Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”, facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
02–07–2022 A.A. 2021/2022, Primo appello estivo

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

CONSEGNARE SEMPRE il presente foglio

Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome

Le domande con asterisco consentono di conseguire 25 come voto massimo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7 punti) Si calcoli il volume $|V|$ della regione di spazio definita da $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + 4y^2 \leq z \leq 2 + 2x + 4y\}$

2) Sia data la funzione $f(t)$ che vale t per $0 \leq t \leq 1$, vale 1 per $t \geq 1$, Si consideri la seguente equazione differenziale (A e B costanti)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Axf(t - \dfrac{x}{a})H(t - \dfrac{x}{a}), \quad x, t > 0 \quad a > 0, A \in \mathbf{R}\backslash 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = B \cdot f(t), \quad B \in \mathbf{R}\backslash 0, \end{cases}$$

2.1) (9 punti) Si scriva la soluzione per la equazione differenziale ordinaria che definisce $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ [Nella soluzione della non omogenea per $v(x,p)$, si provi la funzione $c\, x \exp(-(px)/a) + d\, x^2 \exp(-(px)/a)$, c,d costanti. Può essere utile ricordare che $(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''f$. Inoltre per non appesantire troppo i calcoli e soprattutto inutilmente, conviene chiamare $\mathcal{L}(f) = F(p)$ e $\mathcal{L}(g) = G(p)$ (o scegliete voi la notazione) e portare tale notazione fino alla fine quando si trova la formula finale $v(x,p)$. Solo a quel punto vanno esplicitate sia $F(p)$ che $G(p)$]

2.2) (4 punti) Si antitrasformi $v(x,p)$ ottenendo la soluzione $u(x,t)$

2.1) (3 punti) Dire che relazione intercorre fra A e B affinché $u_t(2a,3) = 0$ ricordando che $f(x)\delta(x-a) = f(a)$

3) (9 punti) **Solo per Informatica** Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(3 + \cos\vartheta)^2}$

3) (9 punti) **Solo per Elettronica&Internet** Sia data la funzione $f(x,y,z) = xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2$ soggetta al vincolo $xyz = 8$

3.1) Si trovino i punti critici della funzione [Non si dimentichi di verificare se i punti critici trovati sono regolari oppure no.]

3.2) Se ne stabilisca la natura.

Regole per lo svolgimento e la consegna

1) Gli studenti devono munirsi sia dei fogli di brutta che di bella. Io fornirò solo ed esclusivamente il testo d'esame. Scrivere in modo leggibile

2) Sarà possibile consultare qualsiasi documento cartaceo e NON sarà possibile utilizzare alcuno strumento elettronico, telefonini compresi.

3) Il compito dura tre ore e l’istante d’inizio dipenderà dallo svolgimento delle procedure preliminari. Ci si può ritirare in qualsiasi momento. Scrivere in modo leggibile

4) Mi riservo la facoltà di convocare per la prova orale quegli studenti i cui compiti dovessero risultare troppo simili fra loro o in generale poco convincenti

5) Gli studenti dovranno depositare sul banco e tenere in mostra spento il loro cellulare.

6) È possibile andare in bagno non prima di 90 minuti dall’inizio del compito

Soluzioni

1) L'insieme V è descritto come $v = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon (x-1)^2 + (2y-1)^2 \le 4, \quad x^2+4y^2 \le z \le 2+2x+4y\}$. Passiamo a coordinate polari $x = 1+2r\cos t$, $y = 1/2 + r\sin t$ da cui l'integrale

$$|V| = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 2r(4-(x-1)^2-(2y-1)^2)\Big|_{r,t} = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 2r4(1-r^2) = 4\pi$$

1.1) Usiamo il teorema di Gauss

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \mathrm{div}\underline{F}(\underline{x}) dx\,dy\,dz = \iint_{(x-1)^2+(2y-1)^2\le 4} dx\,dy \int_{x^2+4y^2}^{2+2x+4y} 2z\,dz = \\
&= 2\iint_{(x-1)^2+(2y-1)^2\le 4} dxdy(4+3x^2+12y^2+4x+16y+16xy) = \\
&= 2\iint_{(x-1)^2+(2y-1)^2\le 4} dxdy(4+3x^2+12y^2) = \\
&2\int_0^{2\pi}\int_0^1 dt2r(10+12r^2) = 24\pi + 26
\end{aligned}$$

2)

$$f(t) = g(t) = tH(t) - (t-1)H(t-1),$$

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} \doteq F(p)$$

In trasformata di Laplace $v(x,p) = \mathcal{L}u(x,t)$ abbiamo

$$a^2 v_{xx} - p^2 v = -Axe^{\frac{-px}{a}} F(p) \quad v_x = BF(p) \tag{1}$$

Della non omogenea proviamo la soluzione $R(x,t) = cxe^{\frac{-px}{a}} + dx^2 e^{\frac{-px}{a}}$

$$a^2 R_{xx} = cxp^2 e^{\frac{-px}{a}} - 2acpe^{\frac{-px}{a}} + 2a^2 de^{\frac{-px}{a}} + p^2dx^2e^{\frac{-px}{a}} - 4dapxe^{\frac{-px}{a}}$$

che inserita nella equazione (1) dà

$$\begin{aligned}
&cxp^2e^{\frac{-px}{a}} - 2acpe^{\frac{-px}{a}} + 2a^2de^{\frac{-px}{a}} + p^2dx^2e^{\frac{-px}{a}} - 4dapxe^{\frac{-px}{a}} + \\
&- p^2cxe^{\frac{-px}{a}} - p^2dx^2e^{\frac{-px}{a}} = Axe^{\frac{-px}{a}}F(p)
\end{aligned}$$

ossia

$$-2acp + 2a^2d - 4dapx = AxF(p) \implies \begin{cases} ad = cp \\ -4adp = AF(p) \end{cases}$$

$c = \dfrac{-AF(p)}{4p^2}$, $d = \dfrac{-AF(p)}{4ap}$

La soluzione è

$$v(x,p) = \alpha e^{\frac{-px}{a}} - \frac{AxF(p)}{4p^2}e^{\frac{-xp}{a}} - \frac{AF(p)x^2}{4ap}e^{\frac{-px}{a}}$$

$$v_x(0,p) = \frac{-p\alpha}{a} - \frac{AF(p)}{4p^2} = BG(p) \implies \alpha = \frac{-aBF(p)}{p} - \frac{AF(p)a}{4p^3}$$

quindi

$$\begin{aligned} v(x,p) &= \left(\frac{-aBF(p)}{p} - \frac{AF(p)a}{4p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}} - \frac{AxF(p)}{4p^2}e^{\frac{-xp}{a}} - \frac{AF(p)x^2}{4ap}e^{\frac{-px}{a}} = \\ &= -aB\left(\frac{1}{p^3} - \frac{e^{-p}}{p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}} - \frac{aA}{4}\left(\frac{1}{p^5} - \frac{e^{-p}}{p^5}\right)e^{\frac{-px}{a}} + \\ &- \frac{Ax}{4}\left(\frac{1}{p^4} - \frac{e^{-p}}{p^4}\right)e^{\frac{-px}{a}} - \frac{Ax^2}{4a}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{e^{-p}}{p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}} \end{aligned}$$

Sia $\hat{t} = t - x/a$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= H(\hat{t})\Big[-\frac{aB}{2}\hat{t}^2 - \frac{aA\hat{t}^4}{96} - \frac{Ax\hat{t}^3}{24} - \frac{Ax^2\hat{t}^2}{8a}\Big] + \\ &+ H(\hat{t}-1)\left[\frac{aB}{2}(\hat{t}-1)^2 + \frac{aA(\hat{t}-1)^4}{96} + \frac{Ax(\hat{t}-1)^3}{24} + \frac{Ax^2(\hat{t}-1)^2}{8a}\right] \end{aligned}$$

2.1) $\big((\hat{t})^k H(\hat{t})\big)_t\Big|_{t=3,x=2a} = k\hat{t}^{k-1}H(\hat{t}) + \hat{t}^k\delta(\hat{t})\Big|_{t=3,x=2a} = k\hat{t}^{k-1}H(\hat{t})\Big|_{t=3,x=2a} = k$

$\big((\hat{t}-1)^k H(\hat{t}-1)\big)_t\Big|_{t=3,x=2a} = k(\hat{t}-1)^{k-1}H(\hat{t}-1)\Big|_{t=3,x=2a} = 0$

$u_t(2a,3) = -aB - aA\left[\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + 1\right] = 0$ se e solo se $B = \frac{-31A}{24}$

3) Solo per Informatica Sostituire $e^{i\vartheta} = z$ e si ottiene $\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}$

3) Solo per Elettronica&Internet

La funzione di Lagrange è $f(x,y,\lambda) = xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(xyz)$

$f_x = y + z + 2x - \lambda yz = 0, \quad f_y = z + x - 2y - \lambda zx = 0, \quad f_z = x + y + 2z - \lambda zy = 0, \quad xyz = 8$

Ciascuna delle variabili non può essere pari a zero per via di $xyz = 8$ per cui possiamo moltiplicare la prima per x, la seconda per y e la terza per z. Sottraendo fra di loro le prime tre otteniamo le sei condizioni

$$\begin{aligned} &A)\ x = y, \quad B)\ x \neq y\ \vee\ z = 2(x-y), \quad C)\ y = z, \quad D)\ y \neq z\ \vee\ x = 2(y-z), \\ &E)\ z = x, \quad F)\ z \neq x\ \vee\ y = 2(z-x), \end{aligned}$$

$$((A \wedge C)\ \vee\ (A \wedge E)\ \vee\ (C \wedge E))\ \wedge\ xyz = 8 \implies x = y = z = 2,\ \lambda = 2$$

Consideriamo ora $B \wedge C \wedge E$. È impossibile in quanto da $B \wedge C$ viene fuori $x = -z$ incompatibile con E.

Consideriamo ora $B \wedge C \wedge F$. Segue $y = 2x - 2y$ e $y = 2(y-x)$ che è impossibile. Le altre combinazioni danno lo stesso risultato quindi l'unico punto critico è $P = (2,2,2)$ ed è regolare in quanto il gradiente del vincolo non si annulla in P. Poi dobbiamo imporre la tangenzialità al vincolo degli “spostamenti”

$$4(a+b+c) = 0 \implies c = -a-b$$

Dobbiamo studiare la forma quadratica

$$(a,b,-a-b)\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} = 10(a^2 + b^2 +)ab \text{ minimo}$$