_j \sum_{k=1}^{n} R_{ik}x_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R^T_{ji}x_j \sum_{k=1}^{n} R_{ik}x_k =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} R^T_{ji}R_{ik}\right) x_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n}(R^T R)_{jk}x_k = (\underline{x}, (R^T R)\underline{x})$$

105 min. 12–Lezione del 14/10/2021

Dimostrazione che $\int_{\underline{\gamma}} \omega = -\int_{\underline{\gamma}^-} \omega$ con $\underline{\gamma}^- \doteq \underline{\gamma}(-t)$, $-b \le t \le -a$.

Pag.20 paragrafo 2 e esempio 11. Pag.22 Teorema 4. Pag.26 Teorema 5.

Verso la fine trovate la formula $|D| = \oint_{\underline{\gamma}} (-ydx+xdy)$ avrebbe dovuto essere $|D| = \frac{1}{2}\oint_{\underline{\gamma}}(-ydx+xdy)$

105 min. 13–Lezione del 18/10/2021

Esercizi sulle forme–differenziali e prime nozioni sui numeri complessi

105 min. 14–Lezione del 19/10/2021

Da pag.1 a pag.17 delle dispense di Tauraso

105 min. 15–Lezione del 21/10/2021

Pag.17 e 18 fino a esempio 5 escluso. Pag.23–27 fino a Teorema 6 escluso e tranne la dimostrazione del teorema 5. Degli esercizi si possono risolvere quelli da pag.1 a pag.9.

105 min. 16–Lezione del 25/10/2021 Da pag.28 a pag.32

105 min. 17–Lezione del 26/10/2021 Da pag.33 paragrafo 6. Pag.34 Teorema 9. Pag.37 Teorema 10

105 min. 18–Lezione del 28/10/2021 Osservazione a pag.37. Osservazione pag.39. Esercizi vari

105 min. 19–Lezione del 02/11/2021 Pag.41-42 fino al paragrafo 2 delle dispense di Tauraso

105 min. 20–Lezione del 04/11/2021 Trasformata di Laplace. Pag.1–5 delle dispense di Tauraso tranne i paragrafi 6) e 7).

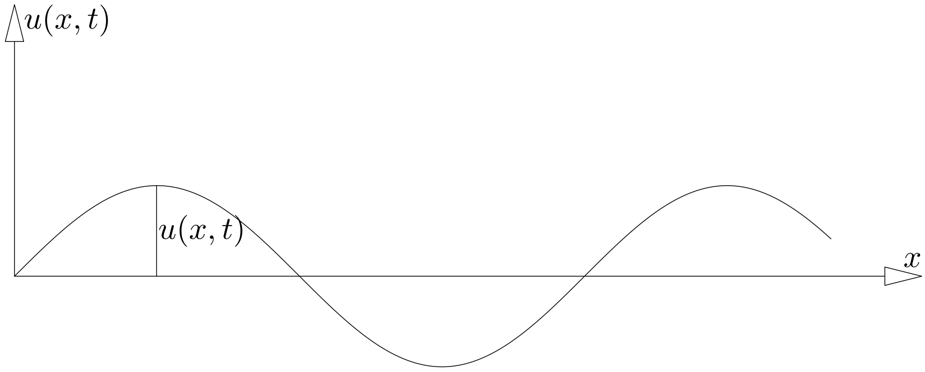
105 min. 21–Lezione del 08/11/2021 Trasformata di Laplace. Pag.5 formule 1)–5). Pag.8 (Delta di Dirac) e pag.9. Pag.10 (Antritrasformata di Laplace), pag.10 e 11 fino a paragrafo 6 escluso. Applicazione alle equazioni differenziali ordinarie.

105 min. 22–Lezione del 09/11/2021 Esercizi sulla Trasformata di Laplace

105 min. 23–Lezione del 11/11/2021 Equazione di D'Alembert lineare a coefficienti costanti e termine forzante indipendente da $u(x,t)$.

Risoluzione della seguente equazione alle derivate parziali

• $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$



$v(x,p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x,t)dt \doteq \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2 v(x,p) - pu_t(x,0) = p^2 v(x,p)$.

$$Be^{-pT} = \mathcal{L}(u_x(0,t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_x(x,t)dt\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x,t)dt\Big|_{x=0} \overset{\text{def}}{=} v_x(0,p)$$

per cui nella variabile $v(x,p)$ il sistema diventa $\begin{cases} a^2 v'' - p^2 v = 0 \\ v_x(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} = \alpha e^{\frac{(\mathrm{Re}p + i\mathrm{Im}p)x}{a}} + \beta e^{-\frac{(\mathrm{Re}p + i\mathrm{Im}p)x}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta = -\dfrac{aB}{p}e^{-pT}$. Quindi otteniamo $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p) = -aBH(t - T - \dfrac{x}{a})$ che rappresenta uno scalino di ampiezza $-aB$ viaggiante verso destra con velocità a. Dato un punto di ascissa x, per un tempo $t < t_x \overset{\text{def}}{=} T + \dfrac{x}{a}$ si ha $u(x,t) = 0$. Passato t_x si ha $u(x,t) = -aB$. $H(t-t_0)$ è la funzione a scalino in t_0. ••

Nelle videolezioni viene riportato un secondo modo di trovare $v(x,p)$

Esercizi

♠ a) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u(x,t))$. La variabile x fa da "spettatore" e non viene coinvolta nella trasformata di Laplace.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = p\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p),$$
$$\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2 v(x,p) - pu_t(x,0) = p^2 v(x,p)$$

$\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\text{def}}{=}v(0,p) = Be^{-pT}$ per cui rispetto a $v(x,p)$ l'equazione differenziale alle derivate parziali diventa l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} a^2v'' - p^2v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$$

e la soluzione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta = Be^{-pT}$ e quindi la soluzione è $v(x,p) = Be^{-pT-\frac{xp}{a}}$. Quindi otteniamo $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = B\delta(t-T-\dfrac{x}{a})$ che rappresenta un impulso (è chiaramente una approssimazione) viaggiante verso destra con velocità a. Dopo il passaggio dell'impulso il punto torna nello stato di quiete.

La soluzione del sistema $\begin{cases} a^2v'' - p^2v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ può ricercarsi anche attraverso l'uso della trasformata di Laplace. Va osservato però che l'equazione è del secondo ordine ma disponiamo solo della condizione iniziale su $v(0,p)$. La condizione su $v_x(0,p)$ la lasciamo indicata e ce la "giochiamo" al momento giusto. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p)\stackrel{\text{def}}{=}h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore"). $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2h(s,p) - sBe^{-pT} - v_x(0,p)$ per cui l'equazione ordinaria diventa

$$a^2s^2h(s,p) - sa^2Be^{-pT} - a^2v_x(0,p) - p^2h(s,p) = 0 \implies h(s,p) = \frac{sa^2Be^{-pT} + a^2v_x(0,p)}{a^2s^2 - p^2}$$

Facendo l'antitrasformata di Laplace si ottiene

$$v(x,p) = v.p.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} e^{sx}h(s,p)ds = \frac{B}{2}e^{-pT}(e^{\frac{p}{a}x} + e^{-\frac{p}{a}x}) + \frac{v_x(0,p)a}{2p}\big(e^{\frac{p}{a}x} - e^{-\frac{p}{a}x}\big)$$

Poiché vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione $|u(x,t)| \leq Me^{M't}$ per ogni $x > 0$, con costanti M ed M' positive si deve avere $\dfrac{B}{2}e^{-pT}e^{\frac{p}{a}x} + \dfrac{v_x(0,p)a}{2p}e^{\frac{p}{a}x} = 0$ da cui $v_x(0,p) = -\dfrac{Bp}{a}e^{-pT}$ e quindi $v(x,p) = Be^{-pT-\frac{p}{a}x}$

b) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u(0,t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p) - u_t(x,0) = p^2v(x,p) - A\omega$. $\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\text{def}}{=}v(0,p) = \mathcal{L}(A\sin(\omega t)) = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases} p^2v(x,p) - A\omega = a^2v'' \\ v(0,p) = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. La condizione iniziale impone $\beta = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2} - \dfrac{A\omega}{p^2}$. $v(x,p) = (\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2} - \dfrac{A\omega}{p^2})e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$.

$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = AH(t-\dfrac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\dfrac{x}{a}) - \omega(t-\dfrac{x}{a})\big] + A\omega t$

Controlliamo che le condizioni iniziali sono verificate dalla soluzione.

$u(x,0) = AH(-\dfrac{x}{a})\big[\sin\omega(-\dfrac{x}{a}) - \omega(-\dfrac{x}{a})\big] = 0$ in quanto $H(-\dfrac{x}{a}) = 0$ essendo $x > 0$ e $a > 0$.

$u_t(x,0) = A\delta(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a}) - \omega(t-\frac{x}{a})\big] + AH(-\frac{x}{a})\big[\omega\cos\omega(t-\frac{x}{a}) - \omega\big] + A\omega = A\omega$ in quanto il primo pezzo si annulla per ogni valore di t il secondo pezzo è nullo per le stesse ragioni di prima.

$u(0,t) = AH(t)\big[\sin\omega t - \omega t\big] + A\omega t = AH(t)\sin\omega t = A\sin(\omega t)$

c) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u_x(0,t) = B\sin(\omega t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2 v(x,p) - u_t(x,0) = p^2 v(x,p) - A\omega$. $\mathcal{L}(u_x(0,t)) \stackrel{\text{def}}{=} v_x(0,p) = \mathcal{L}(B\sin(\omega t)) = \dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases} p^2 v(x,p) - A\omega = a^2 v'' \\ v_x(0,p) = \dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. Di conseguenza si ha $v(x,p) = \dfrac{A\omega}{p^2} - \dfrac{B\omega a}{p(p^2+\omega^2)} e^{-x\frac{p}{a}}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = A\omega t - H(t-\frac{x}{a})\dfrac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})$

Verifichiamo le condizioni iniziali:

$u(x,0) = H(-\frac{x}{a})\dfrac{Ba}{\omega}(1+\cos\omega(-\frac{x}{a}) = 0$

$u_t(x,0) = A\omega - \delta(t-\frac{x}{a})\dfrac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})) - H(-\frac{x}{a})\dfrac{Ba}{\omega}\sin\omega(-\frac{x}{a}) = 0$

$u_x(0,t) = \dfrac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a})\dfrac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a}) + H(t)B\sin\omega t = B\sin(\omega t)$

d) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. $v_x(0,p) = 0$ impone $\dfrac{p}{a}(\alpha-\beta) = 0$ e quindi $\beta = 0$ da cui $v(x,p) = \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = \dfrac{1}{\omega^2}(t\omega - \sin\omega t)$

e) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u(x,t))$, $\mathcal{L}(u_t(x,t) = p\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = pv(x,p) - \sin x$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p\mathcal{L}(u_t(x,t)) - u_t(x,0) = p(pv(x,p) - \sin x) = p^2 v(x,p) - p\sin x$, $\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_{xx} = v_{xx}(x,p)$ $\mathcal{L}(u_x(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_x = v_x(x,p) = \int_0^{+\infty} dt e^{-pt} B\delta(t-T) = e^{-pT}$ per cui nella funzione $v(x,p)$ l'equazione diventa la equazione differenziale ordinaria $\begin{cases} p^2 v - p\sin x = a^2 v_{xx} \\ v_x(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$

che possiamo scrivere anche come

$\begin{cases} p^2 v - p\sin x = a^2 v'' \\ v'(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ L'equazione per $v(x,p)$ è del secondo ordine (come per $u(x,t)$) e la condizione iniziale è solo per $v_x(0,p)$. Se ne deduce che manca una condizione per poter trovare l'unica soluzione che cerchiamo. La seconda condizione apparentemente mancante deriva dal fatto che vogliamo $|u(x,t)| \leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A'. Ciò vuol dire che deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$. Per risolvere la equazione ordinaria utilizziamo di nuovo la trasformata di Laplace. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} h(s,p)$ (la variabile p “fa sempre da spettatore.” $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2h(s,p) - sv(0,p) - Be^{-pT}$ per cui l'equazione ordinaria diventa $p^2h(s,p) - p\mathcal{L}(\sin x) = a^2s^2h(s,p) - a^2sv(0,p) - a^2Be^{-pT}$ ossia $h(s,p) = \dfrac{p}{(s^2+1)(p^2-a^2s^2)} + \dfrac{-a^2sv(0,p) - a^2Be^{-pT}}{p^2-a^2s^2}$. Antitrasformando si ha $v(s,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}(e^{-\frac{xp}{a}} - e^{\frac{px}{a}}) + \dfrac{v(0,p)}{2}(e^{\frac{px}{a}} + e^{-\frac{px}{a}}) + \dfrac{B}{2}(e^{\frac{px}{a}-pT} - e^{-\frac{px}{a}-pT})$. Il limite $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ impone $-\dfrac{a}{p^2+a^2} + v(0,p) + Be^{-pT} = 0$ e quindi $v(0,p) = \dfrac{a}{p^2+a^2} - Be^{-pT}$. Dunque si ottiene $v(x,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{p^2+a^2}e^{-\frac{p}{a}x} - Be^{-\frac{p}{a}x-pT}$. Antitrasformando si ha la soluzione $u(x,t) = \sin x\cos at + H(t-\dfrac{x}{a})\sin(at-x) - aBH(t-\dfrac{x}{a}-T)$. Verifichiamo le condizioni iniziali. $u(x,0) = \sin x$ chiaramente. $u_t(x,t) = -a\sin x\sin at + \delta(t-\dfrac{x}{a})\sin(at-x) + aH(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\dfrac{x}{a}-T) = -a\sin x\sin at + (\sin(at-x))\Big|_{t=x/a} + aH(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\dfrac{x}{a}-T) = -a\sin x\sin at + aH(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)$ e per $t=0$ otteniamo zero. Ora analizziamo $u_x(x,t) = \cos x\cos(at) - \dfrac{1}{a}\delta(t-\dfrac{x}{a})\sin(at-x) - H(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) + B\delta(t-\dfrac{x}{a}-T) = \cos x\cos(at) - H(t-\dfrac{x}{a})\cos(at-x) + B\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)$ e per $x=0$ abbiamo $u_x(0,t) = \cos(at) - \cos(at) + B\delta(t-T)$

e1) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0) = H(x-x_0),\ x_0>0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - H(x-x_0)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p) - pH(x-x_0)$ e quindi otteniamo $\begin{cases} p^2v - pH(x-x_0) - a^2v_{xx} = 0 \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$

Definiamo $\mathcal{L}(v(x,p)) = h(s,p)$,

$$\mathcal{L}(v_x(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p), \qquad \mathcal{L}(v_{xx}(x,p)) = s(sh(s,p) - v(0,p)) - v_x(0,p)$$

e l'equazione diventa

$$p^2h(s,p) - \frac{pe^{-sx_0}}{s} - a^2s^2h(s,p) + a^2sv(0,p) + a^2v_x(0,p) = 0$$

ossia $p^2h(s,p) - \dfrac{pe^{-sx_0}}{s} - a^2s^2h(s,p) + a^2v_x(0,p) = 0$,

$$h(s,p) = \frac{pe^{-sx_0}}{s(p^2-a^2s^2)} + \frac{a^2v_x(0,p)}{p^2-a^2s^2} = \frac{e^{-sx_0}}{ps} - \frac{e^{-sx_0}s}{p(s^2-p^2/a^2)} + \frac{v_x(0,p)}{s^2-p^2/a^2}$$

da cui segue $v(x,p) = \dfrac{H(x-x_0)}{p} - \dfrac{1}{p}\cosh(\dfrac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0) + \dfrac{a}{p}v_x(0,p)\sinh(\dfrac{p}{a}x)$. Ora dobbiamo annullare i termini che non tendono a zero per Re$p \to +\infty$.

Se $x > x_0$ gli unici termini che non tendono a zero sono $\dfrac{-1}{p}e^{\frac{p}{a}(x-x_0)} + \dfrac{a}{p}v_x(0,p)e^{\frac{p}{a}x}$ per cui $v_x(0,p) = \dfrac{1}{a}e^{\frac{-px_0}{a}}$ e la soluzione diventa

$$v(x,p) = \frac{H(x-x_0)}{p} - \frac{1}{p}\cosh(\frac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0) + \frac{1}{p}\sinh(\frac{p}{a}x)e^{\frac{-px_0}{a}}$$

e $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to+\infty} v(x,p)=0$ tanto per $x\geq x_0$ che per $x<x_0$. Infatti

$$v(x,p)=\begin{cases}\dfrac{e^{-p(x-x_0)/a}}{2p}-\dfrac{e^{-p(x+x_0)/a}}{2p} & x\geq x_0\\ \dfrac{e^{p(x-x_0)/a}}{2p}-\dfrac{e^{-p(x+x_0)/a}}{2p} & x<x_0\end{cases}$$

Antitrasformando abbiamo $\Delta x \doteq x-x_0$.

$$u(x,t)=H(\Delta x)H(t)-\frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})-\frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a})+\frac{1}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})-\frac{1}{2}H(t-\frac{x+x_0}{a})$$

$$u(x,0)=H(\Delta x)-\frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a})-\frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{-\Delta x}{a})+\frac{1}{2}H(\frac{\Delta x}{a})-\frac{1}{2}H(-\frac{x+x_0}{a})$$

Se $x<x_0$ ogni termine è nullo. Se $x>x_0$ sopravvive $H(\Delta x)-\dfrac{H(\Delta x)}{2}H(\dfrac{\Delta x}{a})+\dfrac{1}{2}H(\dfrac{\Delta x}{a})=1$

$$u_t(x,t)=H(\Delta x)\delta(t)-\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t+\frac{\Delta x}{a})-\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t-\frac{\Delta x}{a})+\frac{1}{2}\delta(t+\frac{\Delta x}{a})-\frac{1}{2}\delta(t-\frac{x+x_0}{a})$$

Sia $x\geq x_0$.

$$H(\Delta x)-\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(\frac{\Delta x}{2})-\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(-\frac{\Delta x}{2})+\frac{1}{2}\delta(\frac{\Delta x}{2})-\frac{1}{2}\delta(-\frac{x+x_0}{2})=H(\Delta x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

Abbiamo usato la formula $f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)$ e se $f(x)\equiv a$ è una costante $a\delta(x-x_0)=a$.
Sia $x<x_0$. $H(x-x_0)=0$.

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}\delta(\frac{\Delta x}{2})-\frac{1}{2}\delta(-\frac{x+x_0}{2})=0$$

$$u(0,t)=\frac{1}{2}H(t-\frac{x_0}{a})-\frac{1}{2}H(t-\frac{x_0}{a})=0$$

e2) $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & x>0,t>0,a>0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=H(x-x_0),\ u(0,t)=0\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-H(x-x_0)$ e quindi otteniamo $\begin{cases}p^2v-H(x-x_0)-a^2v_{xx}=0\\ v(0,p)=0\end{cases}$

Definiamo $\mathcal{L}(v(x,p))=h(s,p)$,

$$\mathcal{L}(v_x(x,p))=sh(s,p)-v(0,p),\qquad \mathcal{L}(v_{xx}(x,p))=s(sh(s,p)-v(0,p))-v_x(0,p)$$

e l'equazione diventa

$$p^2h(s,p)-\frac{e^{-sx_0}}{s}-a^2s^2h(s,p)+a^2sv(0,p)+a^2v_x(0,p)=0$$

ossia $p^2h(s,p)-\dfrac{e^{-sx_0}}{s}-a^2s^2h(s,p)+a^2v_x(0,p)=0$,

$$h(s,p)=\frac{e^{-sx_0}}{s(p^2-a^2s^2)}-\frac{a^2v_x(0,p)}{p^2-a^2s^2}=\frac{e^{-sx_0}}{p^2s}-\frac{e^{-sx_0}s}{p^2(s^2-p^2/a^2)}+\frac{v_x(0,p)}{s^2-p^2/a^2}$$

da cui segue $v(x,p) = \dfrac{H(x-x_0)}{p^2} - \dfrac{1}{p^2}\cosh(\dfrac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0) + \dfrac{a}{p}v_x(0,p)\sinh(\dfrac{p}{a}x)$. Ora dobbiamo annullare i termini che non tendono a zero per Re$p \to +\infty$.

Se $x > x_0$ gli unici termini che non tendono a zero sono $\dfrac{-1}{2p^2}e^{\frac{p}{a}(x-x_0)} + \dfrac{a}{2p}v_x(0,p)e^{\frac{p}{a}x}$ per cui $v_x(0,p) = \dfrac{1}{pa}e^{\frac{-px_0}{a}}$ e la soluzione diventa

$$v(x,p) = \frac{H(x-x_0)}{p^2} - \frac{1}{p^2}\cosh(\frac{p}{a}(x-x_0))H(x-x_0) + \frac{1}{p^2}\sinh(\frac{p}{a}x)e^{\frac{-px_0}{a}}$$

e $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to+\infty} v(x,p) = 0$ tanto per $x \ge x_0$ che per $x < x_0$. Antitrasformando abbiamo $\Delta x \doteq x - x_0$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= tH(\Delta x)H(t) - (t+\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a}) - (t-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a})+\\ &+\frac{1}{2}(t+\frac{\Delta x}{a})H(t+\frac{\Delta x}{a}) - \frac{1}{2}(t-\frac{x+x_0}{a})H(t-\frac{x+x_0}{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= -(\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a}) - (-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}(\frac{\Delta x}{a})H(\frac{\Delta x}{a})+\\ &-\frac{1}{2}(-\frac{x+x_0}{a})H(-\frac{x+x_0}{a}) = -(\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a}) - (-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}(\frac{\Delta x}{a})H(\frac{\Delta x}{a}) \end{aligned}$$

Se $x < x_0$ tutti i termini sono nulli. Se $x = x_0$ $\Delta x = 0$. Se $x > x_0$ il secondo termine è nullo e la somma del primo e terzo è zero.

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= H(\Delta x)H(t) + tH(\Delta x)\delta(t) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a}) - (t+\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t+\frac{\Delta x}{a})+\\ &-\frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a}) - (t-\frac{\Delta x}{a})\frac{H(\Delta x)}{2}\delta(t-\frac{\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})+\\ &+\frac{1}{2}(t+\frac{\Delta x}{a})\delta(t+\frac{\Delta x}{a}) - \frac{1}{2}H(t-\frac{x+x_0}{a}) - \frac{1}{2}(t-\frac{x+x_0}{a})\delta(t-\frac{x+x_0}{a}) =\\ &= H(\Delta x)H(t) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a}) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(t-\frac{\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}H(t+\frac{\Delta x}{a})+\\ &-\frac{1}{2}H(t-\frac{x+x_0}{a}) \end{aligned}$$

Per $t = 0$ diventa

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= H(\Delta x) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(\frac{\Delta x}{a}) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a}) + \frac{1}{2}H(\frac{\Delta x}{a}) - \frac{1}{2}H(-\frac{x+x_0}{a}) =\\ &= H(\Delta x) - \frac{H(\Delta x)}{2}H(-\frac{\Delta x}{a}) = H(\Delta x) \text{ per ogni } x \ne x_0 \end{aligned}$$

f) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = \sin(\omega t) \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p) - a^2v'' = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v(0,p) = \dfrac{A\lambda}{\lambda^2+p^2} \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A

e A', deve essere $\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. $v(0,p)=\dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}$ impone $v(x,p)=\Big(\dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}-\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big)e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=H(t-\dfrac{x}{a})\big(A\sin\lambda(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{t}{\omega}\big)-\dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)+\dfrac{t}{\omega}$

g) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x+\sin(\omega t) \quad x>0, t>0, a>0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{x}{p}+\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\\ v_x(0,p)=0\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{a}{p^4}e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{x}{p^3}+\dfrac{\omega}{p^2(\omega^2+p^2)}$ da cui $u(x,t)=\dfrac{a}{6}(t-\dfrac{x}{a})^3H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{2}xt^2H(t)-\dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)+\dfrac{t}{\omega}$

h) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x\sin(\omega t)\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)}\\ v_x(0,p)=0\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2-2\dfrac{a}{\omega^3}\Big)H(t-\dfrac{x}{a})+H(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{tx}{\omega}-\dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

i) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x\sin(\omega t) \quad x>0, t>0, a>0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=A\delta(t-T)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)}\\ v_x(0,p)=Ae^{-pT}\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}-\dfrac{aA}{p}e^{-pT-\frac{p}{a}x}$ da cui

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}-\frac{aA}{p}e^{-pT-\frac{p}{a}x}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2-2\dfrac{a}{\omega^3}\Big)H(t-\dfrac{x}{a})+H(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{tx}{\omega}-\dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)-aAH(t-T-\dfrac{x}{a})$

l) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x\sin(\omega t) \quad x>0, t>0, a>0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)}\\ v(0,p)=0\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=$

$\dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t)=\dfrac{tx}{\omega}-\dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

m) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x\sin(\omega t) \quad x>0,t>0,a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=A\delta(T-t)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v(0,p)=Ae^{-pT}\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}+Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}$ da cui

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}+Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t)=\dfrac{tx}{\omega}-\dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)+A\delta(t-T-\dfrac{x}{a})$

n) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=t+\sin(\omega x) \quad x>0,t>0,a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=A\delta(t-T)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{\sin(\omega x)}{p} \\ v(0,p)=Ae^{-pT}\end{cases}$ e la soluzione è

$v(x,p)=(\dfrac{1}{p^4}+\dfrac{\sin(\omega x)}{p(p^2+a^2\omega^2)})+e^{-\frac{p}{a}x}(Ae^{-pT}-\dfrac{1}{p^4})$ da cui

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=$$
$$=\frac{t^3}{3}+\frac{\sin(\omega x)}{a^2\omega^2}-\frac{1}{2a^2\omega^2}\big(\sin\omega(x+at)+\sin\omega(x-at)\big)-\frac{1}{3}H(t-\frac{x}{a})(t-\frac{x}{a})^3+A\delta(t-T-\frac{x}{a})$$

o) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=t\sin(\omega x) \quad x>0,t>0,a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\sin(\omega x)}{p^2} \\ v_x(0,p)=0\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{a\omega}{p^3(p^2+a^2\omega^2)}e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{\sin(\omega x)}{p^2(p^2+a^2\omega^2)}$ da cui $u(x,t)=V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\dfrac{1}{2a\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{a^3\omega^3}\cos\omega(at-x)H(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{a^3\omega^3}H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{t\sin(\omega x)}{a^2\omega^2}-\dfrac{\sin(\omega x)}{a^3\omega^3}\sin(a\omega t)$

$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=A\sin(\lambda t)\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}-\dfrac{aA\lambda}{p(p^2+\lambda^2)}e^{-\frac{x}{a}p}$

da cui $u(x,t)=V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\dfrac{t}{\omega}-\dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)-\dfrac{aA}{\lambda}H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{aA}{\lambda}\cos\lambda(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

p) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=-\dfrac{1}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t)=t-(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

q) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t)=t$

r) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-x-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{x}{p^2}-\dfrac{x}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=xt-xtH(t-\dfrac{x}{a})$

s) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p}$ da cui $u(x,t)=H(t)$

t) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=H(t)-H(t-\dfrac{x}{a})$

u) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=H(t-T) \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-x-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=\dfrac{e^{-pT}}{p} \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x}-\dfrac{a}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x-pT}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t)=\dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2H(t-\dfrac{x}{a})-a(t-\dfrac{x}{a}-T)H(t-\dfrac{x}{a}-T)+(1+tx)H(t)$

Verifichiamo che la $u(x,t)$ trovata soddisfi effettivamente l'equazione data e le sue condizioni iniziali. $u_t(x,t)=a(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2\delta(t-\dfrac{x}{a})-aH(t-\dfrac{x}{a}-T)-a(t-\dfrac{x}{a}-T)\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+tH(t)+(1+tx)\delta(t)=a(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})-aH(t-\dfrac{x}{a}-T)+xH(t)+1$

$u_{tt}(x,t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a(t-\dfrac{x}{a})\delta(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a(t-\dfrac{x}{a})\delta(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)$

$u_x(x,t)=-(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2\delta(t-\dfrac{x}{a})+H(t-\dfrac{x}{a}-T)+(t-\dfrac{x}{a}-T)\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+tH(t)=$

$-(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a})+H(t-\frac{x}{a}-T)+tH(t)$

$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{a}(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a}-T)=\frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a}-T)$
ed appare evidente che $u_{tt}-a^2u_{xx}\equiv 0$. Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo $u(x,0)=H(0)=1$, $u_t(x,0)=xH(0)=x$, $u_x(0,t)=-tH(t)+H(t-T)+tH(t)=H(t-T)$

v) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=1 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=\frac{1}{p} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}-(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3})e^{-\frac{p}{a}x}$

da cui $u(x,t)=t-\frac{1}{2}t^2-\Big((t-\frac{x}{a})-\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})^2\Big)H(t-\frac{x}{a})$

w) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=\delta(t-T) \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-x-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=e^{-pT} \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\frac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x}-\frac{a}{p}e^{-\frac{p}{a}x-pT}+\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t)=\frac{a}{2}(t-\frac{x}{a})^2H(t-\frac{x}{a})-aH(t-\frac{x}{a}-T)+(1+tx)H(t)$

x) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-rt} \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\frac{1}{p+r} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e e la soluzione è $v(x,p)=\frac{1}{p^2(p+r)}-\frac{1}{p^2(p+r)}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{t}{r}-\frac{1}{r^2}+\frac{e^{-rt}}{r^2}-(t-\frac{x}{a})\frac{1}{r}H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{r^2}H(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{r^2}e^{-r(t-\frac{x}{a})}H(t-\frac{x}{a})$

y) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-rx} \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\frac{e^{-rx}}{p} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\frac{e^{-rx}}{p(p^2-a^2r^2)}-\frac{e^{-px/a}}{p(p^2-a^2r^2)}$ da cui $u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{-e^{-rx}}{a^2r^2}+\frac{e^{-rx}}{a^2r^2}\cosh(art)H(t)-\frac{1}{a^2r^2}\cosh(art-rx)H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{a^2r^2}H(t-\frac{x}{a})$

z) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t-\frac{x}{x_0}) \quad x>0, t>0, a>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cos\frac{x}{x_0}-\frac{p}{p^2+\omega^2}\sin\frac{x}{x_0} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=-\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}e^{-px/a}+\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\cos\frac{x}{x_0}-\frac{p}{p^2+\omega^2}\frac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\frac{x}{x_0}$

Si devono distinguere due casi: 1) $\omega \neq \dfrac{a}{x_0}$ e 2) $\omega = \dfrac{a}{x_0}$.

Cominciamo da 1).

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \Big(\frac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\frac{x_0}{a}\sin\frac{a}{x_0}t\Big)H(t-\frac{x}{a})+$$

$$+\frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\cos\frac{x}{x_0}\sin\omega t - \frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\sin\frac{x}{x_0}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\frac{x_0}{a}\cos\frac{x}{x_0}\sin\frac{a}{x_0}t - \frac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\frac{x}{x_0}\cos\frac{a}{x_0}t+$$

Ora esaminiamo il caso in cui $\omega = \dfrac{a}{x_0}$.

$$v(x,p) = \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\cos x\frac{\omega}{a} - \frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\sin x\frac{\omega}{a} - \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}e^{-px/a}$$

da cui $u(x,t) = \Big(-\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t) + \dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t)\Big)\cos x\dfrac{\omega}{a} - \dfrac{t}{2\omega}\sin x\dfrac{\omega}{a}\sin(t\omega) + \Big(\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t - \dfrac{x}{a}) - \dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t - \dfrac{x}{a})\Big)H(t-\dfrac{x}{a})$ ♠♠

105 min. 24–Lezione del 15/11/2021 Equazione di D'Alembert lineare a coefficienti costanti e termine forzante indipendente da $u(x,t)$, esercizi

105 min. 25–Lezione del 16/11/2021 Integrali, pag.42 paragrafo 2) e pag.43 paragrafo 3) delle dispense di Tauraso sugli integrali reali da risolversi coi complessi; poi esercizi

105 min. 26–Lezione del 18/11/2021 Ultimo giorno di lezione per Informatica Esercizi sugli integrali

105 min. 27–Lezione del 22/11/2021 Il testo di riferimento è Fusco, Marcellini, Sbordone, Elementi di Analisi Matematica II (Versione semplificata per i nuovi corsi di laurea)

Da pag.71 a pag.76. Pag.78 (CONDIZIONE SUFFICIENTE) con dimostrazione ma quella da me data è diversa da quella presente nel libro. Al momento Teams non consente, neppure a me, di scaricare la lezione.

105 min. 28–Lezione del 23/11/2021 Esercizi sui punti critici (massimi, minimi, selle). Teorema di Sylvester (solo enunciato)

105 min. 29–Lezione del 25/11/2021 Condizione necessarie per l'esistenza di massimi e minimi. Esercizi sui punti critici (massimi, minimi, selle).

♠ Sia data la funzione $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y^2 - y^4 + x^2 + 2y^2 - x - 1$.

1) Si cerchino i punti di massimo relativo, minimo relativo e selle. Trovare se esistono i punti di massimi assoluto e minimo assoluto.

2) Se il dominio della funzione è $x^2+y^2 \leq 4$, si cerchino i punti di massimo relativo, minimo relativo e selle. Trovare i punti di massimi assoluto e minimo assoluto che certamente esistono

3) Se il dominio è dato dall'insieme $\{(x,y)\colon\ x>0, y>1+x/2\} \cup \{(0,1)\}$ si cerchino i punti di massimo relativo, minimo relativo e selle. Trovare se esistono i punti di massimo assoluto e minimo assoluto

4) Se il dominio è dato dall'insieme $\{(x,y)\colon\ x<-1+y^2, x^2+y^2<1, y\geq 0\} \cup \{(-1,0)\}$ si cerchino i punti di massimo relativo, minimo relativo e selle. Trovare se esistono i punti di massimo assoluto e minimo assoluto. In questo caso bisogna scrivere i termini di ordine tre dello

sviluppo di Taylor

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) = f(\underline{x}_0) + (\underline{\partial} f(\underline{x}_0), \underline{h}) + \frac{1}{2}(\underline{h}, H_2(\underline{x}_0)\underline{h}) +$$
$$+\frac{1}{6}(f_{xxx}(\underline{x}_0)h_1^3 + 3f_{xxy}h_1^2h_2 + 3f_{xyy}h_1h_2^2 + f_{xxx}(\underline{x}_0)h_2^3) + o(\|\underline{h}\|^3)$$

♠

105 min. 30–Lezione del 29/11/2021 Teorema delle funzioni implicite. Del libro pagine 268 (enunciato e dimostrazione fino a dove dice “Per costruzione risulta $f(x_0)=y_0$”. Enunciato a pag.278 e applicazione con $n=2$ a pag.277-278. Enunciato a pag.281. Gli altri esempi del capitolo sono utili esercizi

Estremi vincolati, moltiplicatori di Lagrange. Enunciati a pag. 291, 293.

Il seguente teorema dà condizioni sufficienti, non necessarie, perché un punto critico vincolato sia di massimo, di minimo oppure una sella.

Teorema *Siano $f, g\colon X \to$, $\overset{o}{X} \subset \mathbf{R}^n$ di classe C^2. Se la forma quadratica $\sum_{i,j=1}^n [f_{x_ix_j}(\underline{x}_0) - \lambda^o g_{x_ix_j}(\underline{x}_0)]h_ih_j = (\underline{h}, H(\underline{x}_0)\underline{h})$, ristretta all'insieme dei vettori $\underline{h}$ tangenziali al vincolo in $\underline{x}_0$ ossia $(\underline{\partial} g(\underline{x}_0), \underline{h}) = 0$, è definita negativa (positiva) allora $\underline{x}_0$ è punto di massimo (minimo) forte vincolato della funzione $f(\underline{x})$ alla condizione $g(\underline{x}) = 0$. Se esistono $\underline{h}_1$, e $\underline{h}_2$ tali che $(\underline{h}_1, H(\underline{x}_0)\underline{h}_1) > 0$, e $(\underline{h}_2, H(\underline{x}_0)\underline{h}_2) < 0$, allora $\underline{x}_0$ è di sella*

105 min. 31–Lezione del 30/11/2021 Esercizi sui moltiplicatori di Lagrange. Generalità delle curve nello spazio. Forme differenziali in $\mathbf{R}^3$. Esercizi sugli integrali curvilinei

• Trovare massimi e minimi della funzione $z = f(x,y) = y(x^2+5/4)$ con (x,y) soggetti alla condizione $x^2+y^2=1$.

Prima soluzione Sia $C = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x^2+y^2=1\}$. Un modo di procedere consiste nel parametrizzare la curva $x^2+y^2=1$ con $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ e quindi $f\Big|_C = \sin t(\frac{5}{4}+\cos^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Derivando rispetto a t si può notare che $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(0,-1)$ sono massimi mentre $(0,1)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ e $(1/\sqrt{2}, -\sqrt{3}/2)$ sono minimi.

Inoltre $f(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$, $f(0,-1) = -5/4$, $f(0,1) = 5/4$. I punti $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ sono massimi assoluti mentre $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ minimi assoluti. Gli altri sono estremi relativi.

Si può notare pure, fatto assai importante, che in ciascuno dei punti indicati si ha $\underline{\partial} f(\underline{\gamma}) \cdot \underline{\gamma}' = 0$ e $\underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma}' = 0$ (fatto quest'ultimo vero per ogni t ma riguardante la circonferenza in modo specifico).

Il gradiente di $g(x,y) = x^2+y^2-1$ è $(2x, 2y) = 2(\gamma_1, \gamma_2)$ e quindi nei punti di massimo e minimo locali vincolati si ha $\underline{\partial} f(\underline{x}_0)$ parallelo al gradiente del vincolo $g(x,y)$ purché $\underline{\gamma}'(t) \neq 0$ in quel punto.

Seconda soluzione Si estrae $x^2 = 1-y^2$ dal vincolo e si ottiene $f(x,y) = y(1-y^2+5/4) = -y^3+9y/4 \doteq h(y)$ con $|y| \le 1$.

$$h'(y) = -3y^2 + 9/4 \ge 0 \iff |y| \le 3/4$$

e quindi per $y = -\sqrt{3}/2$ abbiamo un minimo ed un massimo a $y = \sqrt{3}/2$. I punti $(\pm 1/2, -\sqrt{3}/2)$ sono minimi mentre $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$ sono massimi. Agli estremi abbiamo $h(-1,0) = -5/4$ mentre $h(1,0) = 5/4$

Terza soluzione Usare i moltiplicatori di lagrange

$\boxed{\text{Notare che la funzione non vincolata } f(x,y) = y(x^2+5/4) \text{ non ammette punti critici.}}$ ••

♠ Esercizi

• Trovare massimi e minimi della funzione $z = f(x,y) = x + y$ con $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$. ••

Data la funzione $f(x,y) = x^2y + xy^2 + xy$, si trovino i valori di massimo e di minimo soggetti alla condizione $\{xy \geq \frac{1}{16},\ y \geq -x-1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$.

Si trovino i punti di estremo della funzione $f(x,y) = xy$ soggetti alla condizione $x^2 + y^2 = 1$

Si trovino i punti di estremo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetti alla condizione $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Sia data la funzione $f(x,y) = y^2$. Trovare massimi e minimi locali di $f(x,y)$ con (x,y) soggette alla condizione $x^4 + yx^2 - y^2 + 243 = 0$ e stabilirne la natura Si veda qui, compito del primo luglio http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15.html

Si stabilisca la natura dei punti critici della funzione $f(z,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ soggetta alla condizione $xy + xz + yz = 1$.

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x,y) = x$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto (1/4,−1/8) è di massimo assoluto]

Osservazione Ad un certo punto a lezione ho scritto $1 = \lambda(y + 12y)$ invece di $1 + \lambda(y + 12y^2)$ e ciò ha implicato che $\lambda = -13/8$ invece di $\lambda = 16$. In tal modo avrei ottenuto $-16b^2$ invece di $8b^2/13$ e il punto sarebbe stato di massimo. Si dimostri che tale massimo è assoluto.

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x,y) = x + y$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto (2/9,−2/27) è di minimo locale]

Si dimostri che $(e,1,1)$ è un punto critico della funzione $u = f(x,y,z) = x$ soggetta al vincolo $x + y + z - \ln x - \ln y - \ln z = e + 1$. Si verifichi che è un massimo locale (non globale)

Siano $x,y,z \geq 0$ e $x + y + z = 1$. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = x^a y^b z^c$, $a,b,c > 0$. ♠♠

Sull'insieme $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x = z^2,\ y = z^2\}$ trovare il punto $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$ più vicino al punto $(0,0,1)$.

La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di $\mathbf{R}^3$ dal punto $(0,0,1)$ e quindi la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$ mentre l'equazione del vincolo è $\phi_1(\underline{x}) = x - z^2 = 0$, $\phi_2(\underline{x}) = x - z^2 = 0$. La funzione da estremizzare è

$$L(\underline{x}, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - \lambda_1(x - z^2) - \lambda_2(x - z^2)$$

Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2z \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è sempre diverso da zero per cui il rango è due e quindi non esistono punti critici **non regolari.** A questo punto risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \underline{\partial}(f(\underline{x}) - \lambda_1\phi_1(\underline{x}) - \lambda_2\phi_2(\underline{x}) = 0 \\ \phi_1(\underline{x}) = 0, \quad \phi_2(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2x - \lambda_1 = 0, \qquad 2y - \lambda_2 = 0, \quad 2(z-1) + 2z\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ x = z^2, \quad y = z^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\lambda_1}{2}, \quad y = \frac{\lambda_2}{2}, \quad z = \frac{1}{1 + \lambda_1 + \lambda_2} \quad x = y = z^2, \quad \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \quad \frac{\lambda_1}{2} = \frac{1}{(1 + 2\lambda_1)^2}$$

Ne segue $\lambda_1 = 1/2$ da cui $(x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2z \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix}\Big|_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = b = c$$

La matrice hessiana da studiare è

$$\big(L_{\underline{xx}} - \lambda_1(\varphi_1)_{\underline{xx}} - \lambda_2(\varphi_2)_{\underline{xx}}\big)_{(\lambda_1=\lambda_2=1/2,\,(1/4,1/4,1/2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \doteq M$$

e $(a, a, a) \cdot M(a, a, a) = 8a^2 > 0$ quindi un minimo che è assoluto••

Soluzione alternativa Scrivere

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 2z^4+(z-1)^2 \doteq f(z), \qquad f'(z) = 8z^3+2(z-1) = (z-\frac{1}{2})(8z^2+4z+4) \geq 0 \iff z \geq 1/2$$

e quindi $z = 1/2$ è un minimo da cui $f(1/2) = 3/4$. Inoltre $\lim\limits_{z\to\pm\infty} f(z) = +\infty$ per cui $z = 1/2$ corrisponde a un minimo assoluto. ♠♠

• **Esercizio** Sull'insieme $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon y = x^2,\ z = x^2\}$ trovare il punto $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$ più vicino al punto $(0, 0, 1)$.

La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di $\mathbf{R}^3$ dal punto $(0, 0, 1)$ e quindi la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$ mentre l'equazione del vincolo è $\phi_1(\underline{x}) = y - x^2 = 0$, $\phi_2(\underline{x}) = z - x^2 = 0$. La funzione da estremizzare è

$$L(\underline{x}, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - \lambda_1(y - x^2) - \lambda_2(z - x^2)$$

Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è sempre diverso da zero per cui il rango è due e quindi non esistono punti critici **non regolari.** A questo punto risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \underline{\partial}(f(\underline{x}) - \lambda_1\phi_1(\underline{x}) - \lambda_2\phi_2(\underline{x}) = 0 \\ \phi_1(\underline{x}) = 0, \quad \phi_2(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2x(1 + \lambda_1 + \lambda_2) = 0, \quad 2y - \lambda_1 = 0, \quad 2(z - 1) - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2, \quad z = x^2 \end{cases}$$

Si ottengono tre punti $P_1 = (0, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$; $P_\pm = (\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Stabiliamo la natura dei punti critici. La tangenzialità dello spostamento è data da $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque si ha $\begin{cases} -2ax + b = 0 \\ -2ax + c = 0 \end{cases}$ che per ogni x implica $b = c$; inoltre calcolata per $x = 0$ dà $b = c = 0$ e $a \neq 0$.

La matrice hessiana da studiare è $\begin{pmatrix} 2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e nel caso del punto $(0, 0, 0)$ bisogna individuare il segno della forma quadratica

$$(a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2(2b^2 - a^2) = -2a^2 < 0 \text{ per cui è un massimo relativo.}$$

Nel caso dei punti $P_\pm$ abbiamo che la relazione di tangenzialità implica che $b = c \neq 0$ per cui

$$(a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b^2 > 0 \text{ da cui un minimo relativo.}$$

Il massimo trovato non è certamente assoluto in quanto in S esistono chiaramente infiniti punti che distano da $(0,0,1)$ più di quanto disti $(0,0,0)$ ossia 1. Per dimostrare che i due punti di minimo sono assoluti, poniamo $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le r$ con $r > 2$ e indichiamo $S_r = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : y = x^2, z = x^2, \|\underline{x}\| \le r\}$ per compattezza e grazie al teorema di Weierstrass, massimo e minimo assoluti esistono esistono e i due punti $P_\pm$ sono certamente di minimo relativo. Dobbiamo analizzare la distanza fra $(0,0,1)$ e il bordo di S_r. Essendo tale distanza superiore a quella fra $(0,0,1)$ e $P_\pm$ possiamo dire che $P_\pm$ sono punti di minimo assoluti e rimangono tali se si passa all'insieme S

Anche qui si poteva agire nel seguente modo

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + x^4 + (x^2-1)^2 = 2x^4 - x^2 + 1 \doteq f(x), \qquad f'(x) = 8x^3 - 2x \ge 0$$
$$\iff \quad -1/2 \le x \le 0, x \ge 1/2$$

Inoltre $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e quindi i minimi sono assoluti ma il massimo no ••

♠ Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x,y) = y$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura.

Svolgimento Innanzitutto ossrviamo che per ogni $y_0 \in \mathbf{R}$, l'equazione $x^3 + xy_0 + y_0^2 = 0$ ha soluzione in x. Ciò accade in quanto $h(x) = x^3 + ax + a^2$ va da $-\infty$ a $+\infty$ ed è continua per cui interseca l'asse delle ordinate. Ciò implica che la funzione $f(x,y) = y$ non ammette né massimo né minimo assoluto. Per cercare i massimi e minimi locali formiamo la funzione $F(x,y,\lambda) = y - \lambda(x^3 + xy + y^2)$ e risolviamo il sistema

$$F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_\lambda = 0$$

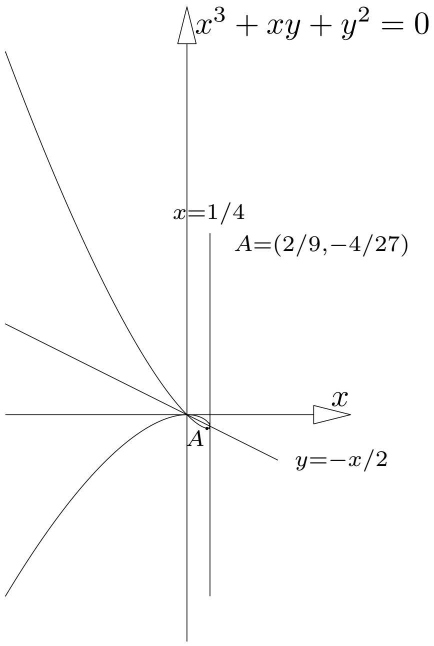
e viene fuori che $x_0 = 2/9$, $y_0 = -4/27$, $\lambda_0 = -27/2$. Per saperne di più usiamo il teorema sopra e costruiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Big|_{\underline{x}_0,\lambda_0} = \frac{27}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \doteq A$$

Il gradiente di $x^3 + xy + y^2$ è $(3x^2 + y, x + 2y)$ e calcolato in $\underline{x}_0$ dà $(0, -2/27)$. La relazione $(0,-2/27)\cdot(a,b) = 0$ comporta $b = 0$ per cui dobbiamo studiare la forma quadratica $(\underline{v}, A\underline{v})$ dove $\underline{v}$ è un vettore del tipo $(a,0)$ con $a \in \mathbf{R}$. Si ottiene $(\underline{v}, A\underline{v}) = 54a^2/3 > 0$ per ogni a non nulla. Ne segue che il punto $\underline{x}_0$ è di minimo vincolato.

Si poteva pure rispondere tracciando il grafico della funzione di y definita da $x^3 + xy + y^2 = 0$ e ritrovare le conclusioni del primio esercizio. Si scrive

$$y = \frac{-x \pm |x|\sqrt{1-4x}}{2}$$



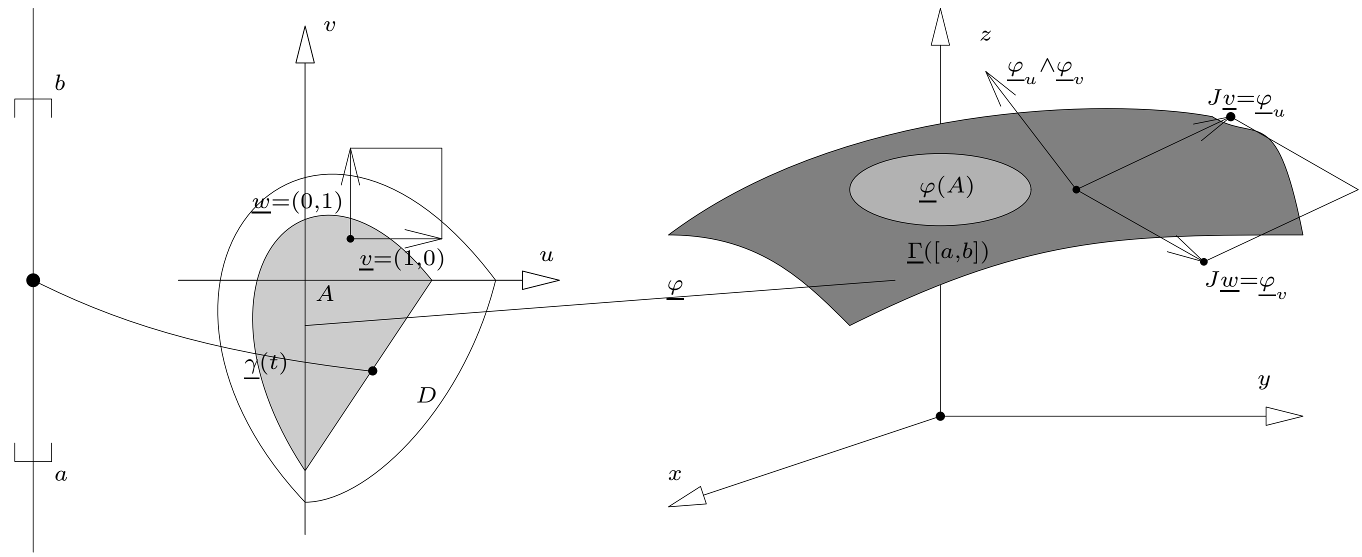
♠♠

105 min. 32–Lezione del 02/12/2021 Esercizi sulle forme differenziali in $\mathbf{R}^3$. Nozione di forma chiusa e esatta in $\mathbf{R}^3$.

105 min. 33–Lezione del 06/12/2021 Teorema di Stokes e Gauss.

105 min. 34–Lezione del 07/12/2021 Esercizi sui Teoremi di Stokes e Gauss.

Sia $D\subset\mathbf{R}^2$ compatto $D=\overline{B}$ con B aperto e connesso. $\underline{\varphi}\colon D\to\mathbf{R}^3$ è una superficie regolare di equazioni parametriche $\underline{\varphi}(u,v)=\begin{cases}x=\varphi^1(u,v)\\ y=\varphi^2(u,v)\\ z=\varphi^3(u,v)\end{cases}$ .Sia $A=\overset{\circ}{A}$ un aperto tale che $\overline{A}\subset\overset{\circ}{D}$ e ∂A è una curva regolare. Sia $S=\underline{\varphi}(A)$. Chiameremo *bordo di S* l'immagine secondo $\underline{\varphi}$ della frontiera di A ossia $\partial S=\underline{\varphi}(\partial A)$. Sia $\underline{\gamma}\colon[a,b]\to\mathbf{R}^2$ una curva il cui sostegno è ∂A e orienta ∂A positivamente. La curva $\underline{\Gamma}=\underline{\varphi}\circ\underline{\gamma}\colon[a,b]\to\mathbf{R}^3$ ha come sostegno ∂S. Si dice che Γ orienta positivamente ∂S e si indica con ∂^+S il cammino individuato da Γ. Se $\underline{\gamma}(t)=\begin{cases}u=u(t)\\ v=v(t)\end{cases}$ la curva Γ ha equazioni $\begin{cases}x=\varphi^1(u(t),v(t))\\ y=\varphi^2(u(t),v(t))\\ z=\varphi^3(u(t),v(t))\end{cases}$ I vettori $\underline{a}(t)\in\mathbf{R}^2$ e $\underline{b}(t)\in\mathbf{R}^2$ sono rispettivamente i vettori, normalizzati a uno, tangente e ortogonale a ∂A in modo tale che $\underline{\gamma}$ orienti positivamente ∂A. $\underline{a}(t)\overset{\text{def}}{=}(a_1,a_2)=\dfrac{(u'(t),v'(t))}{\sqrt{(u')^2+(v')^2}}$ e $\underline{b}(t)=(b_1,b_2)=\dfrac{(v'(t),-u'(t))}{\sqrt{(u')^2+(v')^2}}$. La matrice $\begin{pmatrix}\varphi^1_u & \varphi^1_v\\ \varphi^2_u & \varphi^2_v\\ \varphi^3_u & \varphi^3_v\end{pmatrix}$ applicata ai vettori di $\mathbf{R}^2$ ci fornisce la loro immagine in $\mathbf{R}^3$ sotto la parametrizzazione della superficie ossia i due vettori $\begin{pmatrix}\varphi^1_u & \varphi^1_v\\ \varphi^2_u & \varphi^2_v\\ \varphi^3_u & \varphi^3_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\underline{t}$ e $\begin{pmatrix}\varphi^1_u & \varphi^1_v\\ \varphi^2_u & \varphi^2_v\\ \varphi^3_u & \varphi^3_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\underline{\tau}$. Sia $\underline{n}_e$ la normale esterna che è definita come quella normale (delle due possibili $\underline{n}\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v\|}$ e $-\underline{n}$) tale che $(\underline{\tau}\wedge\underline{t})\cdot\underline{n}_e>0$

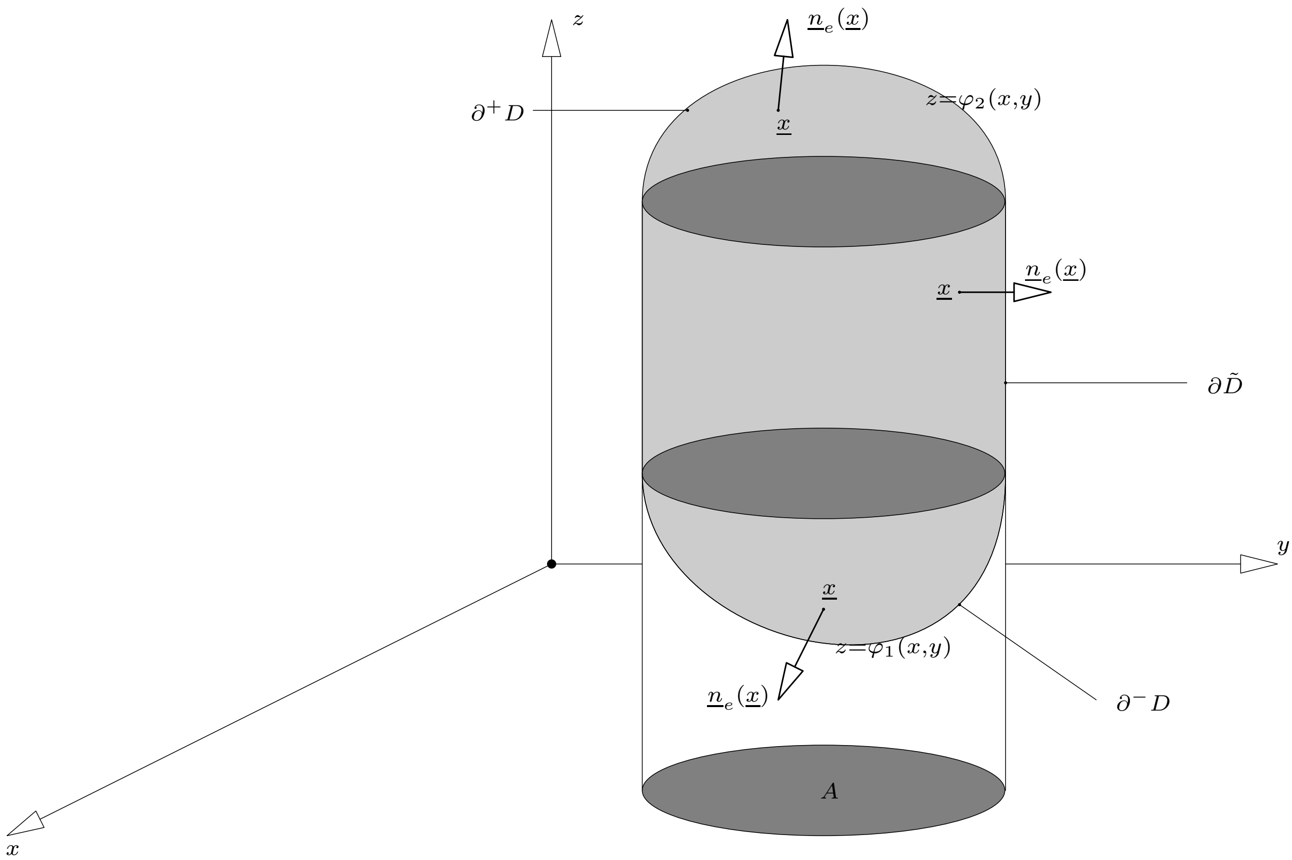


Sia ora $\underline{V}(\underline{x}) = P(\underline{x})\underline{i} + Q(\underline{x})\underline{j} + R(\underline{x})\underline{k}$ un campo vettoriale al quale è associata la forma differenziale $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Abbiamo il seguente importante teorema

Teorema 8.6 (di Stokes) *Sia S una superficie di classe C^2. Allora* $\displaystyle\iint_S (\underline{rot V}, \underline{n}_e)d\sigma = \int_{\partial^+ S} \omega$

Teorema di Gauss *In riferimento alla figura sottostante si ha*

$$\iint_{\partial^+ D} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e)d\sigma + \iint_{\partial^- D} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e)d\sigma + \iint_{\partial \tilde{D}} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e)d\sigma = \iiint div\underline{V}(\underline{x})dxdydz$$



♠ Sia S la superficie piramidale ottenuta unendo i quattro punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (-1, -1, 4)$, $D = (0, 1, 1)$, al punto $E = (0, 0, 5)$. Siano ABE, ADE, CDE, CBE, le quattro superfici (triangoli) ottenute. La terza componente della normale esterna alla superficie totale (l'unione dei quattro triangoli) deve essere tale che sia positiva su ABE e CBE e negativa su ADE e CDE. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = z\underline{i} + y\underline{j} - z\underline{k}$.

Svolgimento

$\boxed{\text{Flusso attraverso la superficie } ABE.}$

$\vec{AE} = (-1,-1,5)$, $\vec{BE} = (0,-2,5)$ $\vec{AE}\wedge\vec{BE} = 5\underline{i}+5\underline{j}+2\underline{k}$ per cui il piano passante per i punti A,B, ed E ha equazione $5x+5y+2z=10$, $\;z = 5-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{5}{2}y$. La normale esterna, detta $\underline{n}^{(e)}$, soddisfa $\underline{n}^{(e)}\cdot\|\underline{n}^{(2)}\| \doteq \underline{v}^{(e)} = (5/2,5/2,1)$

$$(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v}^{(e)}) = \frac{5z}{2}+\frac{5y}{2}-z = \frac{3z}{2}+\frac{5y}{2} = \frac{3}{2}\left(5-\frac{5x}{2}+\frac{5y}{2}\right)+\frac{5y}{2} = \frac{15}{2}-\frac{15x}{4}-\frac{15y}{4}+\frac{5y}{2} = \frac{15}{2}-\frac{15x}{4}-\frac{5y}{4}$$

Dobbiamo calcolare $\displaystyle\iint(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1}d\sigma$. La parametrizzazione della superficie ABE è $(x,y,5-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{5}{2}y)$ con $0\le x\le 1$, $x\le y\le 2x$ che è contenuta all'interno dei tre segmenti

$$(t,t,0), 0\le t\le 1, \qquad (t,2-t,0), 0\le t\le 1, \qquad (0,t,0), 0\le t\le 2$$

Il primo segmento congiunge i punti $(0,0)$ e $(1,1)$ ed è la proiezione sul piano (x,y) del segmento AE che giace nello spazio (x,y,z). Basta scrivere in forma parametrica il segmento AE ossia $\lambda(0,0,5)+(1-\lambda(1,1,0) = (1-\lambda,1-\lambda,5\lambda)$, $0\le\lambda\le 1$ e osservare che $x=y$.

Il secondo segmento passa per i punti $(1,1,0)$ e $(0,2,0)$ e sono gli estremi del segmento appartenente sia al piano ABE che al piano (x,y) per cui basta porre $\;5-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{5}{2}y = 0$ ossia $y=2-x$

Il terzo segmento è la proiezione sul piano (x,y) del segmento congiungente i punti E e B. Il segmento EB ha equazione parametrica $(0,2\lambda,5(1-\lambda)$ e la sua proiezione ha equazione $(0,2\lambda)$, $0\le\lambda\le 1$.

Quindi

$$\iint(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1}d\sigma = \int_0^1 dx\int_x^{2-x}\left[\frac{15}{2}-\frac{15x}{4}-\frac{5y}{4}\right]dy = \int_0^1 dx =$$
$$= \int_0^1\left[\frac{15(2-2x)}{2}-\frac{15x(2-2x)}{4}-\frac{5((2-x)^2-x^2)}{4}\right]dx = \int_0^1\left[10-\frac{35x}{2}+\frac{15x^2}{2}\right]dx = 5$$

$\boxed{\text{Flusso attraverso la superficie } ADE.}$

$\vec{AE} = (-1,-1,5)$, $\vec{DE} = (0,-1,4)$ $\vec{AE}\wedge\vec{DE} = \underline{i}+4\underline{j}+\underline{k}$ per cui il piano passante per i punti A,D, ed E ha equazione $x+4y+z=5$. La normale esterna, detta $\underline{n}^{(e)}$, soddisfa $\underline{n}^{(e)}\cdot\|\underline{n}^{(2)}\| \doteq \underline{v}^{(e)} = (-1,-4,-1)$ (deve essere diretta verso il basso quindi la terza componente negativa) $\;(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v}^{(e)}) = -z-4y+z = -4y$. Dobbiamo calcolare $\displaystyle\iint(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1}d\sigma$. La parametrizzazione della superficie ADE è $\;(x,y,5-x-4y)$ con $0\le x\le 1$, $x\le y\le 1$ che è contenuta all'interno dei tre segmenti

$$(t,t,0), 0\le t\le 1, \qquad (t,1,0), 0\le t\le 1, \qquad (0,t,0), 0\le t\le 1$$

Il primo segmento è esattamente come prima

Il secondo segmento passa per i punti $(1,1,0)$ e $(0,1,0)$ ed è la proiezione sul piano (x,y) del segmento AD. L'equazione parametrica del segmento AD è $(\lambda,1,1-\lambda)$ e la sua proiezione sul piano (x,y) ha evidentemente equazione $y=1$.

Il terzo segmento è la proiezione sul piano (x, y) del segmento congiungente i punti E e D. Il segmento ED ha equazione parametrica $(0, 1-\lambda, 1+4\lambda)$ e la sua proiezione ha equazione $(0, 1-\lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$.

Quindi

$$\iint (\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1} d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^1 (-4y) = \frac{-4}{3}$$

$\boxed{\text{Flusso attraverso la superficie } CDE.}$ $\vec{CE} = (1,1,1)$ $\vec{DE} = (0,-1,4)$ $\vec{CE} \wedge \vec{DE} = 5\underline{i} - 4\underline{j} - \underline{k}$ per cui il piano passante per i punti C,D, ed E ha equazione $z = 5x - 4y + 5$. La normale esterna, detta $\underline{n}^{(e)}$, soddisfa $\underline{n}^{(e)} \cdot \|\underline{n}^{(2)}\| \doteq \underline{v}^{(e)} = (5, -4, -1)$

$$(\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}^{(e)}) = 5z - 4y + z = 6z - 4y = 6(5x - 4y + 5) - 4y = 30x - 28y + 30$$

Dobbiamo calcolare $\displaystyle\iint (\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1} d\sigma$. La parametrizzazione della superficie CDE è $(x, y, 5x - 4y + 5$ con $-1 \le x \le 0$, $x \le y \le 2x + 1$ che è contenuta all'interno dei tre segmenti

$$(t, t, 0), -1 \le t \le 0, \qquad (t, 2t+1, 0), -1 \le t \le 0, \qquad (0, t, 0), 0 \le t \le 1$$

Il primo segmento congiunge i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$ ed è la proiezione sul piano (x, y) del segmento CE che giace nello spazio (x, y, z). Basta scrivere in forma parametrica il segmento CE ossia $(-\lambda, -\lambda, 5-\lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$ e osservare che $x = y$.

Il secondo segmento passa per i punti $(-1, -1, 0)$ e $(0, 1, 0)$ ed è la proiezione sul piano (x, y) del segmento CD nello spazio tridimensionale. IL segmento CD ha equazione parametrica $(-\lambda, 1-2\lambda, 1+3\lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$ per cui la proiezione sul piano (x, y) ha rappresentazione $(-\lambda, 1-2\lambda, 0)$, $0 \le \lambda \le 1$

Il terzo segmento è la proiezione sul piano (x, y) del segmento congiungente i punti E e D. Il segmento ED ha equazione parametrica $(0, \lambda, 5-4\lambda)$ e la sua proiezione ha equazione $(0, \lambda)$, $0 \le \lambda \le 1$.

Quindi

$$\iint (\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1} d\sigma = \int_{-1}^0 dx \int_x^{2x+1} [30x - 28y + 30]\, dy =$$

$$= \int_{-1}^0 dx \left[30x(x+1) - \frac{28}{2}(3x^2 + 4x + 1) + 30(x+1)\right] = \int_{-1}^0 dx \left[-12x^2 + 4x + 16\right] = -4 - 2 + 16 = 10$$

$\boxed{\text{Flusso attraverso la superficie } BCE.}$

$\vec{BE} = (0, -2, 5)$, $\vec{CE} = (1, 1, 1)$ $\vec{BE} \wedge \vec{CE} = -7\underline{i} + 5\underline{j} + 2\underline{k}$ per cui il piano passante per i punti A,D, ed E ha equazione $-7x + 5y + 2z = 10$. La normale esterna, detta $\underline{n}^{(e)}$, soddisfa $\underline{n}^{(e)} \cdot \|\underline{n}^{(2)}\| \doteq \underline{v}^{(e)} = (-7/2, 5/2, 1)$ (deve essere diretta verso l'alto quindi la terza componente positiva) $(\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}^{(e)}) = \dfrac{-7z}{2} + \dfrac{5y}{2} - z = \dfrac{-9z}{2} - \dfrac{5y}{2}$. Dobbiamo calcolare $\displaystyle\iint (\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1} d\sigma$.

La parametrizzazione della superficie BCE è $(x, y, 5 + \dfrac{7x}{2} - \dfrac{5y}{2})$ con $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 3x + 2$ che è contenuta all'interno dei tre segmenti

$$(t, t, 0), -1 \le t \le 0, \qquad (t, 3t+2, 0), -1 \le t \le 0, \qquad (0, t, 0), 0 \le t \le 2$$

Il primo segmento è esattamente come prima

Il secondo segmento passa per i punti $(-1,-1,0)$ e $(0,2,0)$ ed è la proiezione sul piano (x,y) del segmento BC. L'equazione parametrica del segmento BC è $(-\lambda, 2-3\lambda, 4\lambda)$ $0\le\lambda\le 1$ e la sua proiezione sul piano (x,y) ha evidentemente equazione $y=2+3x$.

Il terzo segmento è la proiezione sul piano (x,y) del segmento congiungiente i punti E e B. Il segmento EB ha equazione parametrica $(0,2\lambda,5(1-\lambda))$ e la sua proiezione ha equazione $(0,2\lambda)$, $0\le\lambda\le 1$.

Quindi

$$\iint (\underline{F}(\underline{x}),\underline{v}^{(e)})\|\underline{v}^{(e)}\|^{-1}d\sigma=\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{3x+2}\frac{-9}{2}(\frac{7x}{2}-\frac{5y}{2}+5)-\frac{5y}{2}=$$
$$=\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{3x+2}\left[\frac{55y}{2}-\frac{63x}{4}-\frac{45}{2}\right]=\frac{-38}{3}$$

in quanto

$$\int_{-1}^{0}\frac{-63x}{4}(2x+2)dx=\frac{-63}{4}(\frac{2}{3}-1)=\frac{21}{4}$$
$$\int_{-1}^{0}\frac{55}{4}\frac{1}{2}(8x^2+12x+4)dx=\frac{55}{8}(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4)=\frac{55}{12}$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{-45}{2}(2x+2)dx=-45(\frac{-1}{2}+1)=\frac{-45}{2}\qquad\qquad \frac{-45}{2}+\frac{55}{12}+\frac{21}{4}=\frac{-270+55+63}{12}=\frac{-152}{12}=\frac{-38}{3}$$

Sommando i quattro contributi abbiamo $-5+\dfrac{4}{3}-10+\dfrac{38}{3}=1$

Per la dimostrazione che fa uso del Teorema di Gauss si veda il giornale dell'anno accademico 2020/2021 a pag.52 ♠♠

105 min. 35–Lezione del 09/12/2021 Successioni di funzioni. Capitolo 1 del libro fino a pag.8 fino a "Passiamo ora...".

105 min. 36–Lezione del 13/12/2021 Serie di funzioni, serie di potenze, serie di Fourier

105 min. 37–Lezione del 14/12/2021 Serie di Fourier ed esercizi

105 min. 38–Lezione del 16/12/2021. Ultimo giorno di lezione Esercizi su argomenti vari