Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
19–02–2022 A.A. 2021/2022, Secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (10 punti) Si calcoli l'area $|S|$ della superficie definita da $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x = \gamma_1(t) = 2t - t^3,\ y = \gamma_2(t) = \sqrt{6}t^2,\ 0 \le t \le 3, \quad |z| \le 12x + 2\sqrt{6}y\}$ [Si tenga presente che $\int_0^1 (48t^3 - 36t^5 + 36t^4 + 48t + 24t^2)dt = \frac{226}{5}$ $\int_1^2 (48t^3 - 36t^5 + 36t^4 + 48t + 24t^2)dt = \frac{766}{5}$, $\int_2^3 (48t^3 - 36t^5 + 36t^4 + 48t + 24t^2)dt = \frac{-7094}{5}$]

1.1) (7 punti) Per $t \in [0,3]$ sia $P_t = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$, e per ogni punto (di coordinate $(\xi, \eta, 0)$) del segmento che unisce l'origine $(0,0,0)$ e P_t conduciamo un segmento verticale di altezza $|12\xi + 2\sqrt{6}\eta|$. Al variare di t definiamo così un insieme V di cui vogliamo il volume $|V|$ [Suggerimento: cimentarsi solo se avanza tempo]

2) (12 punti) Sia data la funzione $f(t)$ che vale t per $0 \le t \le 1$, vale 1 per $t \ge 1$. Si risolva la seguente equazione differenziale (A e B costanti)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Axf(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}), \quad x, t > 0 \quad a > 0, A \in \mathbf{R}\backslash 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = B \cdot t, \quad B \in \mathbf{R}\backslash 0, \end{cases}$$

[Nella soluzione della non omogenea per *v(x,p)*, si provi la funzione $c\ x \exp(-(px)/a) + d\ x^2 \exp(-(px)/a)$, *c*,*d* costanti]

2.1) (3 punti) Calcolare $u_t(a,2)$ ricordando che $f(x)\delta(x-a) = f(a)$

3) (11 punti) **Solo per Informatica**

Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{-e^x(e^y-1)dx}{(e^x-1)^2 + (e^y-1)^2}dx + \dfrac{e^y(e^x-1)}{(e^x-1)^2+(e^y-1)^2}dy$. Si calcoli nell'ordine:

1) $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}_1} \omega$ dove $\underline{\gamma}_1$ è una curva regolare semplice che collega i due punti di coordinate $A \equiv (\ln\frac{3}{2}, \ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})$, e $B \equiv (0, \sqrt{2}\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})$, da A verso B ed il cui sostegno è l'ellisse $\dfrac{x^2}{2(\ln\frac{3}{2})^2} + \dfrac{y^2}{2(\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

2) $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}_2} \omega$ dove $\underline{\gamma}_2$ è una curva regolare semplice che collega i due punti di coordinate $A \equiv (\ln\frac{3}{2}, \ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})$, e $C \equiv (0, -\sqrt{2}\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})$, da A verso C ed il cui sostegno è l'ellisse $\dfrac{x^2}{2(\ln\frac{3}{2})^2} + \dfrac{y^2}{2(\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2} = 1$. La curva è percorsa in senso antiorario

3) $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}_3} \omega$ dove $\underline{\gamma}_3$ è una curva regolare semplice che collega il punto di coordinate $A \equiv (\ln\frac{3}{2}, \ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})$, con se stesso dopo un giro intorno all'origine in senso antiorario ed il cui sostegno è l'ellisse

$\dfrac{x^2}{2(\ln\frac{3}{2})^2}+\dfrac{y^2}{2(\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2}=1$

4) $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}_4}\omega$ dove γ è una curva regolare semplice che collega i quattro punti di coordinate $A\equiv(\ln\dfrac{3}{2},\ln\dfrac{2-\sqrt{3}}{2})$, $B\equiv(0,\sqrt{2}\ln\dfrac{2-\sqrt{3}}{2})$, $C\equiv(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\dfrac{2-\sqrt{3}}{2})$, $D=(2\ln\dfrac{3}{2},0)$ secondo le modalità : da A verso B con sostegno l'ellisse $\dfrac{x^2}{2(\ln\frac{3}{2})^2}+\dfrac{y^2}{2(\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2}=1$, da B verso C con sostegno l'asse delle ordinate, da C a D con sostegno l'ellisse $\dfrac{x^2}{4(\ln\frac{3}{2})^2}+\dfrac{2y^2}{(\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2}=1$

3) (11 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Si trovino i punti di estremo della funzione $f(x,y,z)=x+y+z$ soggetta alle condizioni (vincoli) $x-y-z=0$ e $x^2+y^2+z^2=6$ e se ne stabilisca la natura.

Regole per lo svolgimento e la consegna in presenza

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.

3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle precedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile

4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.

6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Regole per lo svolgimento e la consegna da remoto

1) Munirsi di una telecamera che deve essere posizionata di lato alle vostre spalle e inquadrare: i) la vostra persona ii) il supporto su cui siete appoggiati per scrivere iii) l'eventuale schermo (unico) posto davanti a voi

2) UN SOLO file (pdf o jpeg o jpg) 2) Controllare che le pagine non siano sfocate 3) Controllare che le pagine non siano ruotate le une rispetto alle altre 4) Scrivere in modo leggibile

3) Per unire più file esistono dei programmi online

4) **Il file va spedito entro le tre ore dall'inizio a perfetti@uniroma2.eu e non ci sono vincoli sull'orario di spedizione. Non sono possibili deroghe per non creare disparità con chi svolge il compito in presenza**

5) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

6) Il vostro file deve essere così nominato: **cognome-nome-matricola-19-02-2022-Elettronica(o Internet o Informatica)**

7) Chi svolge il compito da remoto e intende ritirarsi spedisca (anche in foto) il presente foglio a perfetti@uniroma2.eu scrivendo nome, cognome, matricola e la parola "ritirato/a";

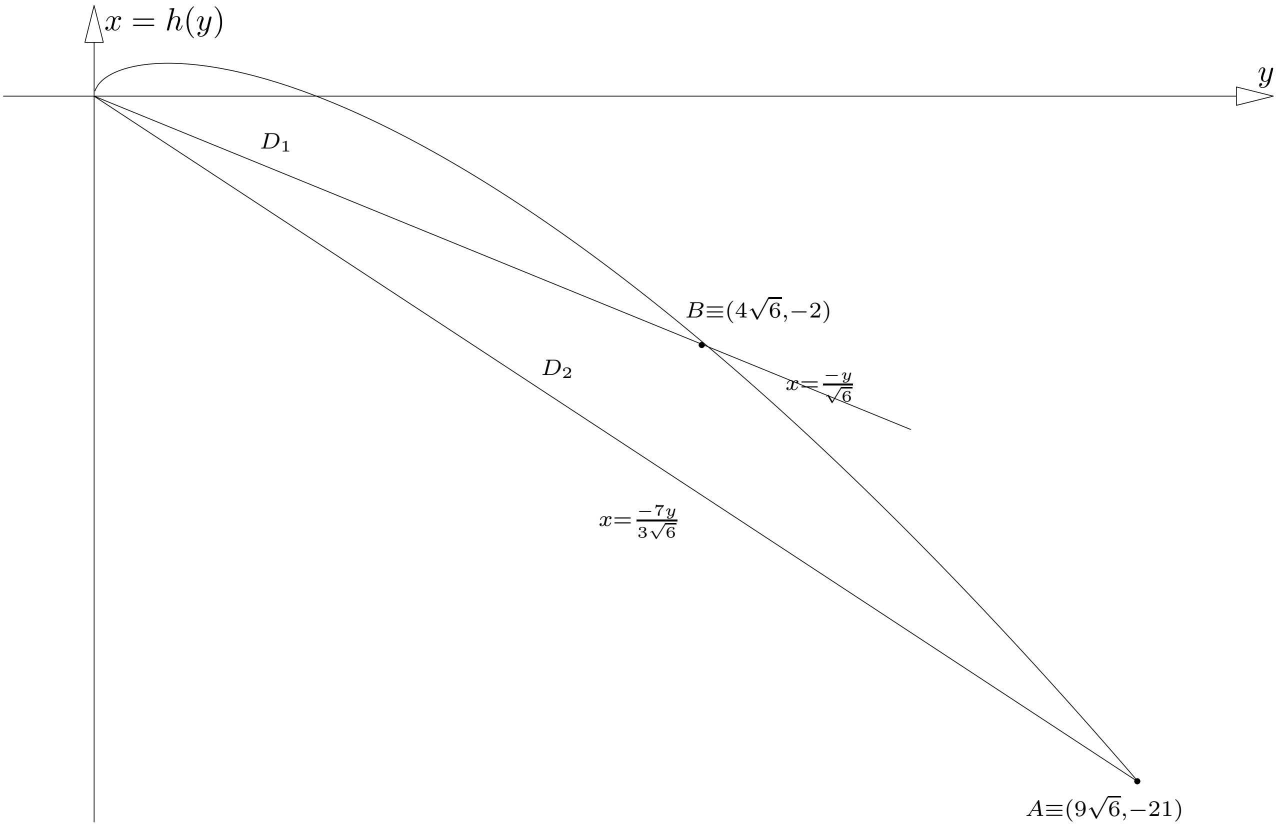
Soluzioni

1) Integriamo per fili. Essendo $|z|$ non negativa deve essere $12\gamma_1(t)+2\sqrt{6}\gamma_2(t)\geq 0$ da cui $12t(-t^2+t+2)\geq 0 \iff -1\leq t\leq 2$ per cui solo l'intervallo $0\leq t\leq 2$ ci interessa. Inoltre se $z\geq 0$ abbiamo $0\leq z\leq 12\gamma_1(t)+2\sqrt{6}\gamma_2(t)$ ma se $z<0$ abbiamo $0\leq -z\leq 12\gamma_1(t)+2\sqrt{6}\gamma_2(t)$ per cui gli integrali che cerchiamo sono

$$\int_0^2 \sqrt{(\dot\gamma_1)^2+(\dot\gamma_2)^2}dt\int_0^{12t(-t^2+t+2)}dz+\int_0^2 \sqrt{(\dot\gamma_1)^2+(\dot\gamma_2)^2}dt\int_{-12t(-t^2+t+2)}^0 dz=$$
$$=2\int_0^2 \sqrt{(\dot\gamma_1)^2+(\dot\gamma_2)^2}2\cdot 12t(-t^2+t+2)dt$$

$$2\int_0^2(3t^2+2)(24t-12t^3+12t^2)dt=2\frac{992}{5}=\frac{1984}{5}$$

1.1) Integriamo sempre per fili e l'integrale che cerchiamo è $2\iint_{D_1}(12x+2\sqrt{6}y)dx\,dy$ dove D_1 è la proiezione sul piano (x,y) dell'insieme V. Per capire chi è V riscriviamo γ_2 nella forma $t=\sqrt{y}/6^{\frac14}$ e sostituendo in γ_1 si ottiene $x=\dfrac{2\sqrt{y}}{6^{\frac14}}-\dfrac{y^{\frac32}}{6^{\frac34}}\doteq h(y)$, $0\leq y\leq 4\sqrt{6}$ che corrisponde al valore $t=2$.



Le proiezioni sul piano (x,y) dei punti di V stanno dentro la figura delimitata da $h(y)$ e la retta $x=\dfrac{-y}{\sqrt{6}}$ e l'integrale che cerchiamo è

$$2\iint_{D_1}(12x+2\sqrt{6}y)dx\,dy=\int_0^{4\sqrt{6}}dy\int_{\frac{-y}{\sqrt{6}}}^{\frac{2\sqrt{y}}{6^{\frac14}}-\frac{y^{\frac32}}{6^{\frac34}}}(12x+2\sqrt{6}y)dx=\frac{4224}{35}$$

2) $f(t) = tH(t) - (t-1)H(t-1)$. In trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$a^2 v_{xx} - p^2 v = -Axe^{\frac{-px}{a}}\mathcal{L}(f) = Axe^{\frac{-px}{a}}\left(\frac{-1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2}\right), \quad v_x = \frac{B}{p^2} \tag{1}$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x,t) = dxe^{\frac{-px}{a}} + hx^2 e^{\frac{-px}{a}}$

$$a^2 R_{xx} = dxp^2 e^{\frac{-px}{a}} - 2adpe^{\frac{-px}{a}} + 2a^2 he^{\frac{-px}{a}} + p^2 hx^2 e^{\frac{-px}{a}} - 4hapxe^{\frac{-px}{a}}$$

che inserita nella equazione (1) dà

$$\begin{aligned} &dxp^2 e^{\frac{-px}{a}} - 2adpe^{\frac{-px}{a}} + 2a^2 he^{\frac{-px}{a}} + p^2 hx^2 e^{\frac{-px}{a}} - 4hapxe^{\frac{-px}{a}} + \\ &- p^2 dxe^{\frac{-px}{a}} - p^2 hx^2 e^{\frac{-px}{a}} = Axe^{\frac{-px}{a}}\left(\frac{-1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2}\right), \end{aligned}$$

ossia

$$-2adp + 2a^2 h - 4hapx = Ax\left(\frac{-1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2}\right) \implies \begin{cases} ah = dp \\ -4ahp = A\left(\dfrac{-1}{p^2} + \dfrac{e^{-p}}{p^2}\right) \end{cases}$$

$d = A\left(\dfrac{1}{4p^4} - \dfrac{e^{-p}}{4p^4}\right)$, $h = \dfrac{A}{a}\left(\dfrac{1}{4p^3} - \dfrac{e^{-p}}{4p^3}\right)$

La soluzione è

$$v(x,p) = \alpha e^{\frac{-px}{a}} + Ax\left(\frac{1}{4p^4} - \frac{e^{-p}}{4p^4}\right)e^{\frac{-px}{a}} + \frac{Ax^2}{a}\left(\frac{1}{4p^3} - \frac{e^{-p}}{4p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}}$$

$$v_x(0,p) = \frac{-p\alpha}{a} + A\left(\frac{1}{4p^4} - \frac{e^{-p}}{4p^4}\right) = \frac{B}{p^2} \implies \alpha = \frac{-aB}{p^3} + aA\left(\frac{1}{4p^5} - \frac{e^{-p}}{4p^5}\right)$$

quindi

$$v(x,p) = \left[\frac{-aB}{p^3} + aA\left(\frac{1}{4p^5} - \frac{e^{-p}}{4p^5}\right)\right]e^{\frac{-px}{a}} + Ax\left(\frac{1}{4p^4} - \frac{e^{-p}}{4p^4}\right)e^{\frac{-px}{a}} + \frac{Ax^2}{a}\left(\frac{1}{4p^3} - \frac{e^{-p}}{4p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}}$$

Sia $\hat{t} = t - x/a$

$$\begin{aligned} u(x,t) = &-\frac{aB}{2}\hat{t}^2 H(\hat{t}) + \frac{aA}{96}\left[\hat{t}^4 H(\hat{t}) - (\hat{t}-1)^4 H(\hat{t}-1)\right] + \frac{Ax}{24}\left[\hat{t}^3 H(\hat{t}) - (\hat{t}-1)^3 H(\hat{t}-1)\right] + \\ &+ \frac{Ax^2}{8a}\left[\hat{t}^2 H(\hat{t}) - (\hat{t}-1)^2 H(\hat{t}-1)\right] \end{aligned}$$

2.1) $\left((\hat{t})^k H(\hat{t})\right)_t\Big|_{t=2,x=a} = k\hat{t}^{k-1}H(\hat{t}) + \hat{t}^k\delta(\hat{t})\Big|_{t=2,x=a} = k\hat{t}^{k-1}H(\hat{t})\Big|_{t=2,x=a} = k$

$\left((\hat{t}-1)^k H(\hat{t}-1)\right)_t = k(\hat{t}-1)^{k-1}H(\hat{t}-1)\Big|_{t=2,x=a} = 0$

$u_t(a,2) = -aB + \dfrac{aA}{24} + \dfrac{aA}{8} + \dfrac{Aa}{4} = -aB + \dfrac{5Aa}{12}$

3) Solo per Informatica Il dominio della forma (chiusa) è $\mathbf{R}^2\backslash\{0,0\}$. La forma è chiusa ma non esatta. Basta scrivere $e^x = 1+\varepsilon\cos t$, $e^y = 1+\varepsilon\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, $|\varepsilon| < 1$ $|\varepsilon| < 1$ è necessaria in quanto altrimenti sarebbe impossibile soddisfare $e^x = 1+\varepsilon\cos t$, oppure $e^y = 1+\varepsilon\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, posto che $e^\alpha > 0$ sempre. Lo si vedere anche scrivendo $x = \ln(1+\varepsilon\cos t)$, e $y = \ln(1+\varepsilon\sin t)$. Otteniamo

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\varepsilon^2 S^2+\varepsilon^3 S^2 C}{\varepsilon^2(1+\varepsilon C)}+\frac{\varepsilon^2 C^2+\varepsilon^3 C^2 S}{\varepsilon^2(1+\varepsilon S)}\right)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Conviene scrivere direttamente il potenziale nell'insieme $\mathbf{R}^2\backslash\{x=0, y<0\}$

$$U(x,y) = \begin{cases} \arctan\dfrac{e^y-1}{e^x-1}, & x>0, \\ \pi+\arctan\dfrac{e^y-1}{e^x-1}, & x<0, \\ \pi/2, & x=0, y>0 \end{cases}$$

1). $\ln\dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \doteq y_0 < 0$

$$\int_{\underline{\gamma}_1}\omega = U(B)-U(A) = \lim_{\underline{x}\to B} U(x,y) - \arctan\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)}\arctan\frac{e^y-1}{e^x-1}+\arctan\sqrt{3} =$$
$$= \frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{6}$$

Sulla liceità dell'uso del limite in B di $U(x,y)$ si veda qui (pag.6)
http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/analisi-II-elettronica&internet+informatica-18-19/ Appello-21-01-2019-Elettronica-Internet-Informatica.pdf

2) $y_0 = -\sqrt{2}\ln\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

$$\int_{\underline{\gamma}_2}\omega = \lim_{\underline{x}\to C} U(x,y) - \arctan\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)}\arctan\frac{e^y-1}{e^x-1}+\arctan\sqrt{3} =$$
$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

3) Possiamo usare Gauss–Green e dire che l'integrale è lo stesso che otterrei se integrassi lungo la curva $x(t) = \ln(1+\varepsilon\cos t)$, $y(t) = \ln(1+\varepsilon\sin t)$, $|\varepsilon| < 1$, $0 \le t \le 2\pi$ ossia $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

4) Basta fare $U(D) - U(A) = 0 - \arctan(-\sqrt{3}) = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$

Integrando le equazioni alcuni sono pervenuti alla funzione $-\arctan\dfrac{e^x-1}{e^y-1}$ e per definire un potenziale che sia C^1 nell'insieme $\mathbf{R}^2\backslash\{x<0, y=0\}$ possiamo scrivere

$$U(x,y) = \begin{cases} -\arctan\dfrac{e^x-1}{e^y-1}, & y>0, \\ -\pi-\arctan\dfrac{e^x-1}{e^y-1}, & y<0, \\ -\pi/2, & y=0, x>0 \end{cases}$$

Tralascio la dimostrazione che la funzione $U(x,y)$ è $C^1(\mathbf{R}^2\backslash\{x<0, y=0\})$. Una dimostrazione analoga è stata scritta qualche compito fa.

1) $U(B)-U(A)=-\pi-0-\left(-\pi-\arctan\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

2) $U(C)-U(A)=0-\left(-\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$

3) Come sopra

4) $U(D)-U(A)=\dfrac{-\pi}{2}-\left(-\pi-\arctan\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

3) Solo per Elettronica&Internet La funzione di Lagrange è $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x+y+z-\lambda(x-y-z)-\mu(x^2+y^2+z^2-6)$

$$1-\lambda-2\mu x=0,\quad 1+\lambda-2\mu y=0,\quad 1+\lambda-2\mu z=0,\quad x-y-z=0,\quad x^2+y^2+z^2-6=0$$

$\mu=0$ è impossibile e quindi $x=\dfrac{1-\lambda}{2\mu}$, $y=\dfrac{\lambda+1}{2\mu}$, $z=\dfrac{\lambda+1}{2\mu}$ da cui $\dfrac{1-\lambda}{2\mu}-\dfrac{\lambda+1}{2\mu}-\dfrac{\lambda+1}{2\mu}=0$ e quindi $\lambda=-1/3$. Ne segue $x=\dfrac{2}{3\mu}$, $y=\dfrac{1}{3\mu}$, $z=\dfrac{1}{3\mu}$. La condizione $x^2+y^2+z^2=6$ dà $\mu=\pm 1/3$ e quindi i punti critici sono $(2,1,1,-1/3,1/3)$, $(-2,-1,-1,-1/3,-1/3)$. I punti sono regolari

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2x&2y&2z\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-4&-2&-2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&2&2\end{pmatrix}\text{ hanno rango due}$$

Gli spostamenti devono soddisfare

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-4&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{matrix}a-b-c=0\\4a+2b+2c=0\end{matrix}\Longrightarrow a=0,\ c=-b$$

La forma quadratica associata a $(-2,-1,-1,-1/3,-2/3)$ è

$$\frac{2}{3}\,(0,b,-b)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\\-b\end{pmatrix}=\frac{16b^2}{3}\text{ minimo}$$

La forma quadratica associata a $(2,1,1,-1/3,2/3)$ è

$$\frac{-2}{3}\,(0,b,-b)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\\-b\end{pmatrix}=\frac{-16b^2}{3}\text{ massimo}$$

Seconda soluzione Dal primo vincolo otteniamo $x=y+z$ per cui il problema diventa di trovare i punti di estremo della funzione $(y+z)+y+z$ soggetta al vincolo $(y+z)^2+y^2+z^2=6$. La funzione di Lagrange è

$$F(y,z,\lambda)=2y+2z-\lambda(y^2+z^2+zy-3),\quad F_y=2-2\lambda y-\lambda z=0,\quad F_z=2-2\lambda z-\lambda y=0,$$
$$-F_\lambda=y^2+z^2+zy-3=0$$

$\lambda=0$ è escluso e $F_y=0=F_z$ ci dà $y=z$ che inserito in $F_\lambda=0$ produce $y=z=\pm1$. Quindi le soluzioni sono $(y,z,\lambda)=(1,1,2/3)\doteq P_1$ e $(-1,-1,-2/3)\doteq P_2$. Vediamo la regolarità dei punti. Il gradiente del vincolo è $(2y+z, 2z+y)$ che in P_1 e P_2 vale rispettivamente $(3,3) \neq (0,0)$ e $(-3,-3) \neq (0,0)$ per cui i punti sono regolari.

P_1. $(3,3)\cdot(a,b)$ implica $b=-a$. La matrice hessiana è

$$-\lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Big|_{P_1} = \frac{-2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \frac{-2}{3}(a,-a)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = \frac{-4a^2}{3} \text{ massimo}$$

quindi il punto $(x,y,z)=(2,1,1)$ è un massimo

P_2. $(-3,-3)\cdot(a,b)$ implica $b=-a$. La matrice hessiana è

$$-\lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Big|_{P_1} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \frac{2}{3}(a,-a)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = \frac{4a^2}{3} \text{ minimo}$$

quindi il punto $(x,y,z)=(-2,-1,-1)$ è un minimo

Terza soluzione Una volta arrivati a impostare il problema attraverso l'estremizzazione della funzione $2(y+z)$ soggetta al vincolo $y^2+z^2+zy=3$ diagonalizziamo quest'ultima forma quadratica attraverso il cambio di variabili $y=(\xi+\eta)/\sqrt{2}$, $z=(-\xi+\eta)/\sqrt{2}$ che trasforma $y^2+z^2+zy=3$ in $\xi^2+3\eta^2=3$ e $2(y+z)$ in $2\sqrt{2}\eta$ per cui il problema diventa estremizzare la funzione $2\sqrt{2}\eta$ soggetta al vincolo $\xi^2+3\eta^2=3$. $\xi=\sqrt{3}\cos t$, $\eta=\sin t$ e $2\sqrt{2}\eta=2\sqrt{2}\sin t$ che ha il massimo per $t_1=\pi/2$ e il minimo per $t_2=-\pi/2$. Per $t=t_1$ abbiamo $(\xi,\eta)=(0,1)$ che implica $y=z>0$. La relazione $t=t_2$ implica $(\xi,\eta)=(0,-1)$ ossia $y=z<0$ e sostituendo sia $y=z>0$ che $y=z<0$ in $y^2+x^2+zy=3$ otteniamo $y=z=1$ oppure $y=z=-1$. È chiaro che il primo è un massimo e il secondo un minimo