Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
08–09–2022 A.A. 2021/2022, Quinto appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco consentono di conseguire 25 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7 punti*) Si calcoli il volume $|V|$ della regione di spazio definita da $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z \geq x^2 + 4y^2\} \cap \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon 1 + x + 4y \leq z \leq 8\}$ [si operi per sottrazione]

2) Si risolva l'equazione differenziale $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Ax\cos(\omega t), & x, t > 0 \quad a > 0, A \in \mathbf{R}\backslash 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

2.1) (9 punti*) Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ [Nella soluzione della non omogenea per $v(x,p)$, si provi la funzione $c \cdot x$, c costante]

2.2) (4 punti) Si antitrasformi $v(x,p)$ ottenendo la soluzione $u(x,t)$

3) (9 punti*) **Solo per Informatica** Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(4 - \sin\vartheta)^2}$

3) (9 punti*) **Solo per Elettronica&Internet** Sia data la funzione $f(x,y,z) = xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2$ soggetta al vincolo $3xyz - x - y - z = 0$

3.1) Si trovino i punti critici della funzione [Non si dimentichi di verificare se i punti critici trovati sono regolari oppure no.]

3.2) Se ne stabilisca la natura.

Regole per lo svolgimento e la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.

3) Il compito dura tre ore e l'istante d'inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile

4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.

6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall'inizio del compito

Soluzioni

1) L'insieme V è descritto come $v=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon (x-\frac{1}{2})^2+4(y-\frac{1}{2})^2\geq\frac{9}{4}, x^2+4y^2\leq 8, \quad 1+x+4y\leq z\leq 8\}$. L'integrale che cerchiamo è

$$\iint_{x^2+4y^2\leq 8} dx\,dy\int_{x^2+4y^2}^{8} dz-\iint_{(x-\frac{1}{2})^2+4(y-\frac{1}{2})^2\leq\frac{9}{4}} dx\,dy\int_{x^2+4y^2}^{1+x+4y} dz=16\pi-\frac{81\pi}{64}$$

2) In trasformata di Laplace $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ si ha

$$p^2v(x,p)-a^2v_{xx}(x,p)=\frac{Axp}{p^2+\omega^2},\ v_x(0,p)=0\implies v(x,p)=\alpha e^{-px/a}+cx$$

con c e α da trovare.

$$p^2\alpha e^{-px/a}+cp^2x-p^2e^{-px/a}=\frac{Axp}{p^2+\omega^2}\implies c=\frac{A}{p(p^2+\omega^2)}$$

$$v_x(0,p)=\frac{-p\alpha}{a}+c=0\implies\alpha=\frac{ca}{p}\implies\alpha=\frac{aA}{p^2(p^2+\omega^2)}$$

da cui

$$v(x,p)=aAe^{-px/a}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+\omega^2}\right)\frac{1}{\omega^2}+\frac{Ax}{\omega^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)$$

$$u(x,t)=\left(\frac{aA}{\omega^2}(t-\frac{x}{a})-\frac{aA}{\omega^3}\sin(\omega(t-\frac{x}{a}))\right)H(t-\frac{x}{a})+\frac{Ax}{\omega^2}(1-\cos(\omega t)$$

$$u_t(\frac{\pi a}{2\omega},\frac{3\pi}{2\omega})=\frac{2aA}{\omega^2}-\frac{aA\pi}{2\omega^3}=0\iff\omega=\frac{\pi}{4}$$

3) Solo per Informatica Sostituire $e^{i\vartheta}=z$ e si ottiene $\dfrac{8\sqrt{15}\pi}{225}$

3) Solo per Elettronica&Internet

La funzione di Lagrange è $f(x,y,\lambda)=xy+yz+zx+x^2+y^2+z^2-\lambda(3xyz-x-y-z)$

$$f_x=y+z+2x-\lambda(3yz-1)=0,\quad f_y=z+x+2y-\lambda(3zx-1)=0,$$
$$f_z=x+y+2z-\lambda(3xy-1)=0,\ 3xyz=x+y+z$$

$\boxed{x=0}$. La seconda e la terza implicano $z=-3y$ e con $3xyz=x+y+z$ si arriva a $z=0$. Otteniamo quindi $x=y=z=0$. Inoltre facilmente si vede che $\lambda=0$. Il punto critico è non singolare

$$(3yz+1,3xz+1,3yz+1)|_{(0,0,0)}=(1,1,1)\neq(0,0,0)$$

La tangenzialità dello spostamento (a,b,c) dà

$$(1,1,1)\cdot(a,b,c)=a+b+c=0\implies c=-a-b$$

La forma quadratica della matrice essiana si riduce a

$$(a,b,-a-b)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\-a-b\end{pmatrix}=a^2+b^2+(a+b)^2\text{ minimo}$$

Si poteva pure vedere osservando che

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)\geq 0$$

e la funzione si annulla in $(0,0,0)$. È un minimo assoluto per giunta.

$\boxed{x\neq 0}$ e quindi $y\neq 0$ e $z\neq 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}&xy+xz+2x^2-\lambda(3yxz-x)=0, \quad yz+yx+2y^2-\lambda(3zxy-y)=0,\\ &zx+zy+2z^2-\lambda(3xyz-z)=0,\ 3xyz=x+y+z\end{aligned}$$

Sottraendo fra di loro le prime tre otteniamo le sei condizioni

$$\begin{aligned}&A)\ x=y, \quad B)\ x\neq y\ \vee\ 3x+2z+\lambda=0, \quad C)\ y=z, \quad D)\ y\neq z\ \vee\ 3y+2x+\lambda=0,\\ &E)\ z=x, \quad F)\ z\neq x\ \vee\ 3z+2y+\lambda=0,\end{aligned}$$

$((A\wedge C)\ \vee\ (A\wedge E)\ \vee\ (C\wedge E))\wedge 3xyz=x+y+z \implies (x,y,z)=(0,0,0),\ (1,1,1),\ (-1,-1,-1)$

$\boxed{P\equiv(1,1,1)}$. Dalla prima equazione ricaviamo $\lambda=2$. Il punto è regolare e la tangenzialità dello spostamento dà come prima $\alpha+\beta+\gamma=0$. La matrice hessiana diventa

$$(a,b,-a-b)\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0&3&3\\3&0&3\\3&3&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\-a-b\end{pmatrix}=14(a^2+b^2+ab)\text{ minimo}$$

$\boxed{P\equiv(-1,-1,-1)}$. Dalla prima equazione ricaviamo $\lambda=-2$. Il punto è regolare e la tangenzialità dello spostamento dà come prima $a+b+c=0$. La matrice hessiana diventa

$$(a,b,-a-b)\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&-3&3\\-3&0&-3\\-3&-3&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\-a-b\end{pmatrix}=14(a^2+b^2+ab)\text{ minimo}$$

Gli altri due punti generano lo stesso risultato.

Consideriamo poi $B\wedge D\wedge E$. Si ottiene $x=y$ e quindi $x=y$ e quindi una contraddizione.

Infine rimane $B\wedge D\wedge F$. Sottraendo le equazioni si ottiene

$$x+2z-3y=0,\ 3x-z-2y=0,\ y+2x-3z=0 \iff (x,y,z)=\alpha(1,1,1)$$

ed è una situazione già studaita