Secondo “minicompito” Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica analisi–II, A.A. 2018–2019.

Si leggano le informazioni in basso prima di cimentarsi

Calcolare

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)\frac{dx}{x}$

2) $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^{2\pi x}-1}dx$ (suggerimento: il cammino nel piano complesso non è nessuno di quelli finora studiati; esiste pure una tecnica di integrazione, consentita anch'essa, che non prevede l'uso della variabile complessa).

I quesiti valgono 1 punto ciascuno e la somma va ad aggiungersi al voto dello scritto. Non è necessario risolvere tutti e due gli esercizi e non si è obbligati a provarci. Il presente minicompito non costituisce un esonero. Gli elaborati vanno consegnati alla fine della lezione del **10/01/2019**. Si possono consegnare uno o più fogli protocollo. Nome, cognome ($\boxed{\textbf{Leggibili}}$) e matricola vanno scritti su **ogni** foglio. Alternativamente si possono usare più fogli singoli sfusi su ciascuno dei quali va messo nome cognome e matricola ($\boxed{\textbf{Leggibili}}$). In questo secondo caso i fogli vanno racchiusi tutti in una cartellina oppure in una busta di plastica di quelle usuali oppure grappettati. **Non presentarsi con due o più fogli sfusi la cui unione diventa poi un mio problema. In tal caso i fogli non verranno accettati.** *Gli studenti possono associarsi fra loro e farsi aiutare ma sconsiglierei di trascrivere pedissequamente qualcosa che non si è capito. Se allo scritto d'esame si dimostra di non padroneggiare l'esercizio riguardante gli integrali da risolversi coi complessi, sarà inevitabile doversi sottoporre alla prova orale e se alla fine non si supera l'esame, si perdono i punti del minicompito.* Evitare di chiedere suggerimenti su come procedere. Non ne verranno dati.

Non è possibile consegnare le risposte successivamente; eventualmente è possibile farlo alla fine di una qualsiasi delle lezioni precedenti a quella del 10/01/2019 che **terminerà alle ore 14.45** Alternativamente è possibile lasciare l'elaborato, sempre entro le 14.45 del 10/01/2019, nella mia buca delle lettere che si trova nel Dipartimento di Matematica (zona Sogene). La buca delle lettere si trova sullo stesso piano di “Focal Point” ed è distante 20 metri circa da esso (percorrere il corridoio alle spalle di “Focal Point”).

Dimostrazione 1). Prima mostriamo che l'integrale improprio converge. Il problema è solo in $x=0$ in quanto $x^2+\sqrt{3}x+1\neq 0$ e $x^2-\sqrt{3}x+1\neq 0$.

$$\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} = (x^2+\sqrt{3}x+1)\Big(1-x^2+\sqrt{3}x+O(x^2)\Big) = 1+2\sqrt{3}x+O(x^2)$$

e

$$\frac{\ln(1+2\sqrt{3}x+O(x^2)}{x} = \frac{2\sqrt{3}x+O(x^2)}{x} = 2\sqrt{3}+O(x)$$

per cui la funzione non diverge per $x\to 0$. L'integrale converge.

$$\int_0^1 \ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\frac{dx}{x} \underbrace{=}_{y=1/x} \int_1^{+\infty} \ln\frac{y^2+\sqrt{3}y+1}{y^2-\sqrt{3}y+1}\frac{dy}{y} \implies I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\frac{dx}{x}$$

da cui

$$2I = \underbrace{\ln x \ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\Big|_{x=0}^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \ln x \frac{2\sqrt{3}(1-x^2)}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)}dx$$

e quindi

$$I = \int_0^{+\infty} \ln x \frac{\sqrt{3}(x^2-1)}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)} dx$$

Sappiamo che

$$-4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{3}(x^2-1)\ln x}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)} dx + 4\pi^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{3}(x^2-1)}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)} dx}_{=0,\ usare\ i\ residui\ oppure\ fratti\ semplici} =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \text{Res}\left[\ln^2 z \frac{\sqrt{3}(z^2-1)}{(z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)}\right]\Big|_{z=z_k}$$

per cui

$$I = \int_0^{+\infty} \ln x \frac{\sqrt{3}(x^2-1)}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} \text{Res}\left[\frac{\sqrt{3}(z^2-1)\ln^2 z}{(z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)}\right]\Big|_{z=z_k}$$

dove $z_1, \dots, z_4$ sono rispettivamente $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \overline{z}_1$, $z_3 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{5i}{6}\pi}$, $z_4 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = e^{\frac{7i}{6}\pi} = \overline{z}_3$.

Residuo in z_1.

$$\lim_{z\to z_1} \ln^2 z \frac{\sqrt{3}(z^2-1)(z-z_1)}{z^4-z^2+1} = \sqrt{3}\left(\frac{i\pi}{6}\right)^2 \lim_{z\to z_1} \frac{(z^2-1)(z-z_1)}{z^4-z^2+1} \underbrace{=}_{l'Hopital}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{i\pi}{6}\right)^2 \lim_{z\to z_1} \frac{2z(z-z_1)+z^2-1}{4z^3-2z} = \sqrt{3}\left(\frac{i\pi}{6}\right)^2 \lim_{z\to z_1} \frac{z^2-1}{4z^3-2z} = \frac{-\sqrt{3}\pi^2}{36}\frac{z_1^2-1}{4z_1^3-2z_1} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\pi^2}{36}\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Residuo in z_2. $\frac{-121\sqrt{3}\pi^2}{36}\frac{\overline{z}_1^2-1}{4\overline{z}_1^3-2\overline{z}_1} = \frac{-121\sqrt{3}\pi^2}{36}\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Residuo in z_3. $\frac{-25\sqrt{3}\pi^2}{36}\frac{z_3^2-1}{4z_3^3-2z_3} = \frac{-25\sqrt{3}\pi^2}{36}\frac{-1}{2\sqrt{3}}$.

Residuo in z_4. $\frac{-49\sqrt{3}\pi^2}{36}\frac{-1}{2\sqrt{3}}$.

La somma dà $\frac{\pi^2}{3}$

Facciamo vedere ora che $J \doteq \int_0^{+\infty} \frac{(x^2-1)}{(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)} dx = 0$. Si potrebbe procedere scomponendo in fratti semplici ma visto che siamo in tema di integrali complessi, usiamo i residui. Chiaramente si ha

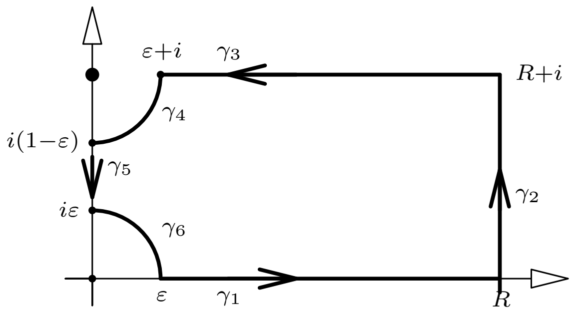
$$J = -\sum_{k=1}^{4} \text{Res}\left[\frac{(z^2-1)\ln z}{(z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)}\right]\Big|_{z=z_k}$$

Seguendo il calcolo precedente ed operando le opportune modifiche (abbiamo $\ln z$ invece di $\ln^2 z$) si ha

$$\frac{i\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{1}{6}+\frac{11}{6}-\frac{5}{6}-\frac{7}{6}\right]=0$$

J.

- b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^{2\pi x}-1}dx.$ Si integra lungo il cammino disegnato in figura per poi eseguire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to0}$



$$\begin{cases}\gamma_1(t)=t,\ \varepsilon\le t\le R\\ \gamma_2(t)=R+it\ 0\le t\le 1\\ \gamma_3(t)=-t+i\ \ -R\le t\le-\varepsilon\\ \gamma_4(t)=i+\varepsilon e^{-it}\ \ -2\pi\le t\le -3\pi/2,\\ \gamma_5(t)=-it\ \varepsilon-1\le t\le-\varepsilon\\ \gamma_6(t)=\varepsilon e^{-it}\ \ -\dfrac{\pi}{2}\le t\le 0\end{cases}$$

$\Gamma=\cup_{i=1}^6\gamma_i$. Innanzitutto l'integrale è la parte immaginaria di $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx$. Inoltre $\displaystyle\int_\Gamma dzf(z)=\sum_{i=1}^6\int_{\gamma_i}\gamma_i'(t)f(\gamma_i(t))dt$ per poi fare $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}$ e $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}$.

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1}\gamma_1'(t)f(\gamma_1(t))dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx.$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2}\gamma_2'(t)f(\gamma_2(t))dt=\lim_{R\to+\infty}\int_0^1\frac{e^{ia(R+it)}}{e^{2\pi(R+it)}-1}dt=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3}\gamma_3'(t)f(\gamma_3(t))dt=-\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ia(i-t)}}{e^{2\pi(i-t)}-1}dt=-\int_{-\infty}^0\frac{e^{-a}e^{-iat}}{e^{-2\pi t}-1}dt=\int_{+\infty}^0\frac{e^{-a}e^{iat}}{e^{2\pi t}-1}dt$$

$$-e^{-a}\int_0^{+\infty}\frac{e^{iat}}{e^{2\pi t}-1}dt$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_4}\gamma_4'(t)f(\gamma_4(t))dt=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-2\pi}^{-\frac{3}{2}\pi}\frac{e^{ia(i+\varepsilon e^{-it})}}{e^{2\pi\varepsilon e^{-it}}-1}(-i)\varepsilon e^{-it}=\frac{i}{2}e^{-a/2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_5}\gamma_5'(t)f(\gamma_5(t))dt=\int_{\varepsilon-1}^{-\varepsilon}(-i)dt\frac{e^{ia(-it)}}{e^{2\pi(-it)}-1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_6}\gamma_6'(t)f(\gamma_6(t))dt=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{e^{2\pi\varepsilon e^{-it}}-1}(-i)\varepsilon e^{-it}=-i\frac{1}{4}$$

$$\int_\Gamma dzf(z)=2\pi i\sum_{z\ all'interno\ della\ figura}Resf(z)=0.\text{ Dunque}$$

$$Im\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)=-Im\left(-e^{-a}\int_0^{+\infty}\frac{e^{iat}}{e^{2\pi t}-1}dt-ie^{-a}\frac{1}{4}-i\frac{1}{4}+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon-1}^{-\varepsilon}(-i)dt\frac{e^{ia(-it)}}{e^{2\pi(-it)}-1}\right)$$

e quindi

$$(1-e^{-a})Im\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)=\frac{1}{4}(1+e^{-a})+\lim_{\varepsilon\to0}Re\left(\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}dt\frac{e^{-at}}{e^{2\pi it}-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+e^{-a})+\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}dtRe\left(\frac{e^{-at}}{e^{2\pi it}-1}\right)=\frac{1}{4}(1+e^{-a})-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}dte^{-at}$$

$$Im\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx\right)=\frac{1}{4}\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}-\frac{1}{2(1-e^{-a})}\int_0^1 dte^{-at}=\frac{1}{4}\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}-\frac{1}{2a}=\frac{1}{4}\frac{e^{a}+1}{e^{a}-1}-\frac{1}{2a}$$

Si è usato $Re\left(\dfrac{1}{e^{2\pi it}-1}\right)=-1/2$. Il risultato è $\dfrac{1}{4}\coth\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}$