

**Ing. Elettronica& Internet, Informatica (frontale e online), A.A.2018–2019**

**Il 20/11/2018 è stato l'ultimo giorno di lezione per Informatica**

**Giornale delle lezioni e materiale svolto a lezione ma non presente sulle dispense**

**Gli esercizi per casa e non svolti a lezione iniziano con ♠ e finiscono con ♠♠**

**L'inizio di esercizi e/o argomenti svolti a lezione ma non presenti sulle dispense è contraddistinto con • e la fine con ••**

**Le dispense del Prof.Tauraso sono divise in 4 capitoli. Le pagine da studiare dopo ogni lezione si riferiscono al capitolo relativo. Ad esempio le pag.1 e 2 elencate qui sotto si riferiscono al capitolo degli integrali multipli**

**105 min. Lezione del 24/09/2018 funzioni di più variabili** Non presente sulle dispense di Tauraso.

• Rudimenti. Grafici delle funzioni  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = ax + by$ ,  $z = x^2 - y^2$ .

Derivate direzionali e come caso particolare, derivate parziali.

Calcolo delle derivate parziali delle funzioni  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x^2 - y^2$ ,  $z = \cos(x^2y + y)$ ,  $z = \frac{\ln(x^2 + y^4)}{\sin(xy)}$ . In quest'ultimo caso applichiamo la formula

$$\frac{d}{dx} \left( f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(x^2 + y^4)}{\partial x \sin(xy)} &= \frac{2x}{x^2 + y^4} \frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2 + y^4) \frac{\cos(xy)y}{\sin^2(xy)}, \\ \frac{\partial \ln(x^2 + y^4)}{\partial y \sin(xy)} &= \frac{4y^3}{x^2 + y^4} \frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2 + y^4) \frac{\cos(xy)x}{\sin^2(xy)} \end{aligned}$$

••

**105 min. Lezione del 25/09/2018 funzioni di più variabili, integrazione**

• Definizione di piano tangente alla funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :  $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ . ••

Pag.1,2. Pag.3 da "si pone" fino a fine pagina. Pag.5,6,7. Pag.8 esempio 1.

**105 min. Lezione del 25/09/2018 funzioni di più variabili, integrazione**

Esempio 2 pag.8–9. Esempio 3 pag.9–10.

• L'esempio di di pag.9 è stato risolto anche considerando  $D$  come semplice rispetto all'asse delle  $x$ .

$$D = \{x: 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y}\}$$

per cui

$$V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (1-x+y) dx = \int_0^1 dy \left[ x - \frac{x^2}{2} + yx \right]_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} = \int_0^1 dy \left( 2\sqrt{1-y} + 2y\sqrt{1-y} \right)$$

$$2 \int_0^1 dy \sqrt{1-y} = 2 \frac{2}{3} (1-y)^{3/2} \Big|_1^0 = \frac{4}{3}$$

$$2 \int_0^1 dy y \sqrt{1-y} = 2 \int_0^1 dy y \left( -\frac{2}{3} (1-y)^{3/2} \right)' = 2 \left[ y \frac{-2}{3} (1-y)^{3/2} \right]_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 dy (1-y)^{3/2} =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 dy (1-y)^{3/2} = \frac{4}{3} \frac{2}{5} (1-y)^{5/2} \Big|_1^0 = \frac{8}{15}$$

La somma delle due quantità dà  $\frac{4}{3} + \frac{8}{15} = \frac{28}{15}$  ●●

• Area del cerchio come integrale doppio ●●

Esempio 3,4 pag.10

♠ Calcolare  $\iint_D |y-x^2| dx dy$  dove  $D$  è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, [R.12/5] ii) triangolo di vertici  $(-1, -1), (1, -1), (1, 1)$ , [R.41/30] iii) L'insieme definito da  $x^2 \leq |y| \leq 1$ . [R.8/5]

Calcolare  $\iint_D |x|y| - x^2| dx dy$  dove  $D$  è il quadrato di centro l'origine e lato lungo 2. [R.2/3]

Calcolare  $\iint_D |y-x^3| dx dy$  dove  $D$  è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, [R.16/7] ii) triangolo di vertici  $(-1, -1), (1, -1), (1, 1)$ , [R.8/7] iii) L'insieme definito da  $x^2 \leq |y| \leq 1$ . [R.8/5]

Calcolare il volume del seguente insieme  $\{x \in \mathbf{R}^3: 0 \leq z \leq r - \sqrt{x^2 + y^2}\}$  (cono) **R. $\pi r^3/3$**

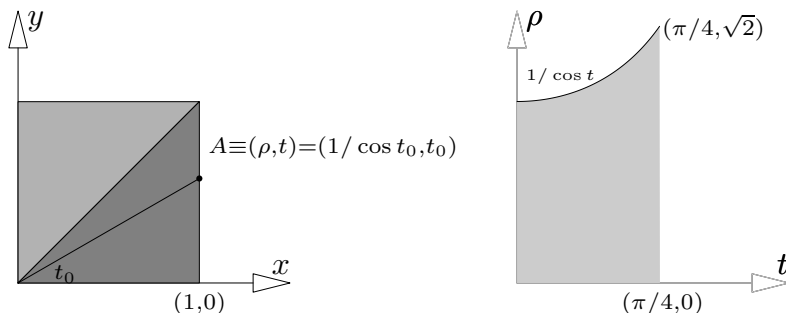
Calcolare il volume dell'insieme in  $\mathbf{R}^3$  definito da  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1 + x + y$ . **R. $9\pi/8$**  ♠♠

Degli esercizi di Tauraso sugli integrali multipli, fare tutti quelli dal num.1 al num.10 con esclusione dei num.8,9.

### 105 min. Lezione del 01/10/2018 funzioni di più variabili, integrazione

Pag. da 12 a 16 escluso esempio 7.

• Calcolare l'area del quadrato usando coordinate polari.



L'area è due volte l'area della metà inferiore.

$$\iint_{\{x \in \mathbf{R}^2: x \in [0,1], 0 \leq y \leq x\}} dx dy = \iint_{\{(t,\rho) \in \mathbf{R}^2: t \in [0, \pi/4], 0 \leq \rho \leq 1/\cos t\}} \underbrace{\rho}_{\text{iacobiano}} d\rho dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos t} \rho d\rho dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{1/\cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'area è due volte la quantità trovata. ●●

**105 min. Lezione del 02/10/2018 funzioni di più variabili, integrazione**

Applicazioni delle coordinate polari nel piano. In particolare calcolo dell'integrale (volume della

sfera)  $2 \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy$

Esempio 7 pag.16. Esempio 9 pag.19. Pag.20, 21. Pag.22 da "Per sezioni" fino alla fine. Pag.24-25 con esclusione delle coordinate cilindriche. Calcolo del volume della sfera usando coordinate sferiche.

♠ Calcolo dell'integrale  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} |x - y| dx dy dz$

Calcolo del volume dell'insieme definito da  $D = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^3: 4(x-1)^2 + 2y^2 \geq 1, \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 9, 0 \leq z \leq x^2 + 2y^2 \}$

Calcolare il volume dell'insieme definito da  $D = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2(x^2 + y^2) \}$  (Si integri per strati)

Calcolo dell'integrale  $\iiint_D z^2 dx dy dz$  e  $D = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2(x^2 + y^2) \}$  (Si integri per strati) ♠♠

**105 min. Lezione del 04/10/2018 funzioni di più variabili, integrazione**

Coordinate cilindriche a pag.25 delle dispense di Tauraso.

Calcolo del volume dell'insieme definito da  $D = \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq 2(x^2 + y^2) \}$  in due modi diversi.

Primo modo. Si sono usate le coordinate polari sferiche ed il calcolo si trova a pag.298-299 del Marcellini-Sbordone. Ad ogni modo lo riportiamo qui. Dopo aver posto  $x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $z = \rho \cos \vartheta$  osserviamo che  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$  (sfera piena di centro  $(0, 0, 1)$  e raggio 1) genera  $\rho \leq 2 \cos \vartheta$ , mentre  $z \leq 2(x^2 + y^2)$  (paraboloide) genera  $\rho \geq \frac{\cos \vartheta}{2 \sin^2 \vartheta}$ .

Osserviamo che l'insieme di cui vogliamo calcolare il volume giace nel semipiano superiore delle  $z$  e quindi  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ . Ciò garantisce che  $\cos \vartheta \geq 0$  altrimenti  $\rho \leq 2 \cos \vartheta$ , non può essere vera. Inoltre deve essere  $\frac{\cos \vartheta}{2 \sin^2 \vartheta} \leq 2 \cos \vartheta$  da cui  $\pi/6 \leq \vartheta \leq \pi/2$ . Quindi l'integrale è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\vartheta \int_{\frac{\cos \vartheta}{2 \sin^2 \vartheta}}^{2 \cos \vartheta} d\rho \rho \sin \vartheta = \frac{9\pi}{16}$$

Secondo modo. Coordinate cilindriche.  $x = \rho \cos t$ ,  $y = \rho \sin t$ ,  $z = u$ . La sfera ed il paraboloide di intersecano sul piano la cui equazione si ottiene risolvendo il sistema  $\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0, z - 2(x^2 + y^2) = 0 \}$ . Eliminando  $x^2 + y^2$  si ottiene  $z = 0$ ,  $z = 3/2$ . L'intersezione è una circonferenza di raggio  $\sqrt{3/2}$   $\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0 \}$  dà  $\rho^2 \leq 2u - u^2$  mentre  $z \leq 2(x^2 + y^2)$  dà

$$\rho^2 \geq u/2 \text{ e quindi l'integrale è } \int_0^{2\pi} dt \int_0^{3/2} du \int_{\sqrt{u/2}}^{\sqrt{2u-u^2}} d\rho \rho = \frac{9\pi}{16}$$

● Volumi di rotazione. Nel piano  $(z, y)$  si abbia un insieme chiuso e limitato (ad esempio un poligono) che non intersechi né l'asse  $z$  né l'asse  $y$  e lo si ruoti intorno all'asse  $z$  di  $\alpha$  radianti. Il volume della regione ottenuta è

$$\alpha \iint_D y dy dz$$

Se invece ruotiamo intorno all'asse  $y$  abbiamo

$$\alpha \iint_D z \, dy \, dz$$

**Ragionamento intuitivo** Sia  $C_{y,z}$  la circonferenza ottenuta a partire da  $(y, z)$  e ruotando di 360 gradi intorno a  $z$ . Possiamo pensare che il volume di rotazione sia  $\bigcup_{y,z \in D} C_{y,z}$ . Un facile disegno

mostra che se  $(y', z') \neq (y, z)$  allora  $C_{y',z'} \cap C_{y,z} = \emptyset$ . Per il calcolo del volume dovrei "sommare" la lunghezza di tutte le circonferenze  $C_{y,z}$  al variare di  $(y, z)$  in  $D$ . Ciascuna circonferenza è lunga  $2\pi y$  e la "somma" è  $\iint_D 2\pi y \, dy \, dz$  appunto.

Se la rotazione avviene intorno all'asse  $y$ , allora il volume è

$$2\pi \iint_D z \, dy \, dz$$

**Superfici** Sia  $\underline{\varphi}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  (ci limitiamo a superfici che dipendono da due parametri ed il cui grafico è contenuto in  $\mathbf{R}^3$ .)

**Definizione** Sia  $D = \overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$  un insieme in  $\mathbf{R}^2$  e sia  $\underline{\varphi}$  una applicazione da  $D$  a valori in  $\mathbf{R}^3$ .  $\underline{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))$  con le seguenti condizioni: *i)*  $\alpha, \beta, \gamma, \in C^1(D; \mathbf{R})$  *ii)*

il rango della matrice  $J = \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}$  è due *iii)*  $(u, v) \neq (u', v')$  implica  $\underline{\varphi}(u, v) \neq \underline{\varphi}(u', v')$

per ogni  $(u, v), (u', v') \in \overset{\circ}{D}$

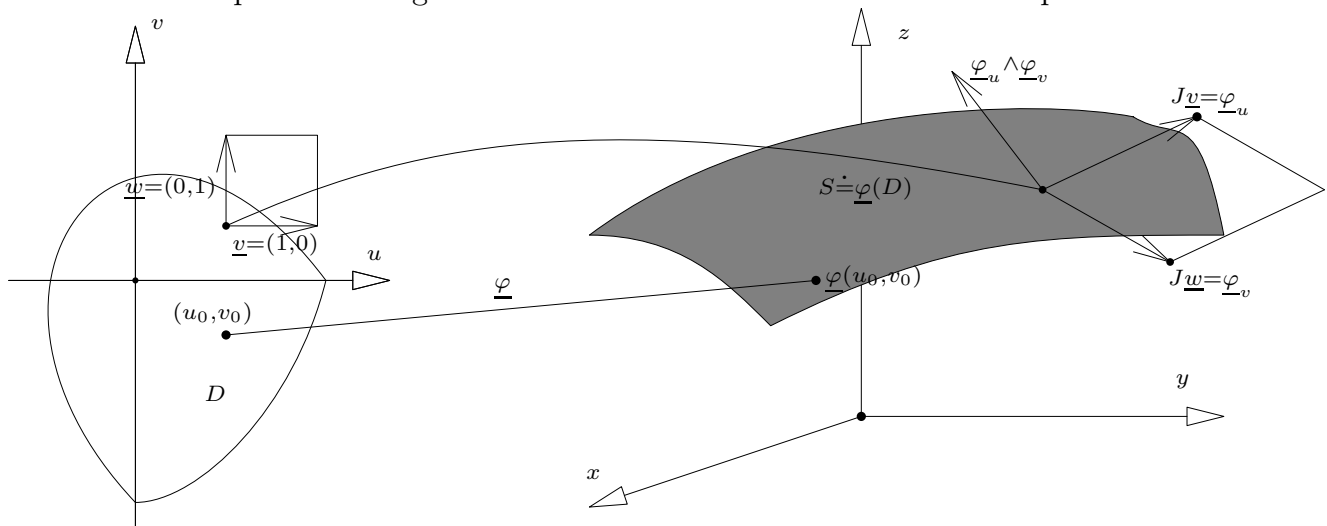
La *ii)* è equivalente a dire è la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine due è non nulla ossia

$$\sqrt{\left| \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix} \right|^2} \neq 0$$

La superficie descritta è detta regolare.

Sia  $I_1 = \left| \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} \right|$ ,  $I_2 = \left| \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix} \right|$ ,  $I_3 = \left| \begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix} \right|$

**Osservazione1** La matrice  $J$  definisce un operatore lineare che manda vettori a due componenti in vettori a tre componenti. Il fatto che il rango della matrice sia due, significa che due vettori linearmente indipendenti vengono mandati in due vettori linearmente indipendenti.



La matrice  $J$  applicata al vettore  $(1, 0)$  produce il vettore  $\underline{\varphi}_u \doteq (\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$  mentre applicata al vettore  $(0, 1)$  produce  $\underline{\varphi}_v \doteq (\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$

$$\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_u & \beta_u & \gamma_u \\ \alpha_v & \beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \underline{i}(\beta_u\gamma_v - \beta_v\gamma_u) - \underline{j}(\alpha_u\gamma_v - \gamma_u\alpha_v) + \underline{k}(\alpha_u\beta_v - \beta_u\alpha_v)$$

per cui il modulo delle componenti del prodotto vettoriale corrispondono a  $(I_1, I_2, I_3)$ . Il rettangolo definito dai vettori  $\underline{\varphi}_u$  e  $\underline{\varphi}_v$  giace sul piano tangente alla superficie e la sua area è pari a  $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$ . L'equazione del piano tangente a  $(x_0, y_0, z_0)$  è data da  $(\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot (\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v)(u_0, v_0) = 0$  dove  $\underline{x}_0 = \underline{\varphi}(u_0, v_0)$ .

**Definizione** Si definisce *area della superficie* l'integrale doppio  $\iint_D dudv \underbrace{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}_{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$  ed

a volte lo si indica con  $\iint_S d\sigma$  dove  $S$  è il grafico della superficie in questione.

Si possono risolvere gli esercizi di Tauraso fino a pag.12.

♠ Calcolare il volume  $|V|$  della regione definita da  $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3: z \geq 5x^2 + 2y^2 - 4xy, z \leq x + 2y + 1\}$ . [R.  $27\sqrt{6}\pi/64$ ] ♠♠

♠ **Una soluzione alternativa dell'esercizio 12 a pag.8 dell'eserciziario di Tauraso**  
 Poniamo  $x = 0$ . Le equazione dei due cilindri diventano  $y^2 \leq r^2, z^2 \leq r^2$ . Ne segue che l'insieme il cui volume stiamo cercando, si proietta ad  $x = 0$  nell'insieme  $|y| \leq r$  e  $|z| \leq r$  che è un quadrato di lato  $2r$  (chiaramente nel piano  $x = 0$ ). Se  $0 \leq x_0 \leq r$  si proietta nel quadrato di lato  $2\sqrt{r^2 - x_0^2}$  Integrando per strati il volume è quindi  $\int_{-r}^r 4(x_0^2 - r^2)dx_0 = \frac{16}{3}r^3$ . ♠♠

♠ Si calcoli l'area della superficie che contorna l'insieme  $x^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 \leq r^2$ .

**Soluzione**

Parametizziamo la superficie  $x^2 + y^2 = r^2$  nella parte  $y \geq 0$  come

$$\begin{cases} x = t, & -r \leq t \leq r \\ z = s, & -\sqrt{r^2 - t^2} \leq s \leq \sqrt{r^2 - t^2} \quad [\text{viene da } x^2 + z^2 \leq r^2] \\ y = \sqrt{r^2 - t^2}, \end{cases}$$

Nella parte  $y \leq 0$  abbiamo

$$\begin{cases} x = t, & -r \leq t \leq r \\ z = s, & -\sqrt{r^2 - t^2} \leq s \leq \sqrt{r^2 - t^2} \quad [\text{viene da } x^2 + z^2 \leq r^2] \\ y = -\sqrt{r^2 - t^2}, \end{cases}$$

e la somma degli integrali dà  $2 \int_{-r}^r dt \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} ds \frac{r}{\sqrt{r^2-t^2}} = 8r^2$ .

Poi bisogna parametrizzare quella parte di superficie che giace sul cilindro  $x^2 + z^2 = r^2$  e quindi

$$\begin{cases} x = t, & -r \leq t \leq r \\ y = s, & -\sqrt{r^2 - t^2} \leq s \leq \sqrt{r^2 - t^2} \quad [\text{viene da } x^2 + y^2 \leq r^2] \\ z = \sqrt{r^2 - t^2}, \end{cases}$$

Nella parte  $y \leq 0$  abbiamo

$$\begin{cases} x = t, & -r \leq t \leq r \\ y = s, & -\sqrt{r^2 - t^2} \leq s \leq \sqrt{r^2 - t^2} \quad [\text{viene da } x^2 + y^2 \leq r^2] \\ z = -\sqrt{r^2 - t^2}, \end{cases}$$

La somma degli integrali dà lo stesso contributo per cui il risultato finale è  $16r^2$ .

Un secondo modo di calcolare la superficie è il seguente. Parametizziamo il cilindro  $x^2 + y^2 = r^2$  come  $x = r \cos t, y = r \sin t, z = u$  la cui normale esterna è diretta parallelamente al piano  $(x, y)$  ed ha modulo  $r$ .  $x^2 + z^2 \leq r^2$  ci dà  $u^2 \leq r^2 \sin^2 t$ . L'area che cerchiamo è  $2 \cdot r \cdot \int_0^\pi dt \int_{-r \sin t}^{r \sin t} du = 8r^2$ . Considerando anche l'altra superficie, quella appartenente al cilindro di equazione  $x^2 + z^2 = r^2$  si ha il risultato. ♠♠

### 105 min. Lezione del 08/10/2018 funzioni di più variabili, integrazione

• Calcolo dell'area della superficie della sfera di raggio  $r$ . Usiamo coordinate polari sferiche.  $x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta$

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \|\underline{\varphi}_\varphi \wedge \underline{\varphi}_\vartheta\| d\vartheta d\varphi \underset{D=[0,\pi] \times [0,2\pi)}{=} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta r^2 \sin \vartheta = 4\pi r^2$$

••

• Nozione di *superficie cartesiana* ossia il grafico della superficie  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$ ). In tal caso la parametrizzazione è del tutto ovvia,  $x = \alpha(u, v) = u, y = \beta(u, v) = v, z = \gamma(u, v) = f(u, v)$ . In forma vettoriale si ha  $u\underline{i} + v\underline{j} + f(u, v)\underline{k}$ ;  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$ ;  $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} =$

$\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$ . Se  $f(x, y) \in C^1(D)$  allora la superficie cartesiana soddisfa tutte le tre condizioni *i), ii)* e *iii)*. Infatti la *i)* è chiaramente verificata. Per la *ii)* basta verificare ad esempio che la matrice  $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$  è  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Inoltre la *iii)* è verificata sempre grazie al fatto che sia la prima che la seconda componente della superficie è data da funzioni iniettive. ••

Formula a pag.30 delle dispense di Tauraso sull'area di una superficie cartesiana

• Calcolo della superficie cartesiana di equazione  $z = x^2 + y^2$  con la condizione  $x^2 + y^2 \leq r^2$

Primo modo. Parametizzando la superficie in coordinate cartesiane si ha

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} dx dy \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} = \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} = \frac{\pi}{6} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}$$

Secondo modo. Parametizziamo la superficie in coordinate cilindriche. Prima parametrizziamo il volume in  $\mathbf{R}^3$ :  $x = \rho \cos t, y = \rho \sin t, z = u$ .  $x^2 + y^2 = z$  implica  $u = \rho^2$  e  $x^2 + y^2 \leq r^2$  implica  $\rho \leq r$ . Quindi la superficie diventa  $x = \rho \cos t, y = \rho \sin t, z = \rho^2$  da cui

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^r d\rho \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}$$

Terzo modo. Coordinate polari sferiche. Il volume è parametrizzato da  $x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi, y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi, z = \rho \cos \vartheta$ .  $x^2 + y^2 = z$  ci dà  $\rho^2 \sin^2 \vartheta = \rho \cos \vartheta$  ossia  $\rho = \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$  e quindi la superficie diventa

$$x = \cot \vartheta \cos \varphi, \quad y = \cot \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cot^2 \vartheta$$

Inoltre  $x^2 + y^2 \leq r^2$  diventa  $\tan^2 \vartheta \geq 1/r^2$  ossia ( $\vartheta \in [0, \pi/2)$ )  $\arctan 1/r \leq \vartheta \leq \pi/2$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \vartheta} & -\frac{\sin \varphi}{\tan \vartheta} \\ -\frac{\sin \varphi}{\sin^2 \vartheta} & -\frac{\cos \varphi}{\tan \vartheta} \\ -\frac{2 \cos \varphi}{\sin^3 \vartheta} & 0 \end{pmatrix} \text{ per cui l'integrale da calcolare è}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arctan \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \sqrt{1 + 4 \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta}}$$

Poniamo  $\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = u$  da cui

$$2\pi \int_r^0 (-u) \sqrt{1 + 4u^2} du$$

••

• Calcolo del potenziale elettrico generato da una sfera in un punto interno ed esterno alla sfera.

Sia  $S$  la sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  (vuota all'interno).  $\underline{y}_0 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$  un punto dello spazio. Il potenziale nel punto  $\underline{y}_0$  generato da un "pezzettino" della sfera intorno al punto della sfera  $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  è dato da ( $\delta$  è la densità di carica elettrica o gravitazionale ossia densità di massa che assumiamo costante)

$$\frac{\delta d\sigma}{\text{dist}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)} = \frac{\delta \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| dudv}{\text{dist}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)} =$$

Il potenziale generato dalla sfera in  $\underline{y}_0$  è  $I = \iint_S \frac{\delta d\sigma}{\text{dist}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)}$ . Con la parametrizzazione in coordinate polari *avente l'asse z posto lungo la retta congiungente il centro di  $V$  con il punto  $\underline{y}_0$* , l'integrale diventa

$$r^2 \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 2r\zeta \cos \vartheta + \zeta^2}} = \frac{2\pi r \delta}{\zeta} (|r + \zeta| - |r - \zeta|)$$

Se  $\zeta > r$  abbiamo  $I = \frac{4\pi r^2 \delta}{\zeta} = \frac{Q}{\zeta}$  dove  $Q = 4\pi r^2$  è la carica della superficie sferica. Se  $\zeta < -r$  la formula è la stessa  $I = \frac{Q}{-\zeta}$ . Se  $|\zeta| < r$  abbiamo  $I = 4\pi \delta r$ . Come si vede, in ambedue i casi le dimensioni del risultato sono pari a una massa fratto una distanza. Inoltre all'interno della sfera non vi è campo gravitazionale ossia un corpo materiale non sarebbe soggetto ad alcuna forza. ••

Definizione di baricentro (Tauraso lo chiama "valore medio") di un volume e di una superficie (anche piana)

$$\underline{b} \doteq \frac{\iiint_D \underline{x} dx dy dz}{\iiint_D dx dy dz} \quad D \subset \mathbf{R}^3$$

$$\underline{b} \doteq \frac{\iint_S \underline{x} d\sigma}{\iint_S d\sigma} = \frac{\iint_D \underline{\varphi}(u, v) \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| dudv}{\iint_D \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| dudv} \quad D \subset \mathbf{R}^2$$

A pag.11 (esempio 5) delle dispense di Tauraso si trova la nozione di valore medio per una superficie piana. A pag.23 (esempio 11) e pag.27 (esempio 15) c'è il calcolo del valore medio di determinati volumi.

Nozione di centro di massa e momento di inerzia a pag.34.

## 105 min. Lezione del 09/10/2018 Curve, integrali curvilinei di prima specie

Pag.1 a "γ è iniettiva", sostituire la frase: *se per ogni t<sub>1</sub> ∈ I, t<sub>2</sub> ∈ I, t<sub>1</sub> e/o t<sub>2</sub> non appartenenti al bordo di I, allora γ̄(t<sub>1</sub>) ≠ γ̄(t<sub>2</sub>).*

Pag.2 escluso esempio 2). Nozione di curva regolare a pag.3 (prima formula della pagina ed anche  $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} x = g(t) \\ y = t \end{cases} \quad c \leq t \leq d.$

Pag.3 da "Una curva" a "tangente".

A pag.3 a  $\forall t \in I$  sostituire  $\forall t \in \overset{\circ}{I}$ . Pag.4 fino a "è finito". Pag.5,6 esempi 1 e 2. Pag.7 fino a  $\varphi' < 0$ . Pag.7 Teorema 1.

• Data la curva seguente curva  $y = \gamma_1(t)$ ,  $z = \gamma_2(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , si calcoli l'area della superficie ottenuta ruotando la curva intorno all'asse  $z$ . La superficie ottenuta si parametrizza come

$$x = \gamma_1(t) \cos \varphi, \quad y = \gamma_2(t) \sin \varphi, \quad z = \gamma_2(t), \quad a \leq t \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

La superficie è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \sqrt{\gamma_1^2((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2)} dt = 2\pi \int_a^b |\gamma_1| \cdot \|\underline{\gamma}'\| dt \doteq 2\pi \int_{\underline{\gamma}} |\gamma_1| ds$$

e come si vede abbiamo ottenuto l'integrale lungo la curva della lunghezza della circonferenza di raggio  $\gamma_1(t)$ .

Se ruotiamo intorno all'asse  $z$  abbiamo

$$x = \gamma_2(t) \cos \varphi, \quad y = \gamma_1(t), \quad z = \gamma_2(t) \sin \varphi, \quad a \leq t \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

e la superficie è La superficie è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \sqrt{\gamma_2^2((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2)} dt = 2\pi \int_a^b |\gamma_2| \cdot \|\underline{\gamma}'\| dt \doteq 2\pi \int_{\underline{\gamma}} |\gamma_2| ds$$

Applicazione della precedente formula all'area della semisuperficie superiore sferica di raggio  $r$ .

••  
 ♠ Dimostriamo la semplicità della curva  $(\cos t, \sin t)$   $0 \leq t \leq 2\pi$ . Non è semplice se  $(\cos t, \sin t) = (\cos t', \sin t')$  con  $t$  e/o  $t'$  appartenenti a  $(0, 2\pi)$ . Siano  $t, t' \neq \pi/2, 3\pi/2$ .  $(\cos t, \sin t) = (\cos t', \sin t')$  se e solo se  $\cos t(1, \frac{\sin t}{\cos t}) = \cos t'(1, \frac{\sin t'}{\cos t'})$  ossia  $\tan t = \tan t'$ . La tangente è crescente in  $(0, \pi)$  e  $(\pi, 2\pi)$  per cui deve aversi  $t \in (0, \pi)$  e  $t' = t + \pi$ . Quindi tornando indietro deve aversi  $(\cos t, \sin t) = (\cos(t + \pi), \sin(t + \pi))$  ma è impossibile in quanto  $\cos(t + \pi) = -\cos t$  oppure  $\sin(t + \pi) = -\sin t$ . Rimane il caso  $t = \pi/2$ . Affiché non sia semplice dovremmo avere  $(0, 1) = (\cos t', \sin t')$  con  $t' \neq \pi/2$ . Evidentemente è impossibile. Lo stesso accade per  $t = 3\pi/2$ .  
 ♠♠

**105 min. Lezione del 11/10/2018 Curve, integrali curvilinei di prima specie e seconda specie**

• Dimostrare che  $\int_{\underline{\gamma}} |xy| ds$  non cambia valore se l'integrale viene eseguito sulla curva  $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e sulla curva  $\underline{\sigma}(t) = \underline{\gamma}(-t)$ ,  $-2\pi \leq t \leq 0$ . ••

Pag.3 da "il vettore" fino alla fine. Caso particolare delle curve cartesiane.



Pag.4 da "f si dice integrabile" fino alla fine.

Esercizio num.4 pag.3 dell'eserciziario di Tauraso.

- Risoluzione dello stesso esercizio parametrizzando la superficie come  $x = u$ ,  $z = v$ ,  $y = u^2/4$ ,  $0 \leq v \leq 3u$ ,  $0 \leq u \leq 2$ . ••

Pag.11, Teorema 2 pag.15. Pag.17 fino a Teorema 3. Ultime tre righe di pag.17. Punto 1) del teorema 4 pag.22.

- Calcolo dell'integrale  $\int_{\underline{\gamma}} \omega$  dove  $\omega = x^2y^2dx + xydy$  per le due curve  $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t)$   $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (t, -t + 1)$   $0 \leq t \leq 1$ . ••

### 105 min. Lezione del 15/10/2018 Integrali curvilinei di seconda specie

Pag.16 paragrafo 4. Teorema 3 pag.17 senza dimostrazione. Osservazioni al Teorema 3 alle pagine 19 e 20. Esempio 11 pag.20. pag.21,22,23 fino a esempio 13 escluso. Esempio 14 pag.23, esempio 15 pag.24. Teorema 5 pag.26 senza dimostrazione.

- È data la forma differenziale  $\omega(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$ . Se ne trovi il dominio e si dica quanto valgono gli integrali curvilinei  $\oint_{\gamma} \omega$  dove  $\gamma$ , orientata in senso antiorario, è nell'ordine  $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ ,  $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$ ,  $\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x^2 + (y-1)^2 = 4\}$ , ••

### 105 min. Lezione del 16/10/2018 Integrali curvilinei di seconda specie e numeri complessi

- Data la forma differenziale in  $\mathbf{R}^2$   $\omega(x, y) = 4x^3ydx + (2y + x^4)dy$  calcolare  $\int_{\underline{\varphi}} \omega$  dove  $\underline{\varphi}$  è la curva  $\underline{\varphi}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$   $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} t \\ \arctan(\sin t) \end{cases}$  ••

- Usare la formula di Gauss–Green per calcolare l'area della regione racchiusa dalla curva data da  $(x^2 + y^2)^{3/2} + 2y^2 = x^2 + y^2$  ••

Numeri complessi. Pag.1 e 2 fino a "2) I Polinomi". Punto 4) pag.2, punto 5) pag.3

### 105 min. Lezione del 18/10/2018 Numeri complessi e funzioni complesse

Definizione di differenziabilità per funzioni di due variabili

Paragrafo 4) pag.7. Pag.5,6,7 fino a "analisi complessa". Ultime 2 righe di pag.7 e tutta pag.8. Esempio 1 pag.9.

### 105 min. Lezione del 22/10/2018 Numeri complessi e funzioni complesse

Pag.10,11- Primi due esempi dell'esercizio 2) a pag.12. Pag.13,14 fino a "Osservazione". Pag.15

### 105 min. Lezione del 23/10/2018 Numeri complessi e funzioni complesse

Pag.16. Pag.18–19 fino a Esempio 5 escluso. Osservazione pag.21. Pag.23–24 fino a "dunque converge".

- Teoremi del confronto: 1)  $0 \leq a_k \leq c_k$  e  $\sum c_k$  convergente, implica  $\sum a_k$  convergente, 2)  $0 \leq d_k \leq a_k$  e  $\sum d_k$  divergente, implica  $\sum a_k$  divergente. ••

• Dimostrazione attraverso il criterio del confronto con l'integrale che  $\sum 1/k^a$  diverge se  $a \leq 1$  e converge se  $a > 1$ .

• **Teorema** Sia  $a_k \geq 0$ . Se esiste  $p > 1$  tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^p a_k = l \neq +\infty$ , allora la serie  $\sum a_k$  converge.

*Dimostrazione* (non richiesta)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^p a_k = l \neq +\infty$  vuol dire che definitivamente  $l - \varepsilon < k^p a_k < l + \varepsilon$  da cui  $0 \leq a_k \leq (l + \varepsilon)k^{-p}$  e se  $p > 1$ , il criterio del confronto implica la convergenza della serie  $\sum a_k$ . ••

• **Teorema** Sia  $a_k \geq 0$ . Se esiste  $p \leq 1$  tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^p a_k = l \neq 0$ , allora la serie  $\sum a_k$  diverge.

*Dimostrazione* (non richiesta)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^p a_k = l \neq 0$  vuol dire che definitivamente  $l - \varepsilon < k^p a_k < l + \varepsilon$  da cui  $(l - \varepsilon)k^{-p} < a_k$  e se  $p \leq 1$ , il criterio del confronto implica la divergenza della serie  $\sum a_k$ . Notare come sia essenziale  $l \neq 0$  e quindi  $l > 0$ . Inoltre dovendo essere  $l - \varepsilon > 0$ , prendiamo, ad esempio,  $\varepsilon = l/2$  e quindi la relazione  $(l - \varepsilon)k^{-p} < a_k$  è vera solo da un certo  $n_{l/2}$  in poi ma il carattere di una serie non cambia se l'indice muto comincia da  $k = 1$  oppure  $k$  qualsiasi. ••

• Studio della convergenza o meno (carattere) della serie  $\sum 1/(k \ln k)$  e  $\sum 1/(k \ln^a k)$ . ••

### 105 min. Lezione del 25/10/2018 Numeri complessi e funzioni complesse

Pag.24 da "Uno strumento" a "Osservazione". Pag.25. Pag.26 fino a "dim." Pag.27-28 da "Prima".

**La lezione del 29/10/2018 è stata annullata causa maltempo**

**La lezione del 30/10/2018 è stata annullata causa maltempo**

### 105 min. Lezione del 5/11/2018 Numeri complessi e funzioni complesse

Pag.28 da "Osservazione" fino a pag.32, Esempio 1).

• Studio della serie di potenze  $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$  come serie di Taylor della funzione  $1/(1-z)$ .

Studio della serie di Taylor della funzione  $F(z)$  centrata in  $z_0 \neq 1$ . ••

• Serie di Laurent della funzione  $e^{\frac{1}{z}}$ ; della funzione  $1/z$ .

Serie di Taylor della funzione  $1/((z-1)(z-4))$  centrata in  $z = 0$ ,  $z = 3/2$ ,  $z = 6$ . ••

### 105 min. Lezione del 6/11/2018 Numeri complessi e funzioni complesse

Serie di Laurent della funzione  $f(z) = 1/(1-z)$  centrata in  $z_0 = 0$  e convergente per  $|z| > 1$ .

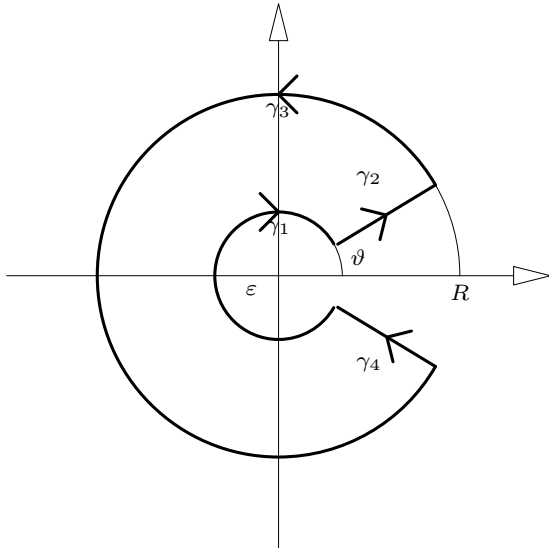
Pag.33,34,35. Teorema 10 pag.37. Esempio 13 pag.38. Pag.39 da "Osservazione" fino alla fine. Esempio 16 pag.40. Pag.41 e 42 fino a "Possiamo". Nel nostro caso abbiamo preso  $P(x) \equiv 1$ ,  $Q(x) = 1 + x^4$ .

### 105 min. Lezione del 8/11/2018 Numeri complessi e funzioni complesse

Pag. 42 dal punto 2). Pag.43, 44, 45, 46 fino a esempio 21.

- Calcolo di  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx, .$

Questo tipo di integrali non è presente nelle lezioni di Tauraso.



$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &= te^{i\vartheta} \quad \varepsilon \leq t \leq R \\ \gamma_3(t) &= Re^{it} \quad \vartheta \leq t \leq 2\pi - \vartheta \\ \gamma_4(t) &= -te^{i(2\pi - \vartheta)} \quad -R \leq t \leq -\varepsilon \\ \gamma_1(t) &= \varepsilon e^{-it} \quad \vartheta - 2\pi \leq t \leq -\vartheta \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} \rightarrow \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} \text{ con } z = |z|e^{i\vartheta} \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

Si esegua  $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz$  con  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$  e si dimostri che

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz = 0$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz \right| &= \left| \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \underbrace{(-i\varepsilon e^{-it})}_{dz} dt \frac{\varepsilon^{1/2} e^{-it/2}}{(1+\varepsilon^2 e^{-i2t})^2} \right| \leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} |(-i\varepsilon e^{-it})| dt \frac{|\varepsilon^{1/2}| \cdot |e^{-it/2}|}{|1+\varepsilon^2 e^{-i2t}|^2} \leq \\ &\leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \frac{\varepsilon^{3/2}}{1/2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz \right| = \left| \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \underbrace{(iRe^{it})}_{dz} dt \frac{R^{1/2} e^{it/2}}{(1+R^2 e^{i2t})^2} \right| \leq \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \frac{R^{3/2} dt}{(|R|^2 - 1)^2} = \frac{R^{3/2}}{(|R|^2 - 1)^2} (2\pi - 2\vartheta)$$

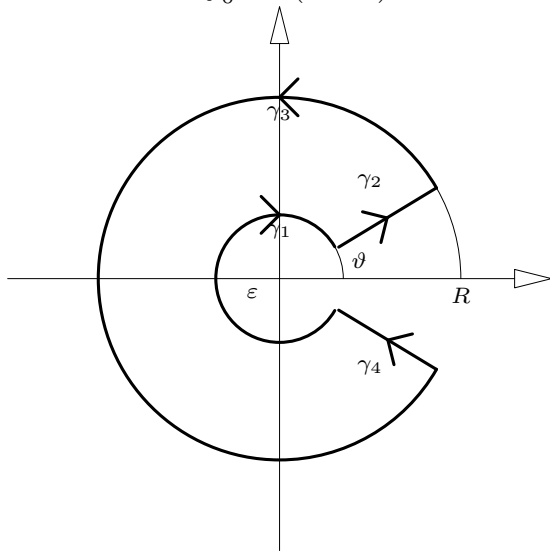
e tende a zero per  $R \rightarrow +\infty$ . Si è usato il fatto che  $|z + z'| \geq ||z| - |z'||$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \underbrace{-e^{i(2\pi-\vartheta)} dt}_{dz} \frac{(-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^{1/2}}{(1-t^2 e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} \stackrel{\tau=-t}{=} \int_{\varepsilon}^R e^{-i(2\pi-\vartheta)} (-d\tau) \frac{\sqrt{\tau} e^{-i(\pi-\vartheta/2)}}{(1+\tau^2 e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} = \\ &= \int_{\varepsilon}^R e^{-i(2\pi-\vartheta)} d\tau \frac{\sqrt{\tau} e^{-i\vartheta/2}}{(1+\tau^2 e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} \xrightarrow{\varepsilon, \vartheta \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

Quindi  $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i (\text{Res}_{z=-i} f(z) + \text{Res}_{z=i} f(z))$

Otteniamo  $2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \frac{\sqrt{z}}{(z+i)^2} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \frac{\sqrt{z}}{(z-i)^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

♠ Calcolo di  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$ ,



$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &= te^{i\vartheta} \quad \varepsilon \leq t \leq R \\ \gamma_3(t) &= Re^{it} \quad \vartheta \leq t \leq 2\pi - \vartheta \\ \gamma_4(t) &= -te^{i(2\pi-\vartheta)} \quad -R \leq t \leq -\varepsilon \\ \gamma_1(t) &= \varepsilon e^{-it} \quad \vartheta - 2\pi \leq t \leq -\vartheta \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \rightarrow \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} \text{ con } z = |z|e^{i\vartheta} \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

Si esegua  $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz$  con  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$  e si dimostri che

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz = 0$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz \right| &= \left| \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \underbrace{(-i\varepsilon e^{-it})}_{dz} dt \frac{\varepsilon^{1/2} e^{-it/2}}{(1+\varepsilon e^{-it})^2} \right| \leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} |(-i\varepsilon e^{-it})| dt \frac{|\varepsilon^{1/2}| \cdot |e^{-it/2}|}{|1+\varepsilon e^{-it}|^2} \leq \\ &\leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \frac{\varepsilon^{3/2}}{1/2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz \right| = \left| \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \underbrace{(iRe^{it})}_{dz} dt \frac{R^{1/2} e^{it/2}}{(1+Re^{it})^2} \right| \leq \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \frac{R^{3/2} dt}{(|R|-1)^2} = \frac{R^{3/2}}{(|R|-1)^2} (2\pi - 2\vartheta)$$

e tende a zero per  $R \rightarrow +\infty$ . Si è usato il fatto che  $|z+z'| \geq ||z|-|z'||$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \underbrace{-e^{i(2\pi-\vartheta)} dt}_{dz} \frac{(-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^{1/2}}{(1-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^2} \stackrel{\tau=-t}{=} \int_{\varepsilon}^R e^{-i(2\pi-\vartheta)} (-d\tau) \frac{\sqrt{\tau} e^{-i(\pi-\vartheta/2)}}{(1+\tau e^{-i(2\pi-\vartheta)})^2} = \\ &= \int_{\varepsilon}^R e^{-i(2\pi-\vartheta)} d\tau \frac{\sqrt{\tau} e^{-i\vartheta/2}}{(1+\tau e^{-i(2\pi-\vartheta)})^2} \xrightarrow{\varepsilon, \vartheta \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = 2\pi i \text{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i \frac{d}{dz} \sqrt{z} \Big|_{z=e^{i\pi}} = \\ &= 2\pi i \frac{1}{2} \frac{1}{e^{i\pi/2}} = \pi \end{aligned}$$

**Si badi bene:** se si fosse scritto  $2\pi i \text{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i \frac{d}{dz} \sqrt{z} \Big|_{z=e^{-i\pi}} = 2\pi i \frac{1}{2} \frac{1}{e^{i\pi/2}} = -\pi$  ed è chiaramente sbagliato. Il motivo per cui bisogna prendere  $-1 = e^{i\pi}$  è dovuto al fatto che gli angoli sono maggiori di zero e minori di  $2\pi$ . ♠♠

♠ Calcolare  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx$ ,  
 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}(1+x^2)} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x^2)^2} dx$ ,  
 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)(1+x^2)} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)(1+x^2)^2} dx$ ,  
 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(1+x^2)^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^3} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(1+x^2)^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{1+x^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(1+x+x^2)^2} dx$ ,  
 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x+x^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^4} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^6} dx$ , ♠♠

**105 min. Lezione del 12/11/2018 Numeri complessi e funzioni complesse**

• Calcolo dell'integrale  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+a^3} (a > 0)$  Si adotti lo stesso cammino "a pacman" della lezione precedente e si integri la funzione  $\frac{z\text{Ln}(z)}{z^3+a^3}$ . Si ottiene

$$-2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3+a^3} = 2\pi i \sum \text{Res} \frac{z\text{Ln}(z)}{z^3+a^3}$$

$z^3 = -a^3$  per  $z_0 = ae^{i\frac{\pi}{3}}$   $z_1 = ae^{i\pi}$ ,  $z_2 = ae^{i\frac{5\pi}{3}}$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} -I &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)z\text{Ln}(z)}{z^3+a^3} + \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z-z_1)z\text{Ln}(z)}{z^3+a^3} + \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z-z_2)z\text{Ln}(z)}{z^3+a^3} = \sum_{i=0}^2 \frac{\text{Ln}(z_i)}{3z_i^2} = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{\ln a + i\frac{\pi}{3}}{a^2} e^{-i\frac{2\pi}{3}} + \frac{\ln a + i\pi}{a^2} e^{-2i\pi} + \frac{\ln a + i\frac{5\pi}{3}}{a^2} e^{-i\frac{4\pi}{3}} \right] = \\ &= \frac{\ln a}{3a^2} \cdot 0 + \frac{1}{3a^2} \left[ \frac{i\pi}{3} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\pi + \frac{i5\pi}{3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] \implies I = \frac{2}{9a^2} \pi \sqrt{3} \end{aligned}$$

**Osservazione** Si sarebbe sbagliato prendendo  $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

In tale classe di integrali rientrano quelli della forma  $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ,  $P, Q$  polinomi,  $Q(x) \neq 0$ , e  $P(x)/Q(x)$  funzione non pari. Se fosse pari opereremmo  $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  e useremmo il cammino di pagina 41 delle dispense di Tauraso.●●

♠  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x^3+1)}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x+1)}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(x^2-x+1)}$ ,  
 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(x^2+x+1)}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x^2+x+1)}$ . ♠♠

• Valor principale di un integrale (V.P.) (non presente sulle dispense di Tauraso e non so se è presente nelle videolezioni; ne dubito).

La nozione di V.P. viene da Cauchy ed infatti sono anche detti integrali secondo Cauchy. Conviene partire da un esempio:  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+x+1} dx$ . La sua definizione è la seguente

$$I = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 f(x) dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx$$

**Si eseguono gli integrali, poi si eseguono i due limiti e poi si somma .**

È facile verificare che sia il primo che il secondo limite tendono a  $+\infty$  per cui l'integrale improprio non esiste. Infatti ad esempio il secondo dà

$$\frac{1}{2} \ln(A^2 + A + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$$

È inessenziale calcolare il secondo integrale ai fini della verifica dell'esistenza dell'integrale improprio.

Cambiamo prescrizione ed eseguiamo

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \int_{-A}^0 f(x) dx + \int_0^A f(x) dx \right)$$

**Si pone  $B = -A$ , si eseguono gli integrali, si somma e poi si esegue il limite**

In tal caso si ottiene

$$-\frac{1}{2} \ln(A^2 - A + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left( +\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \ln(A^2 + A + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

La nozione di V.P. si estende anche ad integrali impropri che divergono nell'intorno di un punto.

Si voglia calcolare ad esempio l'integrale ( $a < 0, b > 0$ )  $\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{r \rightarrow 0^-} \int_a^r \frac{dx}{x} + \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^b \frac{dx}{x}$  e chiaramente nessuno dei due esiste.

La nozione di V.P. prevede che si operi

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{-r} \frac{dx}{x} + \int_r^b \frac{dx}{x} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} (\ln(r) - \ln(-a) + \ln(b) - \ln(r)) = \ln \frac{b}{|a|}$$

e come si vede, risulta un ben preciso valore.

Se invece di  $1/x$  si fosse preso  $1/|x|$ , anche l'integrale con il V.P. non avrebbe dato un risultato finito. Infatti avremmo ottenuto

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{-r} \frac{dx}{-x} + \int_r^b \frac{dx}{x} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} (-\ln(r) + \ln(-a) + \ln(b) - \ln(r)) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} +\infty$$

Esercizio

$$\begin{aligned} J &\doteq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx \doteq I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

$I_2$  non è in realtà un integrale improprio in quanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$  ed inoltre

$$\left| \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} \right| \leq \frac{1}{x^3}$$

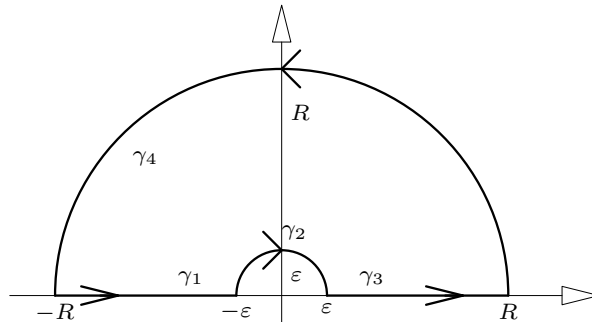
per cui anche  $I_1$  ed  $I_3$  convergono. L'integrale improprio  $J$  dunque esiste ma per poterlo calcolare dobbiamo scrivere la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx = \text{Im} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx \right)$$

ed a questo punto l'origine diventa un punto di singolarità per la funzione da cui la necessità di definire l'integrale solo come valor principale ossia

$$VP \text{Im} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx \right)$$

Il cammino su cui integrare è il seguente se  $a > 0$  e quello opposto (che gira in senso orario) se  $a < 0$ .



Eseguendo gli integrali e prendendo i limiti  $\varepsilon \rightarrow 0$   $R \rightarrow +\infty$ , si ottiene

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}]{} \left( VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx \right) - i\pi \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} \Big|_{z=0}$$

e quindi

$$\left( VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx \right) - i\pi \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} \Big|_{z=0} = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} \right) = 2\pi i \frac{e^{iaib}}{ib2ib}$$

da cui

$$\left( VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx \right) = 2\pi i \frac{e^{iaib}}{ib2ib} + i\frac{\pi}{b^2} = i\frac{\pi}{b^2} (1 - e^{-ab})$$

La parte immaginaria è  $\frac{\pi}{b^2} (1 - e^{-ab})$  ed è il valore dell'integrale cercato. Notare che per  $a \rightarrow 0$ , il risultato tende a zero come ci aspettiamo che sia ponendo  $a = 0$  nell'integrale originale. Se invece  $b \rightarrow 0$ , il risultato è illimitato come ci si aspetta dal fatto che l'integrale originario diventa un integrale improprio non convergente.

**Ove non fosse chiaro, siamo passati da  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx$  a  $\text{Im} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx \right)$  in quanto  $\sin z$ , è illimitata sia nel semipiano superiore che nel semipiano inferiore e quindi ci sarebbe impossibile usare la variabile complessa ••**

♠ Esercizi sul valor principale.  $VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(ax^2 + bx + c)} dx$  con  $b^2 - 4ac < 0$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{a}{|a|}$$

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ix}}{x^2(x^2 + b^2)} dx = \pi \frac{1 - a}{b^2} + \frac{\pi}{b^2} (e^{-b} - e^{-ab})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 - x + 1)} dx = \pi + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} (|b| - |a|)$$

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x(x^2 + b^2)} dx,$$

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x(x^2 - x + 1)} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}} \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Calcoliamo il primo integrale.  $az^2 + bz + c = 0$  se e solo se  $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \doteq \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  e  $z_1 - z_2 = i\sqrt{-\Delta}/a$ .

$$I = \frac{i\pi}{c} + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(az^2 + bz + c)}\right)\Big|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{c} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{z_1(z - z_1)(z - z_2)} =$$

$$= \frac{i\pi}{c} + \frac{2\pi i}{a \frac{i\sqrt{-\Delta}}{a} \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}} = \frac{i\pi}{c} + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \frac{4a\pi}{-b + i\sqrt{-\Delta}} = \frac{i\pi}{c} + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \frac{4a\pi(-b - i\sqrt{-\Delta})}{4ac} =$$

$$= \frac{-\pi b}{\sqrt{4ac - b^2}c}$$



• Calcolare gli integrali  $\oint \frac{Imz}{1+z^2} dz$  e  $\oint \frac{Rez}{1+z^2} dz$  estesi al segmento di estremi  $-2-2i$  e  $2+2i$  ed alla semicirconfenza di raggio  $2\sqrt{2}$  che collega i precedenti punti. Il cammino è percorso in senso antiorario.

*Soluzione (non unica) solo del primo*

Il segmento è parametrizzato da  $z(t) = 2(1+i)t$  e l'integrale diventa

$$\int_{-1}^1 \frac{2t}{1+4(2i)t^2} 2(1+i) dt = \int_{-1}^1 \frac{4(1+i)t}{1+8it^2} dt = \frac{1+i}{4i} \operatorname{Ln}(1+8it^2)\Big|_{-1}^1 = 0$$

in quanto l'argomento del logaritmo assume lo stesso valore agli estremi. La parte di semicerchio è data da  $z(t) = 2\sqrt{2}e^{it}$  e l'integrale diventa  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{2\sqrt{2} \sin t}{1+8e^{2it}} 2\sqrt{2}ie^{it} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{e^{it} - e^{-it}}{1+8e^{2it}} 4e^{it} dt$ . Cambiamo varia-

bile  $2t = u$  per cui  $2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} du \frac{e^{iu} - 1}{1+8e^{iu}} = \frac{1}{4i} \operatorname{Ln}(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} du \frac{e^{-iu}}{e^{-iu} + 8} = \frac{1}{4i} \operatorname{Ln}(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} + \frac{2}{i} \operatorname{Ln}(e^{-iu} + 8)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{2\pi i}{4i} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Con  $\oint \frac{Re(z)}{1+z^2} dz$  si ha  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} i \frac{e^{it} + e^{-it}}{1+8e^{2it}} 4e^{it} dt = i\frac{\pi}{2} + 0$ .

Come conseguenza otteniamo  $\oint \frac{Re(z) + iIm(z)}{1+z^2} dz = \oint \frac{z}{1+z^2} dz = i\pi$ . L'ultimo integrale si può risolvere anche attraverso il teorema di Cauchy scrivendo  $\oint \frac{z}{1+z^2} dz = \oint \frac{dz}{2(z-i)} + \frac{dz}{2(z+i)}$ . Il secondo integrale è zero lasciando la curva fuori il punto  $z = i$ . Il primo integrale è pari a  $2\pi i \frac{1}{2}$ .



*Osservazione* È importante notare come sarebbe un errore scrivere  $\frac{1}{4i} \text{Ln}(1+8e^{iu}) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{1}{4i} \text{Ln}(1+8e^{i\frac{5}{2}\pi}) - \frac{1}{4i} \text{Ln}(1+8e^{i\frac{\pi}{2}}) = 0$  in quanto non si tiene conto del fatto che la curva  $1+8e^{i\frac{5}{2}\pi}$  gira intorno all'origine al contrario della curva  $e^{-iu}+8$  ●●

**105 min. Lezione del 13/11/2018 Trasformata di Laplace**

Pag.1,2,3,4,5 fino al punto 6) escluso. Pag.8 punto 2.

**105 min. Lezione del 15/11/2018 Trasformata di Laplace**

Pag.9, pag.10 dal paragrafo 3), pag.11, pag.12, pag.15, pag.15 esempio 8. Pag.13 esempio 21 degli esercizi.

• Equazione differenziale  $mx''(t) = A\delta(t-t_0)$ ,  $t_0 > 0$ , e  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = b$ .

$\mathcal{L}(x')(p) = \mathcal{L}(x)(p) - a$ ,  $\mathcal{L}(x'')(p) = p\mathcal{L}(x')(p) - x'(0) = p^2\mathcal{L}(x)(p) - pa - b$ ,  $\mathcal{L}(\delta(t-t_0)) = e^{-pt_0}$  per cui l'equazione diventa

$$mp^2\mathcal{L}(x)(p) - mpa - mb = Ae^{-pt_0} \implies \mathcal{L}(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{Ae^{-pt_0}}{mp^2}$$

e quindi

$$x(t) = a + bt + \frac{A}{m}(t-t_0)u(t-t_0)$$

**Sarebbe un grave errore, tale da invalidare l'esercizio in sede d'esame, scrivere  $x(t) = a + bt + \frac{A}{m}(t-t_0)$**

**105 min. Lezione del 19/11/2018 Esercizi su tutto il programma**

Pagina 7 escluso esempio 3).

• Risolvere l'equazione differenziale  $\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \\ x(0) = a, x'(0) = b \end{cases}$  e  $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT)$  Si dimostri che se  $\omega T \neq 2n\pi$  per ogni  $n$  intero allora la soluzione è limitata mentre se accade il contrario allora diventa illimitata.

Al solito si ottiene  $X(p) = \frac{\mathcal{L}(f) + pa + b}{p^2 + \omega^2}$  e  $\mathcal{L}(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pTk} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}$  e quindi

$$x(t) = \sum_{\pm} Res\left(\frac{e^{pt}(pa+b)}{p^2 + \omega^2} + \frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\right) \Big|_{\pm i\omega} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res\left(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\right) \Big|_{p=i\frac{2k\pi}{T}};$$

$$\sum_{\pm} Res\left(\frac{e^{pt}(pa+b)}{p^2 + \omega^2}\right) \Big|_{\pm i\omega} = a \cos(\omega t) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega t);$$

$$\sum_{\pm} Res\left(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\right) \Big|_{\pm i\omega} = \frac{e^{i\omega(t+T)}}{2i\omega(e^{i\omega T} - 1)} - \frac{e^{-i\omega(t+T)}}{2i\omega(e^{-i\omega T} - 1)} = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t+T));$$

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{e^{pT} - 1} = \frac{1}{T} \text{ e quindi } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res\left(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}\right) \Big|_{p=i\frac{2k\pi}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{T e^{2k\pi i \frac{t}{T}}}{(\omega T)^2 - (2k\pi)^2} \text{ e}$$

la serie è assolutamente convergente. La serie stessa è anche pari a  $\frac{1}{\omega^2 T} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2T \cos 2k\pi \frac{t}{T}}{(\omega T)^2 - (2k\pi)^2}$

Si faccia attenzione al cammino di integrazione con cui chiudere l'integrale

$x(t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp \frac{e^{p(t+T)}}{(p^2 + \omega^2)(e^{pT} - 1)}$ . Infatti le singolarità dell'integrando si trovano sull'asse immaginario ma non sono limitate né dall'alto né dal basso. Si prende allora una successione di cammini di integrazione siffatti:

$$\gamma_k^1(t) = it \text{ per } -\frac{\pi}{T}(2k+1) \leq t \leq \frac{\pi}{T}(2k+1) \text{ e } \gamma_k^2(t) = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2(2k+1)^2} e^{i\varphi} \text{ con } \arctan \frac{\pi}{T} \frac{2k+1}{a_0} \leq \varphi \leq 2\pi - \arctan \frac{\pi}{T} \frac{2k+1}{a_0} \bullet\bullet$$

Dal file

<http://www.mat.uniroma2.it/perfetti/didattica/analisi-II-frontale-2015-2016-ing-informatica/Giornale-delle-lezioni-e-materiale-non-presente-ing-informatica-analisi-II-2015-2016.pdf>  
sono stati risolti: pag.31 esercizio 2 e a pag.43 esercizio 4.

**105 min. Lezione del 20/11/2018 Esercizi su tutto il programma**

**Ultimo giorno di lezione per Informatica**

Dal file

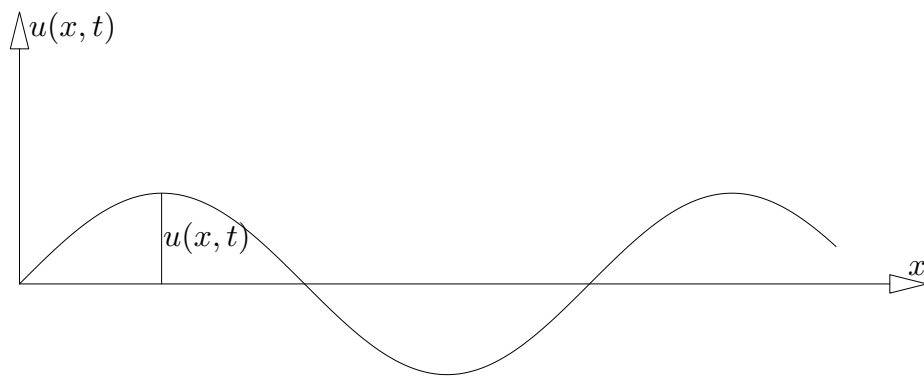
<http://www.mat.uniroma2.it/perfetti/didattica/analisi-II-frontale-2015-2016-ing-informatica/Giornale-delle-lezioni-e-materiale-non-presente-ing-informatica-analisi-II-2015-2016.pdf>  
sono stati risolti gli esercizi: 2,3 pag.32, pag.34, 26 pag. 44

**105 min. Lezione del 23/11/2018 Applicazione della trasformata di Laplace e richiami sulle funzioni di due variabili**

Il libro di testo ora è il N. Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, **Elementi di analisi Matematica due, versione semplificata per i nuovi corsi di laurea. Liguori editore**

Risoluzione della seguente equazione alle derivate parziali

$$\bullet \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = B\delta(t - T) \end{cases}$$



$$v(x, p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x, t) dt \doteq \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \mathcal{L}(u_t(x, t)) = pv(x, p) - u(x, 0) = pv(x, p),$$

$$\mathcal{L}(u_{tt}(x, t)) = p^2 v(x, p) - pu_t(x, 0) = p^2 v(x, p).$$

$$\mathcal{L}(u_x(0, t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_x(x, t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x, t) dt \Big|_{x=0} \stackrel{\text{def}}{=} v_x(0, p) = Be^{-pT}$$

per cui nella variabile  $v(x, p)$  il sistema diventa  $\begin{cases} a^2 v'' - p^2 v = 0 \\ v_x(0, p) = Be^{-pT} \end{cases}$  e la soluzione è  $v(x, p) =$

$\alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} = \alpha e^{\frac{(\text{Rep}+i\text{Imp})x}{a}} + \beta e^{-\frac{(\text{Rep}+i\text{Imp})x}{a}}$ . Poiché vogliamo  $|u(x, t)| \leq Ae^{A't}$  per due costanti  $A$  e  $A'$ , deve essere  $\lim_{\text{Rep} \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$  e quindi  $\alpha = 0$ . La condizione iniziale ci dice che  $\beta = -\frac{aB}{p}e^{-pT}$ . Quindi otteniamo  $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x, p) = -aBH(t - T - \frac{x}{a}))$  che rappresenta uno scalino di ampiezza  $-aB$  viaggiante verso destra con velocità  $a$ . Dato un punto di ascissa  $x$ , per un tempo  $t < t_x \stackrel{\text{def}}{=} T + \frac{x}{a}$  si ha  $u(x, t) = 0$ . Passato  $t_x$  si ha  $u(x, t) = -aB$ .  $H(t - t_0)$  è la funzione a scalino in  $t_0$ . ●●

### Richiami sulle funzioni di due variabili

La derivabilità non implica la continuità. Sappiamo che la funzione  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  e  $f(0, 0) = 0$  ha derivate nulle nell'origine ma non è ivi continua

### Esercizi

♠ a)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = B\delta(t - T) \end{cases}$   
 $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  e quindi  $\mathcal{L}(u_t(x, t)) = pv(x, p) - u(x, 0) = pv(x, p)$ ,  $\mathcal{L}(u_{tt}(x, t)) = p^2 v(x, p) - pu_t(x, 0) = p^2 v(x, p)$ .  $\mathcal{L}(u(0, t)) \stackrel{\text{def}}{=} v(0, p) = Be^{-pT}$  per cui nella variabile  $v(x, p)$  il sistema diventa  $\begin{cases} a^2 v'' - p^2 v = 0 \\ v(0, p) = Be^{-pT} \end{cases}$  e la soluzione è  $v(x, p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}}$ . Poiché vogliamo  $|u(x, t)| \leq Ae^{A't}$  per due costanti  $A$  e  $A'$ , deve essere  $\lim_{\text{Rep} \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$  e quindi  $\alpha = 0$ .

La condizione iniziale ci dice che  $\beta = Be^{-pT}$ . Quindi otteniamo  $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x, p)) = B\delta(t - T - \frac{x}{a})$  che rappresenta un impulso (è chiaramente una approssimazione) viaggiante verso destra con velocità  $a$ . Dopo il passaggio dell'impulso il punto torna nello stato di quiete.

La soluzione del sistema  $\begin{cases} a^2 v'' - p^2 v = 0 \\ v(0, p) = Be^{-pT} \end{cases}$  può ricercarsi anche attraverso l'uso della trasfor-

mata di Laplace. Definiamo quindi  $\mathcal{L}(v(x, p)) \stackrel{\text{def}}{=} h(s, p)$  (la variabile  $p$  "fa sempre da spettatore."  $\mathcal{L}(v'(x, p)) = sh(s, p) - v(0, p)$ ,  $\mathcal{L}(v''(x, p)) = s^2 h(s, p) - sBe^{-pT} - v_x(0, p)$  per cui l'equazione ordinaria diventa  $a^2 s^2 h(s, p) - sa^2 Be^{-pT} - a^2 v_x(0, p) - p^2 h(s, p) = 0$  da cui  $h(s, p) = \frac{sa^2 Be^{-pT} + a^2 v_x(0, p)}{a^2 s^2 - p^2}$ . Facendo l'antitrasformata di Laplace si ottiene  $v(x, p) =$

$v.p. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} e^{sx} h(x, s) ds = \frac{B}{2} e^{-pT} (e^{\frac{px}{a}} + e^{-\frac{px}{a}}) + \frac{v_x(0, p)a}{2p} (e^{\frac{px}{a}} - e^{-\frac{px}{a}})$ . Poiché vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione  $|u(x, t)| \leq Me^{M't}$  per ogni  $x > 0$ , con costanti  $M$  ed  $M'$  positive si deve avere  $\frac{B}{2} e^{-pT} e^{\frac{px}{a}} + \frac{v_x(0, p)a}{2p} e^{\frac{px}{a}} = 0$  da cui  $v_x(0, p) = -\frac{Bp}{a} e^{-pT}$  e quindi  $v(x, p) = Be^{-pT - \frac{px}{a}}$

b)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = A\omega, u(0, t) = A \sin(\omega t) \end{cases}$   
 $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  e quindi  $\mathcal{L}(u_t(x, t)) = pv(x, p) - u(x, 0) = pv(x, p)$ ,  $\mathcal{L}(u_{tt}(x, t)) = p^2 v(x, p) - u_t(x, 0) = p^2 v(x, p) - A\omega$ .  $\mathcal{L}(u(0, t)) \stackrel{\text{def}}{=} v(0, p) = \mathcal{L}(A \sin(\omega t)) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}$ . Il sistema per la funzione  $v(x, p)$  è

$\begin{cases} p^2 v(x, p) - A\omega = a^2 v'' \\ v(0, p) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \end{cases}$  La soluzione della equazione è  $v(x, p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \frac{A\omega}{p^2}$ . Poiché

vogliamo  $|u(x, t)| \leq Ae^{A't}$  per due costanti  $A$  e  $A'$ , deve essere  $\lim_{\text{Re } p \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$  e quindi  $\alpha = 0$ . La condizione iniziale impone  $\beta = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{A\omega}{p^2}$ .  $v(x, p) = (\frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{A\omega}{p^2})e^{-\frac{px}{a}} + \frac{A\omega}{p^2}$ .

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x, p)) = AH(t - \frac{x}{a})[\sin \omega(t - \frac{x}{a}) - \omega(t - \frac{x}{a})] + A\omega t$$

Controlliamo che le condizioni iniziali siano verificate dalla soluzione.

$$u(x, 0) = AH(-\frac{x}{a})[\sin \omega(-\frac{x}{a}) - \omega(-\frac{x}{a})] = 0 \text{ in quanto } H(-\frac{x}{a}) = 0 \text{ essendo } x > 0 \text{ e } a > 0.$$

$u_t(x, 0) = A\delta(t - \frac{x}{a})[\sin \omega(t - \frac{x}{a}) - \omega(t - \frac{x}{a})] + AH(-\frac{x}{a})[\omega \cos \omega(t - \frac{x}{a}) - \omega] + A\omega = A\omega$  in quanto il primo pezzo si annulla per ogni valore di  $t$  il secondo pezzo è nullo per le stesse ragioni di prima.

$$u(0, t) = AH(t)[\sin \omega t - \omega t] + A\omega t = AH(t) \sin \omega t = A \sin(\omega t)$$

c) 
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = A\omega, \quad u_x(0, t) = B \sin(\omega t) \end{cases}$$
  
 $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  e quindi  $\mathcal{L}(u_t(x, t)) = pv(x, p) - u(x, 0) = pv(x, p)$ ,  $\mathcal{L}(u_{tt}(x, t)) = p^2 v(x, p) - u_t(x, 0) = p^2 v(x, p) - A\omega$ .  $\mathcal{L}(u_x(0, t)) \stackrel{\text{def}}{=} v_x(0, p) = \mathcal{L}(B \sin(\omega t)) = \frac{B\omega}{p^2 + \omega^2}$ . Il sistema

per la funzione  $v(x, p)$  è

$$\begin{cases} p^2 v(x, p) - A\omega = a^2 v'' \\ v_x(0, p) = \frac{B\omega}{p^2 + \omega^2} \end{cases} \quad \text{La soluzione della equazione è } v(x, p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \frac{A\omega}{p^2}.$$

vogliamo  $|u(x, t)| \leq Ae^{A't}$  per due costanti  $A$  e  $A'$ , deve essere  $\lim_{\text{Re } p \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$  e quindi

$\alpha = 0$ . Di conseguenza si ha  $v(x, p) = \frac{A\omega}{p^2} - \frac{B\omega a}{p(p^2 + \omega^2)} e^{-x\frac{p}{a}}$  da cui  $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x, p)) =$

$$A\omega t - H(t - \frac{x}{a}) \frac{Ba}{\omega} (1 - \cos \omega(t - \frac{x}{a}))$$

Verifichiamo le condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = H(-\frac{x}{a}) \frac{Ba}{\omega} (1 + \cos \omega(-\frac{x}{a})) = 0$$

$$u_t(x, 0) = A\omega - \delta(t - \frac{x}{a}) \frac{Ba}{\omega} (1 - \cos \omega(t - \frac{x}{a})) - H(-\frac{x}{a}) \frac{Ba}{\omega} \sin \omega(-\frac{x}{a}) = 0$$

$$u_x(0, t) = \frac{1}{a} \delta(t - \frac{x}{a}) \frac{Ba}{\omega} (1 - \cos \omega(t - \frac{x}{a})) + H(t) B \sin \omega t = B \sin(\omega t)$$

d) 
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \\ v_x(0, p) = 0 \end{cases} \quad \text{La soluzione della equazione è}$$

$v(x, p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \frac{A\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)}$ . Poiché vogliamo  $|u(x, t)| \leq Ae^{A't}$  per due costanti  $A$  e

$A'$ , deve essere  $\lim_{\text{Re } p \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$  e quindi  $\alpha = 0$ .  $v_x(0, p) = 0$  impone  $\frac{p}{a}(\alpha - \beta) = 0$  e

quindi  $\beta = 0$  da cui  $v(x, p) = \frac{A\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)}$  da cui  $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x, p)) = \frac{A}{\omega^2}(t\omega - \sin \omega t)$

e) 
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = B\delta(t - T) \end{cases}$$

$$v(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u(x, t)), \quad \mathcal{L}(u_t(x, t)) = p\mathcal{L}(u(x, t)) - u(x, 0) = pv(x, p) - \sin x, \quad \mathcal{L}(u_{tt}(x, t)) = p\mathcal{L}(u_t(x, t)) - u_t(x, 0) = p(pv(x, p) - \sin x) = p^2 v(x, p) - p \sin x, \quad \mathcal{L}(u_{xx}(x, t)) = (\mathcal{L}(u(x, t)))_{xx} =$$

$v_{xx}(x, p) \quad \mathcal{L}(u_x(x, t)) = (\mathcal{L}(u(x, t)))_x = v_x(x, p) = \int_0^{+\infty} dt e^{-pt} B \delta(t - T) = e^{-pT}$  per cui nella funzione  $v(x, p)$  l'equazione diventa la equazione differenziale ordinaria  $\begin{cases} p^2 v - p \sin x = a^2 v_{xx} \\ v_x(0, p) = B e^{-pT} \end{cases}$

che possiamo scrivere anche come

$\begin{cases} p^2 v - p \sin x = a^2 v'' \\ v'(0, p) = B e^{-pT} \end{cases}$  L'equazione per  $v(x, p)$  è del secondo ordine (come per  $u(x, t)$ ) e la condizione iniziale è solo per  $v_x(0, p)$ . Se ne deduce che manca una condizione per poter trovare l'unica soluzione che cerchiamo. La seconda condizione apparentemente mancante deriva dal fatto che vogliamo  $|u(x, t)| \leq A e^{A't}$  per due costanti  $A$  e  $A'$ . Ciò vuol dire che deve essere  $\lim_{Rep \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$ . Per risolvere la equazione ordinaria utilizziamo di nuovo la trasformata

di Laplace. Definiamo quindi  $\mathcal{L}(v(x, p)) \stackrel{\text{def}}{=} h(s, p)$  (la variabile  $p$  "fa sempre da spettatore.")  $\mathcal{L}(v'(x, p)) = sh(s, p) - v(0, p)$ ,  $\mathcal{L}(v''(x, p)) = s^2 h(s, p) - sv(0, p) - B e^{-pT}$  per cui l'equazione ordinaria diventa  $p^2 h(s, p) - p \mathcal{L}(\sin x) = a^2 s^2 h(s, p) - a^2 sv(0, p) - a^2 B e^{-pT}$  ossia  $h(s, p) = \frac{p}{(s^2 + 1)(p^2 - a^2 s^2)} + \frac{-a^2 sv(0, p) - a^2 B e^{-pT}}{p^2 - a^2 s^2}$ . Antitrasformando si ha  $v(s, p) = \frac{p}{p^2 + a^2} \sin x + \frac{a}{2p^2 + 2a^2} (e^{-\frac{xp}{a}} - e^{\frac{px}{a}}) + \frac{v(0, p)}{2} (e^{\frac{px}{a}} + e^{-\frac{px}{a}}) + \frac{B}{2} (e^{\frac{px}{a} - pT} - e^{-\frac{px}{a} - pT})$ . Il limite  $\lim_{Rep \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$  impone  $-\frac{a}{p^2 + a^2} + v(0, p) + B e^{-pT} = 0$  e quindi  $v(0, p) = \frac{a}{p^2 + a^2} - B e^{-pT}$ . Dunque si ottiene  $v(x, p) = \frac{p}{p^2 + a^2} \sin x + \frac{a}{2p^2 + 2a^2} e^{-\frac{px}{a}} + \frac{1}{2} \frac{a}{p^2 + a^2} e^{-\frac{px}{a}} - B e^{-\frac{px}{a} - pT}$ . Antitrasformando si ha la soluzione  $u(x, t) = \sin x \cos at + H(t - \frac{x}{a}) \sin(at - x) - aBH(t - \frac{x}{a} - T)$ . Verifichiamo le condizioni iniziali.  $u(x, 0) = \sin x$  chiaramente.  $u_t(x, t) = -a \sin x \sin at + \delta(t - \frac{x}{a}) \sin(at - x) + aH(t - \frac{x}{a}) \cos(at - x) - aB\delta(t - \frac{x}{a} - T) = -a \sin x \sin at + (\sin(at - x)) \Big|_{t=x/a} + aH(t - \frac{x}{a}) \cos(at - x) - aB\delta(t - \frac{x}{a} - T) = -a \sin x \sin at + aH(t - \frac{x}{a}) \cos(at - x) - aB\delta(t - \frac{x}{a} - T)$  e per  $t = 0$  otteniamo zero. Ora analizziamo  $u_x(x, t) = \cos x \cos(at) - \frac{1}{a} \delta(t - \frac{x}{a}) \sin(at - x) - H(t - \frac{x}{a}) \cos(at - x) + B\delta(t - \frac{x}{a} - T) = \cos x \cos(at) - H(t - \frac{x}{a}) \cos(at - x) + B\delta(t - \frac{x}{a} - T)$  e per  $x = 0$  abbiamo  $u_x(0, t) = \cos(at) - \cos(at) + B\delta(t - T)$

f)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = A \sin(\lambda t) \end{cases}$

$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  e quindi  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ v(0, p) = \frac{A\lambda}{\lambda^2 + p^2} \end{cases}$  La soluzione della equazione è

$v(x, p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \frac{\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)}$ . Poiché vogliamo  $|u(x, t)| \leq A e^{A't}$  per due costanti  $A$  e  $A'$ , deve essere  $\lim_{Rep \rightarrow +\infty} |v(x, p)| = 0$  e quindi  $\alpha = 0$ .  $v(0, p) = \frac{A\lambda}{p^2 + \lambda^2}$  impone  $v(x, p) = \left( \frac{A\lambda}{p^2 + \lambda^2} - \frac{\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)} \right) e^{-\frac{px}{a}} + \frac{\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)}$  da cui  $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x, p)) = H(t - \frac{x}{a}) \left( A \sin \lambda \left( t - \frac{x}{a} \right) + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega \left( t - \frac{x}{a} \right) - \frac{t}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t) + \frac{t}{\omega}$

g)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x + \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0 \end{cases}$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{x}{p} + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ v_x(0, p) = 0 \end{cases} \text{ e la soluzione è } v(x, p) = \frac{a}{p^4} e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{x}{p^3} + \frac{\omega}{p^2(\omega^2 + p^2)} \text{ da cui } u(x, t) = \frac{a}{6} \left(t - \frac{x}{a}\right)^3 H\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x t^2 H(t) - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t) + \frac{t}{\omega}$$

$$h) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{\omega x}{(p^2 + \omega^2)} \\ v_x(0, p) = 0 \end{cases} \text{ e la soluzione è } v(x, p) = \frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2 + \omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)} \text{ da cui}$$

$$u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dpe^{pt} v(x, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dpe^{pt} \left( \frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2 + \omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)} \right).$$

$$\text{Quindi il risultato è } u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\omega} \left(t - \frac{x}{a}\right)^2 - 2 \frac{a}{\omega^3} \right) H\left(t - \frac{x}{a}\right) + H\left(t - \frac{x}{a}\right) \frac{a}{\omega^3} \cos \omega \left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{tx}{\omega} - \frac{x}{\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$i) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = A\delta(t - T) \end{cases}$$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{\omega x}{(p^2 + \omega^2)} \\ v_x(0, p) = Ae^{-pT} \end{cases} \text{ e la soluzione è } v(x, p) = \frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2 + \omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)} - \frac{aA}{p} e^{-pT - \frac{p}{a}x} \text{ da cui}$$

$$u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dpe^{pt} v(x, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dpe^{pt} \left( \frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2 + \omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)} - \frac{aA}{p} e^{-pT - \frac{p}{a}x} \right).$$

$$\text{Quindi il risultato è } u(x, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\omega} \left(t - \frac{x}{a}\right)^2 - 2 \frac{a}{\omega^3} \right) H\left(t - \frac{x}{a}\right) + H\left(t - \frac{x}{a}\right) \frac{a}{\omega^3} \cos \omega \left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{tx}{\omega} - \frac{x}{\omega^2} \sin(\omega t) - aAH\left(t - T - \frac{x}{a}\right)$$

$$l) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{\omega x}{(p^2 + \omega^2)} \\ v(0, p) = 0 \end{cases} \text{ e la soluzione è } v(x, p) = \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)} \text{ da cui}$$

$$u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dpe^{pt} v(x, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dpe^{pt} \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)}.$$

$$\text{Quindi il risultato è } u(x, t) = \frac{tx}{\omega} - \frac{x}{\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$m) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = A\delta(T - t) \end{cases}$$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{\omega x}{(p^2 + \omega^2)} \\ v(0, p) = Ae^{-pT} \end{cases} \text{ e la soluzione è } v(x, p) = \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)} + Ae^{-p(T + \frac{x}{a})} \text{ da cui}$$

$$u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} v(x, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} \frac{\omega x}{p^2(p^2 + \omega^2)} + Ae^{-p(T + \frac{x}{a})}.$$

Quindi il risultato è  $u(x, t) = \frac{tx}{\omega} - \frac{x}{\omega^2} \sin(\omega t) + A\delta(t - T - \frac{x}{a})$

n)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t + \sin(\omega x) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = A\delta(t - T) \end{cases}$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{1}{p^2} + \frac{\sin(\omega x)}{p} \\ v(0, p) = Ae^{-pT} \end{cases} \text{ e la soluzione è}$$

$$v(x, p) = \left( \frac{1}{p^4} + \frac{\sin(\omega x)}{p(p^2 + a^2\omega^2)} \right) + e^{-\frac{p}{a}x} (Ae^{-pT} - \frac{1}{p^4}) \text{ da cui}$$

$$u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} v(x, p) = \frac{t^3}{3} + \frac{\sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \frac{1}{2a^2\omega^2} (\sin \omega(x + at) + \sin \omega(x - at)) - \frac{1}{3} H(t - \frac{x}{a}) (t - \frac{x}{a})^3 + A\delta(t - T - \frac{x}{a})$$

o)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t \sin(\omega x) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0 \end{cases}$

$$v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ e quindi } \begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{\sin(\omega x)}{p^2} \\ v_x(0, p) = 0 \end{cases} \text{ e la soluzione è } v(x, p) = \frac{a\omega}{p^3(p^2 + a^2\omega^2)} e^{-\frac{p}{a}x} +$$

$$\frac{\sin(\omega x)}{p^2(p^2 + a^2\omega^2)} \text{ da cui } u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} v(x, p) = \frac{1}{2a\omega} (t - \frac{x}{a})^2 H(t - \frac{x}{a}) + \frac{1}{a^3\omega^3} \cos \omega(at - x) H(t - \frac{x}{a}) - \frac{1}{a^3\omega^3} H(t - \frac{x}{a}) + \frac{t \sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \frac{\sin(\omega x)}{a^3\omega^3} \sin(a\omega t)$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = A \sin(\lambda t) \end{cases} \text{ e la soluzione è } v(x, p) = \frac{\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)} - \frac{aA\lambda}{p(p^2 + \lambda^2)} e^{-\frac{p}{a}x}$$

$$\text{da cui } u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} v(x, p) = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{aA}{\lambda} H(t - \frac{x}{a}) + \frac{aA}{\lambda} \cos \lambda(t - \frac{x}{a}) H(t - \frac{x}{a})$$

p)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) \equiv 1, u(0, t) = 0 \end{cases}$

$$\text{Se } v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t)) \text{ si ha } \begin{cases} p^2 v(x, p) - 1 - a^2 v'' = 0 \\ v(0, p) = 0 \end{cases} \text{ ossia } v(x, p) = -\frac{1}{p^2} e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{1}{p^2} \text{ da cui}$$

$$u(x, t) = t - (t - \frac{x}{a}) H(t - \frac{x}{a})$$

q)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) \equiv 1, u_x(0, t) = 0 \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - 1 - a^2 v'' = 0 \\ v_x(0, p) = 0 \end{cases}$  ossia  $v(x, p) = \frac{1}{p^2}$  da cui  $u(x, t) = t$

r)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x, u(0, t) = 0 \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - x - a^2 v'' = 0 \\ v(0, p) = 0 \end{cases}$  ossia  $v(x, p) = \frac{x}{p^2} - \frac{x}{p^2} e^{-\frac{p}{a}x}$  da cui

$u(x, t) = xt - xtH(t - \frac{x}{a})$

s)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0 \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - p - a^2 v'' = 0 \\ v_x(0, p) = 0 \end{cases}$  ossia  $v(x, p) = \frac{1}{p}$  da cui  $u(x, t) = H(t)$

t)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0 \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - p - a^2 v'' = 0 \\ v(0, p) = 0 \end{cases}$  ossia  $v(x, p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\frac{p}{a}x}$  da cui

$u(x, t) = H(t) - H(t - \frac{x}{a})$

u)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & t, x > 0 \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = x, u_x(0, t) = H(t - T) \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - p - x - a^2 v'' = 0 \\ v_x(0, p) = \frac{e^{-pT}}{p} \end{cases}$  ossia  $v(x, p) = \frac{a}{p^3} e^{-\frac{p}{a}x} - \frac{a}{p^2} e^{-\frac{p}{a}x - pT} +$

$\frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}$  da cui  $u(x, t) = \frac{a}{2} (t - \frac{x}{a})^2 H(t - \frac{x}{a}) - a(t - \frac{x}{a} - T)H(t - \frac{x}{a} - T) + (1 + tx)H(t)$

Verifichiamo che la  $u(x, t)$  trovata soddisfi effettivamente l'equazione data e le sue condizioni iniziali.  $u_t(x, t) = a(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) + \frac{a}{2}(t - \frac{x}{a})^2 \delta(t - \frac{x}{a}) - aH(t - \frac{x}{a} - T) - a(t - \frac{x}{a} - T)\delta(t - \frac{x}{a} - T) + tH(t) + (1 + tx)\delta(t) = a(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) - aH(t - \frac{x}{a} - T) + xH(t) + 1$

$u_{tt}(x, t) = aH(t - \frac{x}{a}) + a(t - \frac{x}{a})\delta(t - \frac{x}{a}) + a\delta(t - \frac{x}{a} - T) + x\delta(t) = aH(t - \frac{x}{a}) + a\delta(t - \frac{x}{a} - T) + x\delta(t) = aH(t - \frac{x}{a}) + a(t - \frac{x}{a})\delta(t - \frac{x}{a}) + a\delta(t - \frac{x}{a} - T) + x\delta(t) = aH(t - \frac{x}{a}) + a\delta(t - \frac{x}{a} - T)$

$u_x(x, t) = -(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) - \frac{1}{2}(t - \frac{x}{a})^2 \delta(t - \frac{x}{a}) + H(t - \frac{x}{a} - T) + (t - \frac{x}{a} - T)\delta(t - \frac{x}{a} - T) + tH(t) = -(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) + H(t - \frac{x}{a} - T) + tH(t)$

$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{a}H(t - \frac{x}{a}) + \frac{1}{a}(t - \frac{x}{a})\delta(t - \frac{x}{a}) - \frac{1}{a}\delta(t - \frac{x}{a} - T) = \frac{1}{a}H(t - \frac{x}{a}) - \frac{1}{a}\delta(t - \frac{x}{a} - T)$

ed appare evidente che  $u_{tt} - a^2 u_{xx} \equiv 0$ . Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo  $u(x, 0) = H(0) = 1$ ,  $u_t(x, 0) = xH(0) = x$ ,  $u_x(0, t) = -tH(t) + H(t - T) + tH(t) = H(t - T)$

v)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) \equiv 1, u(0, t) = 0 \end{cases}$



Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - 1 - a^2 v'' = \frac{1}{p} \\ v(0, p) = 0 \end{cases}$  ossia  $v(x, p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) e^{-\frac{p}{a}x}$

da cui  $u(x, t) = t - \frac{1}{2}t^2 - \left((t - \frac{x}{a}) - \frac{1}{2}(t - \frac{x}{a})^2\right) H(t - \frac{x}{a})$

w)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = x, u_x(0, t) = \delta(t - T) \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - p - x - a^2 v'' = 0 \\ v_x(0, p) = e^{-pT} \end{cases}$  ossia  $v(x, p) = \frac{a}{p^3} e^{-\frac{p}{a}x} - \frac{a}{p} e^{-\frac{p}{a}x - pT} +$

$\frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}$  da cui  $u(x, t) = \frac{a}{2} \left(t - \frac{x}{a}\right)^2 H\left(t - \frac{x}{a}\right) - a H\left(t - \frac{x}{a} - T\right) + (1 + tx) H(t)$

x)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-rt} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) \equiv 0, u(0, t) = 0 \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{1}{p+r} \\ v(0, p) = 0 \end{cases}$  e la soluzione è  $v(x, p) = \frac{1}{p^2(p+r)} -$

$\frac{1}{p^2(p+r)} e^{-\frac{p}{a}x}$  da cui  $u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} v(x, p) = \frac{t}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-rt}}{r^2} - \left(t - \frac{x}{a}\right) \frac{1}{r} H\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{r^2} H\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{r^2} e^{-r\left(t - \frac{x}{a}\right)} H\left(t - \frac{x}{a}\right)$

y)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-rx} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) \equiv 0, u(0, t) = 0 \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{e^{-rx}}{p} \\ v(0, p) = 0 \end{cases}$  e la soluzione è  $v(x, p) = \frac{e^{-rx}}{p(p^2 - a^2 r^2)} -$

$\frac{e^{-px/a}}{p(p^2 - a^2 r^2)}$  da cui  $u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} v(x, p) = \frac{-e^{-rx}}{a^2 r^2} + \frac{e^{-rx}}{a^2 r^2} \cosh(art) H(t) - \frac{1}{a^2 r^2} \cosh(art - rx) H\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{a^2 r^2} H\left(t - \frac{x}{a}\right)$

z)  $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin\left(\omega t - \frac{x}{x_0}\right) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) \equiv 0, u(0, t) = 0 \end{cases}$

Se  $v(x, p) = \mathcal{L}(u(x, t))$  si ha  $\begin{cases} p^2 v(x, p) - a^2 v'' = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cos \frac{x}{x_0} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \sin \frac{x}{x_0} \\ v(0, p) = 0 \end{cases}$  e la soluzione

è  $v(x, p) = -\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^2 + \frac{a^2}{x_0^2}} e^{-px/a} + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^2 + \frac{a^2}{x_0^2}} \cos \frac{x}{x_0} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^2 + \frac{a^2}{x_0^2}} \sin \frac{x}{x_0}$

Si devono distinguere due casi: 1)  $\omega \neq \frac{a}{x_0}$  e 2)  $\omega = \frac{a}{x_0}$ .

Cominciamo da 1).

$$u(x, t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} v(x, p) = \left( \frac{1}{\omega^2 - \frac{a^2}{x_0^2}} \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega^2 - \frac{a^2}{x_0^2}} \frac{x_0}{a} \sin \frac{a}{x_0} t \right) H\left(t - \frac{x}{a}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2} - \omega^2} \cos \frac{x}{x_0} \sin \omega t - \frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2} - \omega^2} \sin \frac{x}{x_0} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^2 - \frac{a^2}{x_0^2}} \frac{x_0}{a} \cos \frac{x}{x_0} \sin \frac{a}{x_0} t - \frac{1}{\omega^2 - \frac{a^2}{x_0^2}} \sin \frac{x}{x_0} \cos \frac{a}{x_0} t +$$

Ora esaminiamo il caso in cui  $\omega = \frac{a}{x_0}$ .

$$v(x, p) = \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)^2} \cos x \frac{\omega}{a} - \frac{\frac{x_0}{p}}{(p^2 + \omega^2)^2} \sin x \frac{\omega}{a} - \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)^2} e^{-px/a}$$

da cui  $u(x, t) = \left(-\frac{t}{2\omega} \cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega^2} \sin(\omega t)\right) \cos x \frac{\omega}{a} - \frac{t}{2\omega} \sin x \frac{\omega}{a} \sin(t\omega) + \left(\frac{t}{2\omega} \cos(\omega t - \frac{x}{a}) - \frac{1}{2\omega^2} \sin(\omega t - \frac{x}{a})\right) H(t - \frac{x}{a})$  ♠♠

**105 min. Lezione del 26/11/2018 Funzioni di più variabili**

Paragrafo 13) pag.52-58 del libro di testo

Definizione di differenziabilità .

**Teorema** Se una funzione è differenziabile in un punto, è continua in quel punto

*Dimostrazione* Dalla differenziabilità sappiamo che

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \underline{\partial}f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$$

e quindi  $\lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = 0$

*Fine della dimostrazione*

Sia data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0, & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

La funzione è continua in ogni punto diverso dall'origine. Ciò segue dal fatto che la funzione è pari al rapporto di due polinomi ( $P(x, y)/Q(x, y)$ ) (funzioni ovunque definite in  $\mathbf{R}^2$ ) ed i polinomi sono funzioni differenziabili ovunque. Laddove  $Q(x, y) \neq 0$ , la funzione  $P(x, y)/Q(x, y)$  è continua. L'unico punto da esaminare esplicitamente è l'origine.

Se è continua,  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} f(\underline{x})$  deve essere zero per cui proviamo a dimostrare ciò. Sappiamo che  $x^2 + y^2 - 2|x| \cdot |y| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$  per cui  $|x| \cdot |y| \leq (x^2 + y^2)/2$  e quindi

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x| \cdot |x| \cdot |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} |x| \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} 0$$

Dunque la funzione è ovunque continua. La funzione è certamente differenziabile fuori dall'origine in quanto i polinomi sono ovunque differenziabili ed inoltre  $P(x, y)/Q(x, y)$  è differenziabile laddove  $Q(x, y) \neq 0$ . Rimane il problema dell'origine che ora affrontiamo.

Per studiare la differenziabilità dobbiamo nell'origine dobbiamo prima calcolare le derivate parziali nell'origine.

$$\partial_x f(\underline{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = \lim_{t \rightarrow 0} (0 - 0) = 0, \quad \partial_y f(\underline{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(0, t) - f(0, 0)) = \lim_{t \rightarrow 0} (0 - 0) = 0$$

Quindi se la funzione è differenziabile nell'origine deve aversi  $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|} (f(h_1, h_2) - f(0, 0)) = \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = 0$ . Se ora prendiamo  $h_1 = h_2$  si ha  $\lim_{h_1 \rightarrow 0} 2^{-\frac{2}{3}} \frac{h_1^3}{h_1^3} = 2^{-\frac{2}{3}} \neq 0$  e quindi la funzione è continua ma non differenziabile nell'origine.

Il punto centrale del paragrafo 14 ossia il **TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE** è stato usato sin dall'inizio di ottobre.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE a pag.57. Paragrafo 15.

**105 min. Lezione del 27/11/2018 Funzioni di più variabili. Formule di Taylor con resto di Lagrange e Peano**

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE a pag.62. Paragrafo 17.

• Applicazioni del paragrafo 17. Calcoliamo il polinomio di Taylor al secondo ordine con resto di Peano per la funzione  $f(\underline{x}) = \ln(1 + xy)$  in  $\underline{x} = \underline{0}$ .

$$f_x = \frac{y}{1+xy}, \quad f_y = \frac{x}{1+xy}, \quad f_{xx} = \frac{-y^2}{(1+xy)^2}, \quad f_{yy} = \frac{-x^2}{(1+xy)^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

e vanno calcolate in  $\underline{0}$ . Si ottiene  $f(\underline{x}) = xy$ .

Si poteva giungere allo stesso risultato osservando che  $\ln(1+t) = t + o(t)$  e ponendo  $t = xy$  si ha  $\ln(1+xy) = xy + o(xy)$ . Inoltre

$$\left| \frac{o(xy)}{xy} xy \right| \leq \left| \frac{o(xy)}{xy} \right| (x^2 + y^2) = o(x^2 + y^2)$$

per cui  $\ln(1+xy) = xy + o(x^2 + y^2)$ .

Stesso esercizio ma il punto è  $(1, 0)$ . Abbiamo

$$f_x(1, 0) = 0, \quad f_y(1, 0) = 1, \quad f_{xx}(1, 0) = 0, \quad f_{yy}(1, 0) = -1, \quad f_{xy}(1, 0) = f_{yx}(1, 0) = 1$$

per cui  $\ln(1+xy) = y - \frac{1}{2}y^2 + (x-1)y$

Anche qui possiamo scrivere  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  e quindi

$$\begin{aligned} \ln(1+xy) &= xy - \frac{1}{2}x^2y^2 + o(x^2y^2) = (x-1)y + y - \frac{1}{2}y^2((x-1)^2 + 2(x-1) + 1) + o(x^2y^2) = \\ &= y + (x-1)y - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}y^2((x-1)^2 + 2(x-1)) + o(x^2y^2) \end{aligned}$$

Dobbiamo far vedere che  $-\frac{1}{2}y^2((x-1)^2 + 2(x-1)) + o(x^2y^2) = o((x-1)^2 + y^2)$ . Cambiamo variabile  $x-1 = u$ .

$$0 \leq \left| \frac{-1}{2} \frac{y^2 u^2}{u^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{(u^2 + y^2)^2}{u^2 + y^2} \xrightarrow{(u,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$0 \leq \left| \frac{-1}{2} \frac{y^2 u}{u^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |u| \frac{u^2 + y^2}{u^2 + y^2} = \frac{|u|}{2} \xrightarrow{(u,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\left| \frac{o(x^2y^2)}{x^2y^2} \frac{x^2y^2}{(x-1)^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{o(x^2y^2)}{x^2y^2} \right| \frac{x^2y^2}{(x-1)^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,0)} 0$$

Stesso esercizio ma il punto è  $(1, 2)$ .

$$f_x(1, 2) = \frac{2}{3}, \quad f_y(1, 2) = \frac{1}{3}, \quad f_{xx}(1, 2) = \frac{-4}{9}, \quad f_{yy}(1, 2) = \frac{-1}{9}, \quad f_{xy}(1, 2) = f_{yx}(1, 2) = \frac{1}{9}$$

Per cui

$$f(\underline{x}) = \ln 3 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-2) - \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{1}{18}(y-2)^2 + \frac{1}{9}(x-1)(y-2) + o((x-1)^2 + (y-2)^2)$$

Possiamo pure scrivere

$$\begin{aligned}
 \ln(1 + xy) &= \ln(3 + 2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)) = \\
 &= \ln 3 + \ln \left( 1 + \underbrace{\frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3}}_t \right) = \\
 &= \ln 3 + \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} \right)^2 + \\
 &+ o \left( \left( \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} \right)^2 \right) = \\
 &= \ln 3 + \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} - \frac{2}{9}(x - 1)^2 - \frac{1}{18}(y - 2)^2 - \frac{2}{9}(x - 1)(y - 2) + \\
 &- \frac{2}{9}(x - 1)^3(y - 2) - \frac{1}{9}(x - 1)(y - 2)^3 - \frac{1}{9}(x - 1)^2(y - 2)^2 + \\
 &+ o \left( \left( \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} \right)^2 \right) =
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$f(\underline{x}) = \ln 3 + \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{1}{3}(y - 2) - \frac{2}{9}(x - 1)^2 - \frac{1}{18}(y - 2)^2 + \frac{1}{9}(x - 1)(y - 2) + \text{Resto}$$

dove il Resto è

$$\begin{aligned}
 &- \frac{2}{9}(x - 1)^3(y - 2) - \frac{1}{9}(x - 1)(y - 2)^3 - \frac{1}{9}(x - 1)^2(y - 2)^2 + \\
 &+ o \left( \left( \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} \right)^2 \right) =
 \end{aligned}$$

e dobbiamo far vedere che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\text{Resto}}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = 0$ . Lascio tale facile verifica agli studenti

Si poteva pure agire nel seguente modo.

$$\begin{aligned}
 \ln(1 + xy) &= \ln(3 + \underbrace{xy - 2}_t) = \ln 3 + \ln \left( 1 + \frac{xy - 2}{3} \right) = \ln 3 + \frac{xy - 2}{3} - \frac{1}{2} \frac{(xy - 2)^2}{9} + o((xy - 2)^2) = \\
 &= \ln 3 + \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{2(x - 1) + (y - 2) + (x - 1)(y - 2)}{3} \right)^2 + \text{Resto}
 \end{aligned}$$

esattamente come prima. ••

### Lezione del 29/11/2018 Funzioni di più variabili

**Lezione sospesa dopo 10 minuti a causa dei pennarelli oramai esauriti ed il cancellino che anneriva la lavagna anziché sbiancarla.**

- Nei 10 minuti ho scritto la formula sui polinomi di Taylor di ordine  $m$

**Teorema** Sia  $f: E \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $E$  aperto,  $m$  volte differenziabile in  $\underline{x} \in E$ . Sia  $\underline{h} \in \mathbf{R}^n$  tale che il segmento  $[\underline{x}, \underline{x} + \underline{h}] \subset E$ . Vale allora  $f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(\underline{x})}{k!} + o(\|\underline{h}\|^m)$  per  $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ . Inoltre

- 1)  $f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(\underline{x})}{k!}$  è l'unico polinomio di grado  $\leq m$  che verifica la relazione precedente
- 2) Se  $f$  è  $m$  volte differenziabile in  $[\underline{x}, \underline{x} + \underline{h}]$ , le derivate di ordine  $m$  sono ivi continue,  $f$  è  $m+1$  volte differenziabile in  $(\underline{x}, \underline{x} + \underline{h})$  esiste  $\lambda \in (0, 1)$  tale che

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(\underline{x})}{k!} + \frac{d^{m+1} f(\underline{x} + \lambda \underline{h})}{(m+1)!} \quad (1)$$

$$d^k f(\underline{x}) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_n=k}}^k \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial^k f(\underline{x})}{(\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_n)^{i_n}}$$

*Osservazioni* i) La parte in cui parla della unicità del polinomio è estremamente importante nella pratica in quanto, per le funzioni che comunemente incontreremo, si potrà usare il teorema di Taylor per funzioni di una variabile

**Esempi** Si voglia sapere il polinomio di Taylor di ordine  $\leq 6$  nel punto  $(0, 0)$  della funzione  $\cos(x_1 x_2^2)$ . Poiché  $x_1 x_2^2 \rightarrow 0$  per  $\underline{x} \rightarrow \underline{0}$  usiamo le formule del coseno:  $\cos(x_1 x_2^2) = 1 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{24} x_1^4 x_2^8 + o(x_1^5 x_2^{10})$ . Se dimostriamo che  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{x_1^4 x_2^8}{(x_1^2 + x_2^2)^3} = 0$  il polinomio che cerchiamo è  $1 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2^4$ . Ma  $\frac{x_1^4 x_2^8}{(x_1^2 + x_2^2)^3} \leq x_1^4 x_2^2$  e quindi tende a zero. Si tenga presente che ciò che nel Teorema è  $\underline{x}$ , nell'esercizio è  $\underline{0}$  e ciò che nel teorema è  $d\underline{x}$ , nell'esercizio è  $(x_1, x_2)$ . Senza l'unicità avremmo dovuto eseguire le derivate della funzione fino all'ordine 6.

**Esempi** Si vuole calcolare il polinomio di Taylor di ordine 1 della funzione  $f(x, y) = \ln(1 + x(1 + y))$  centrato in  $x = 0$  e  $y = 1$ . Poiché  $x(1 + y) = 0$  per  $x = 0$ , possiamo usare  $\ln(1 + z) = z + O(z^2)$  da cui  $\ln(1 + x(1 + y)) = x(1 + y) + O(x^2(1 + y)^2)$  e quindi il polinomio è  $P(x) = x$ . Se invece vogliamo il polinomio fino all'ordine 2, dobbiamo fare  $\ln(1 + x(1 + y)) = x(1 + y) - \frac{1}{2} x^2(1 + y)^2 + O(x^3(1 + y)^3)$ . Riscriviamo  $x(1 + y) - \frac{1}{2} x^2(1 + y)^2$  come  $x + x(y - 1) + x - \frac{1}{2} x^2((y - 1) + 2)^2 = 2x + x(y - 1) - \frac{1}{2} x^2(4) - \frac{1}{2} x^2(2(y - 1) + (y - 1)^2)$  e  $-\frac{1}{2} x^2(2(y - 1) + (y - 1)^2)$  ha ordine 3 per cui il polinomio di ordine 2 è  $P(x, y) = 2x + x(y - 1) - 2x^2$  ●●

### 105 min. Lezione del 03/12/2018 Funzioni di più variabili. Massimi e minimi. Condizioni necessarie e sufficienti. Esempi

Pag.73 paragrafo 18.

- Qualche nota sulle dimostrazioni di pag.78 e 80-81.

Pag.78. Si può ragionare anche per contraddizione. L'ipotesi è che  $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$  per  $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r$  con  $r$  piccolo abbastanza ( $\underline{x}_0$  di minimo relativo). La tesi è che, oltre ad essere  $\partial f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ , si ha

$$1) f_{xx}(\underline{x}_0) \geq 0, \quad 2) f_{yy}(\underline{x}_0) \geq 0, \quad 3) (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(\underline{x}_0) \geq 0$$

Dimostriamo che se neghiamo una sola delle 1)-3) allora  $\underline{x}_0$  non può essere di minimo ossia è falsa

$$f_{xx}(\underline{x}_0) h_1^2 + f_{yy}(\underline{x}_0) h_2^2 - 2 f_{xy}(\underline{x}_0) h_1 h_2 \geq 0 \quad \forall \|\underline{h}\| < r_1 \leq r \quad (i)$$

che è  $F''(0) \geq 0$  dove  $F(t) = f(\underline{x}_0 + t\underline{h})$ .

Neghiamo 1) assumendo  $f_{xx}(\underline{x}_0) < 0$ . Prendendo  $h_2 = 0$ ,  $h_1 > 0$  dovremmo avere

$$f_{xx}(\underline{x}_0) h_1^2 \geq 0$$

che chiaramente è impossibile. Prendere  $f_{yy}(\underline{x}_0) < 0$  conduce alla stessa conclusione.

Neghiamo 3) e quindi

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(\underline{x}_0) < 0 \quad (\text{ii})$$

Chiaramente  $f_{yy}(\underline{x}_0) = 0$ ,  $f_{xx}(\underline{x}_0) = 0$  e  $f_{xy}(\underline{x}_0) = 0$  non possono essere tutti nulli. Inoltre non può essere  $f_{xy}(\underline{x}_0) = 0$  e  $f_{xx}(\underline{x}_0) = 0$  oppure  $f_{yy}(\underline{x}_0) = 0$ .

Primo caso:  $f_{yy}(\underline{x}_0) = 0$ . Se anche  $f_{xx}(\underline{x}_0) = 0$  avere

$$-2f_{xy}^2(\underline{x}_0)h_1h_2 \geq 0 \quad \forall \|\underline{h}\| < r$$

è impossibile.

Se invece  $f_{xx}(\underline{x}_0) \neq 0$  allora dovremmo avere

$$f_{xx}(\underline{x}_0)h_1^2 - 2f_{xy}^2(\underline{x}_0)h_1h_2 = h_1 \left[ f_{xx}(\underline{x}_0)h_1 - 2f_{xy}^2(\underline{x}_0)h_2 \right] \geq 0 \quad \forall \|\underline{h}\| < r_1 \leq r$$

e pure questo è impossibile non appena si prende  $h_1$  abbastanza piccolo e positivo  $h_2 > 0$ .

Secondo caso.  $f_{yy}(\underline{x}_0) \neq 0$

Il trinomio di  $h_2$  diventa

$$f_{xx}(\underline{x}_0)h_1^2 + f_{yy}(\underline{x}_0)h_2^2 - 2f_{xy}^2(\underline{x}_0)h_1h_2 \quad (\text{iii})$$

ha discriminante positivo e quindi ha le due soluzioni

$$(h_2)_{1,2} = \frac{f_{xy}^2(\underline{x}_0)h_1 \pm |h_1| \sqrt{(-f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2)(\underline{x}_0)}}{f_{yy}(\underline{x}_0)}$$

Il trinomio è evidentemente negativo per  $(h_2)_1 < h_2 < (h_2)_2$  oppure  $(h_2)_2 < h_2 < (h_2)_1$  e questo contraddice l'ipotesi che sia un minimo

La dimostrazione di pag.77–78 serve unicamente per la (18.23) di pag.79.

Per quanto riguarda la dimostrazione di pag.80–81, lo studente parta dalla (18.40). L'argomento descritto am pag.80 serve solo a dimostrare l'esistenza della  $m$  nella (18.36). ●●

Studio dei massimi e minimi delle funzioni  $f(x, y) = x^2 + y^2, x^2 - y^2, x^2 - y^4$ .  $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ .

**105 min. Lezione del 04/12/2018 Funzioni di più variabili. Massimi e minimi. Condizioni necessarie e sufficienti. Esempi**

● Esercizi. Del file <http://www.mat.uniroma2.it/perfetti/eserci/13duevar.pdf> sono stati studiati gli esercizi **11.7** sia con la limitazione al quadrato che senza. **6.7** seconda domanda.

Dala pagina <http://www.mat.uniroma2.it/perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15.html>, si è risolto l'esercizio 2) del compito del 2/2/2015.●●

**105 min. Lezione del 06/12/2018 Funzioni di più variabili. Teorema delle funzioni implicite**

Paragrafi 53–54.

**105 min. Lezione del 10/12/2018 Funzioni di più variabili. Teorema delle funzioni implicite e estremi vincolati**

Paragrafo 55.

• Trovare massimi e minimi della funzione  $z = f(x, y) = y(x^2 + 5/4)$  con  $(x, y)$  soggetti alla condizione  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Prima soluzione** Sia  $C = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ . Un modo di procedere consiste nel parametrizzare la curva  $x^2 + y^2 = 1$  con  $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$  e quindi  $f|_C = \sin t(\frac{5}{4} + \cos^2 t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Derivando rispetto a  $t$  si può notare che  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $(-1/2, \sqrt{3}/2)$  e  $(0, -1)$  sono massimi mentre  $(0, 1)$ ,  $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$  e  $(1/\sqrt{2}, -\sqrt{3}/2)$  sono minimi.

Inoltre  $f(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,  $f(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$ ,  $f(0, -1) = -5/4$ ,  $f(0, 1) = 5/4$ . I punti  $(1/2, \pm \sqrt{3}/2)$  sono massimi assoluti mentre  $(-1/2, \pm \sqrt{3}/2)$  minimi assoluti. Gli altri sono estremi relativi.

*Si può notare pure, fatto assai importante, che in ciascuno dei punti indicati si ha  $\underline{\partial}f(\underline{\gamma}) \cdot \underline{\gamma}' = 0$  e  $\underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma}' = 0$  (fatto quest'ultimo vero per ogni  $t$  ma riguardante la circonferenza in modo specifico).*

Il gradiente di  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  è  $(2x, 2y) = 2(\gamma_1, \gamma_2)$  e quindi nei punti di massimo e minimo locali vincolati si ha  $\underline{\partial}f(\underline{x}_0)$  parallelo al gradiente del vincolo  $g(x, y)$  purché  $\underline{\gamma}'(t) \neq 0$  in quel punto.

**Seconda soluzione** Si estrae  $x^2 = 1 - y^2$  dal vincolo e si ottiene  $f(x, y) = y(1 - y^2 + 5/4) = -y^3 + 9y/4 \doteq h(y)$  con  $|y| \leq 1$ .

$$h'(y) = -3y^2 + 9/4 \geq 0 \iff |y| \leq 3/4$$

e quindi per  $y = -\sqrt{3}/2$  abbiamo un minimo ed un massimo a  $y = \sqrt{3}/2$ . I punti  $(\pm 1/2, -\sqrt{3}/2)$  sono minimi mentre  $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$  sono massimi. Agli estremi abbiamo  $h(-1, 0) = -5/4$  mentre  $h(1, 0) = 5/4$

Notare che la funzione non vincolata  $f(x, y) = y(x^2 + 5/4)$  non ammette punti critici. ••

Il problema appena studiato è molto particolare in quanto consente o di parametrizzare completamente il vincolo (prima soluzione) o di estrarre una delle due variabili ed inserirla nella seconda (seconda soluzione). In generale non è possibile né l'una né l'altra ma è necessario passare attraverso il teorema delle funzioni implicite.

**105 min. Lezione del 11/12/2018 Funzioni di più variabili. Estremi vincolati**

Paragrafo 58 tranne a pag.289 fra "Facciamo" e " $\lambda \neq 0$ " e 59 fino a "Per completezza"

Supponiamo che voler trovare gli estremi della funzione  $f(x, y, z)$  vincolata al vincolo  $g(x, y, z) = 0$ . Supponiamo che  $\underline{\partial}g(\underline{x}) \neq \underline{0}$  e quindi  $g_z \neq 0$  (ad esempio). Allora dal teorema delle funzioni implicite si ha  $g(x, y, h(x, y)) \equiv 0$ . La funzione ristretta al vincolo diventa  $f(x, y, h(x, y))$  e in questo caso  $(x, y)$  non sono vincolate. Ne segue che se cerchiamo i punti di estremo dobbiamo eseguire il gradiente

$$f_x + f_z h_x = 0, \quad f_y + f_z h_y = 0, \quad h_x = -\frac{g_x(x, h)}{g_z(x, y)} \quad h_y = -\frac{g_y(x, h)}{g_z(x, y)}$$

e quindi

$$f_x - \frac{f_z(x, h)}{g_z(x, y)} h_x(x, h) = 0, \quad f_y - \frac{f_z(x, h)}{g_z(x, y)} h_y(x, h) = 0$$

Se chiamiamo  $\lambda = f_z(x, h)/g_z(x, y)$  possiamo dire che  $\underline{\partial}f(\underline{x}) = \lambda \underline{\partial}g(\underline{x})$ .

Se ne ricava l'ipotesi che in generale, nei punti critici vincolati, si ha  $\underline{\partial}f(\underline{x}) = \lambda \underline{\partial}g(\underline{x})$ . Costruiamo quindi la funzione  $F(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$  e cerchiamo di risolvere il sistema

$$F_{x_i}(\underline{x}) = f_{x_i}(\underline{x}) - \lambda g_{x_i}(\underline{x}) = 0 \quad F_{\lambda}(\underline{x}) = -g(\underline{x}) = 0$$

Una volta trovato un punto  $\underline{x}_0$  bisogna verificare che  $\underline{\partial}g(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$ . Tali punti sono detti *regolari*. Si tenga presente che il massimo o il minimo (vincolati), possono presentarsi anche in punti irregolari dove i moltiplicatori di Lagrange non sono applicabili. Si veda a tal punto l'esempio 3 a pag.292 del libro di testo

Il seguente teorema dà condizioni sufficienti, non necessarie, perché un punto critico vincolato si di massimo, di minimo oppure una sella.

**Teorema** Siano  $f, g: X \rightarrow \overset{\circ}{X} \subset \mathbf{R}^n$  di classe  $C^2$ . Se la forma quadratica  $\sum_{i,j=1}^n [f_{x_i x_j}(\underline{x}_0) - \lambda^0 g_{x_i x_j}(\underline{x}_0)] h_i h_j = (\underline{h}, H(\underline{x}_0) \underline{h})$ , ristretta all'insieme dei vettori  $\underline{h}$  tangenziali al vincolo in  $\underline{x}_0$  ossia  $(\underline{\partial}g(\underline{x}_0), \underline{h}) = 0$ , è definita negativa (positiva) allora  $\underline{x}_0$  è punto di massimo (minimo) forte vincolato della funzione  $f(\underline{x})$  alla condizione  $g(\underline{x}) = 0$ . Se esistono  $\underline{h}_1$ , e  $\underline{h}_2$  tali che  $(\underline{h}_1, H(\underline{x}_0) \underline{h}_1) > 0$ , e  $(\underline{h}_2, H(\underline{x}_0) \underline{h}_2) < 0$ , allora  $\underline{x}_0$  è di sella

• **Esercizi**

Data la funzione  $f(x, y) = x^2 y + xy^2 + xy$ , si trovino i valori di massimo e di minimo soggetti alla condizione  $\{xy \geq \frac{1}{16}, y \geq -x - 1, x \leq 0, y \leq 0\}$ .

Si trovino i punti di estremo della funzione  $f(x, y) = xy$  soggetti alla condizione  $x^2 + y^2 = 1$

Si trovino i punti di estremo della funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$  soggetti alla condizione  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Sia data la funzione  $f(x, y) = y^2$ . Trovare massimi e minimi locali di  $f(x, y)$  con  $(x, y)$  soggette alla condizione  $x^4 + yx^2 - y^2 + 243 = 0$  e stabilirne la natura Si veda qui, compito del primo luglio <http://www.mat.uniroma2.it/perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15.html>

Si stabilisca la natura dei punti critici della funzione  $f(z, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  soggetta alla condizione  $xy + xz + yz = 1$ .

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione  $z = f(x, y) = x$  soggetta al vincolo  $x^3 + xy + y^2 = 0$ . Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto  $(1/4, -1/8)$  è di massimo assoluto]

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione  $z = f(x, y) = x + y$  soggetta al vincolo  $x^3 + xy + y^2 = 0$ . Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto  $(2/9, -2/27)$  è di minimo locale]

Si trovino i punti critici e loro caratterizzazione della funzione  $u = f(x, y, z) = z$  soggetta al vincolo  $(x + 3y^2)e^{xz} - 1 = 0$ . Risultato. Il punto  $(e, 0, -e^{-1})$  è una sella.

Si dimostri che  $(e, 1, 1)$  è un punto critico della funzione  $u = f(x, y, z) = x$  soggetta al vincolo  $x + y + z - \ln x - \ln y - \ln z = e + 1$ . Si verifichi che è un massimo locale (non globale) ●●

**105 min. Lezione del 13/12/2018 Funzioni di più variabili. Estremi vincolati**

• Si trovino i punti di estremo della funzione  $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$  soggetti alla condizione  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

*Svolgimento*

$$(6 - 4x - 3y) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9) \implies -4 - 2\lambda x = 0, -3 - 2\lambda y = 0, -2\lambda z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Dalla terza:  $\lambda = 0$  oppure  $z = 0$ . Se  $\lambda = 0$  allora la prima implica  $-4 = 0$  assurdo. Dunque rimane  $z = 0$  mentre la prima e seconda danno  $x = -2/\lambda, y = -3/(2\lambda)$ . La terza ci dà



$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 9 \text{ da cui } \lambda = \pm \frac{5}{6} \text{ Otteniamo i due punti } P_1 \equiv \left(\frac{-12}{5}, \frac{-9}{5}, 0\right), \lambda_1 = \frac{5}{6} \text{ } P_2 \equiv \left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, 0\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{-5}{6}$$

$$(6 - 4x - 3y)|_{P_1} = 21, \quad (6 - 4x - 3y)|_{P_2} = -9$$

La funzione  $z = 6 - 4x - 3y$  è continua sull'insieme  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  che è compatto e quindi ammette massimo e minimo assoluti. Evidentemente  $P_1$  è di massimo mentre  $P_2$  di minimo.

Ad ogni modo possiamo applicare il Teorema con le condizioni sufficienti. Dobbiamo studiare la forma quadratica

$$(h_1 \ h_2 \ h_3) \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = -2\lambda(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2),$$

La tangenzialità al vincolo dello spostamento  $\underline{h}$  e calcolato in  $P_1$  impone

$$-2\left(\frac{-12}{5}h_1 - \frac{9}{5}h_2\right) = 0 \implies h_1 = -\frac{3}{4}h_2$$

e quindi abbiamo  $-2\frac{5}{6}\left(\frac{25}{16}h_2^2 + h_3^2\right) < 0$  e quindi è un massimo. Lo stesso conto in  $P_2$  dà  $-2\frac{-5}{6}\left(\frac{25}{16}h_2^2 + h_3^2\right) > 0$  (minimo).

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione  $z = f(x, y) = y$  soggetta al vincolo  $x^3 + xy + y^2 = 0$ . Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura.

*Svolgimento* Innanzitutto osserviamo che per ogni  $y_0 \in \mathbf{R}$ , l'equazione  $x^3 + xy_0 + y_0^2 = 0$  ha soluzione in  $x$ . Ciò accade in quanto  $h(x) = x^3 + ax + a^2$  va da  $-\infty$  a  $+\infty$  ed è continua per cui interseca l'asse delle ordinate. Ciò implica che la funzione  $f(x, y) = y$  non ammette né massimo né minimo assoluto. Per cercare i massimi e minimi locali formiamo la funzione  $F(x, y, \lambda) = y - \lambda(x^3 + xy + y^2)$  e risolviamo il sistema

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_\lambda = 0$$

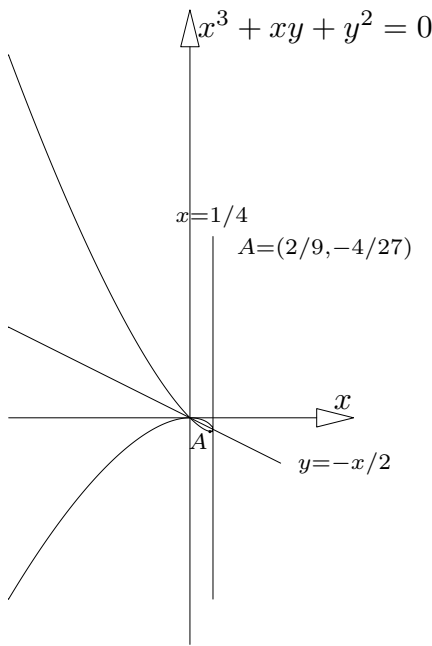
e viene fuori che  $x_0 = 2/9, y_0 = -4/27, \lambda_0 = -27/2$ . Per saperne di più usiamo il teorema sopra e costruiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Big|_{\underline{x}_0, \lambda_0} = \frac{27}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \doteq A$$

Il gradiente di  $x^3 + xy + y^2$  è  $(3x^2 + y, x + 2y)$  e calcolato in  $\underline{x}_0$  dà  $(0, -2/27)$ . La relazione  $(0, -2/27) \cdot (a, b) = 0$  comporta  $b = 0$  per cui dobbiamo studiare la forma quadratica  $(\underline{v}, A\underline{v})$  dove  $\underline{v}$  è un vettore del tipo  $(a, 0)$  con  $a \in \mathbf{R}$ . Si ottiene  $(\underline{v}, A\underline{v}) = 54a^2/3 > 0$  per ogni  $a$  non nulla. Ne segue che il punto  $\underline{x}_0$  è di minimo vincolato.

Si poteva pure rispondere tracciando il grafico della funzione di  $y$  definita da  $x^3 + xy + y^2 = 0$  e ritrovare le conclusioni del primo esercizio. Si scrive

$$y = \frac{-x \pm |x|\sqrt{1 - 4x}}{2}$$



••

- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in caso di più vincoli

**Teorema** Sia data la funzione reale  $f \in C^1(E)$   $E = \overset{\circ}{E} \subseteq \mathbf{R}^n$ . Siano dati  $m$  vincoli differenziabili  $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$   $k = 1, \dots, m < n$ ,  $g_k: U = \overset{\circ}{U} \rightarrow \mathbf{R}$  e  $U_0 = \{\underline{x} \in U: \underline{g}(\underline{x}) = \underline{0}\}$ .  $\underline{y} \in U_0$  è un punto regolare ossia supponiamo che la matrice  $\underline{\partial g} = \begin{pmatrix} (g_1)_{x_1} & (g_1)_{x_2} & \dots & (g_1)_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (g_m)_{x_1} & (g_m)_{x_2} & \dots & (g_m)_{x_n} \end{pmatrix}$  abbia rango massimo  $m$ . Allora  $\underline{y}$  è un punto critico di  $f(\underline{x})$  ristretta agli  $m$  vincoli se esiste una  $m$ -pla di numeri reali  $\underline{\lambda}_0 \in \mathbf{R}^m$  tale che  $f_{\underline{x}} = \underline{\lambda}_0 \underline{g}_{\underline{x}}$  <sup>(6.2)</sup> ossia  $f_{\underline{x}} - \lambda_1 (g_1)_{\underline{x}} - \lambda_2 (g_2)_{\underline{x}} - \dots - \lambda_m (g_m)_{\underline{x}} = \underline{0}$

••

- **Esercizio** Sulla curva di equazione  $y = x^2$ ,  $z = x^2$  nello spazio  $\mathbf{R}^3$  trovare il punto  $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$  più vicino al punto  $(0, 0, 1)$ .

La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di  $\mathbf{R}^3$  dal punto  $(0, 0, 1)$  e quindi la funzione  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$  mentre l'equazione del vincolo è  $\phi_1(\underline{x}) = y - x^2 = 0$ ,  $\phi_2(\underline{x}) = z - x^2 = 0$ . Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice  $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Il minore  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  è sempre diverso da zero per cui il rango è due. A questo punto risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \underline{\partial}(f(\underline{x}) - \lambda_1 \phi_1(\underline{x}) - \lambda_2 \phi_2(\underline{x})) = 0 & \text{ossia} \\ \phi_1(\underline{x}) = 0, & \phi_2(\underline{x}) = 0 \\ 2x(1 + \lambda_1 + \lambda_2) = 0, & 2y - \lambda_1 = 0, & 2(z - 1) - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2, & z = x^2 \end{cases}$$

Si ottengono tre punti  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2$ ;  $P_{\pm} = (\pm \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ . La distanza fra  $P_1$  ed il punto  $(0, 0, 1)$  è 1 mentre fra  $P_{\pm}$  e  $(0, 0, 1)$  è  $\sqrt{\frac{7}{8}} < 1$  per cui il minimo c'è in corrispondenza a  $P_{\pm}$ . Ad ogni modo applichiamo il teorema dell'esercizio precedente e verifichiamo

(6.2) Nella relazione  $f_{\underline{x}} = \underline{\lambda}_0 \underline{g}_{\underline{x}}$  i due vettori  $f_{\underline{x}}$  e  $\underline{\lambda}_0$  sono vettori riga.

quanto trovato. La tangenzialità dello spostamento è data da  $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Dunque si ha  $\begin{cases} -2ax + b = 0 \\ -2ax + c = 0 \end{cases}$  che per ogni  $x$  implica  $b = c$ ; inoltre calcolata per  $x = 0$  dà  $b = c = 0$  e  $a \neq 0$ .

La matrice hessiana da studiare è  $\begin{pmatrix} 2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  e nel caso del punto  $(0, 0, 0)$  bisogna individuare il segno della forma quadratica

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2(2b^2 - a^2) = -2a^2 < 0 \text{ per cui è un massimo relativo.}$$

Nel caso dei punti  $P_{\pm}$  abbiamo che la relazione di tangenzialità implica che  $b = c \neq 0$  per cui

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b^2 > 0 \text{ da cui un minimo relativo.}$$

Il massimo è relativo in quanto la funzione da minimizzare è illimitata sulla curva (la cui proiezione sul piano  $(y, z)$  è la retta di equazione  $y = z$ ). Viceversa il minimo è assoluto essendo la funzione distanza sempre positiva. ●●

### 105 min. Lezione del 17/12/2018 Forme differenziali in $\mathbf{R}^3$

Nozione di curva in  $\mathbf{R}^3$ . Ad esempio  $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt, x_0 + ct)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  è un segmento di retta.

$(x(t), y(t), z(t)) = (a \cos t, a \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$  è un'elica che si avvolge sul cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$  è una forma differenziale in  $\mathbf{R}^3$ .

● **Esercizio** Sia  $C$  l'insieme dato dall'intersezione della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  e il piano  $x + y + z = 0$ . Sia data la forma differenziale  $\omega = ydx + zdy + xdz$ .  $\partial C$  è percorso in modo tale che la sua proiezione sul piano  $(x, y)$  sia percorsa in senso antiorario. Si calcoli  $\int_{\partial+C} \omega$ .

*Prima soluzione* Risolvendo il sistema delle due superfici ed eliminando  $z$  si ha  $2x^2 + 2y^2 + 2xy = a^2$ .

$$\begin{aligned} \omega &= d(xy) - xdy + zdy + x(-dx - dy) = d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - 2xdy + dy(-x - y) = \\ &= -3xdy + d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - \frac{1}{2}d(y^2) \end{aligned}$$

$\left( d(f(\underline{x})) = \frac{\partial f}{\partial x}f(\underline{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}f(\underline{x}) + \frac{\partial f}{\partial z}f(\underline{x}) \right)$  e quindi  $\int_{\partial+C} \omega = -3 \int_{\partial+C} xdy$  e dal Lemma di Gauss-Green,  $\int_{\partial+C} xdy$  è l'area della proiezione sul piano  $(x, y)$  del disco contenuto all'interno della circonferenza equatoriale. L'area ha il segno  $+$  se la proiezione della circonferenza è percorsa in senso antiorario. La proiezione di tale circonferenza è l'ellisse  $2x^2 + 2y^2 + 2xy = a^2$ .

Con la trasformazione di coordinate  $\begin{cases} x = (-\xi + \eta)/\sqrt{2} \\ y = (\xi + \eta)/\sqrt{2} \end{cases}$  l'ellisse diventa  $\xi^2 + 3\eta^2 = a^2$  e  $z = -\sqrt{2}\xi$ . L'area è  $\pi \frac{a^2}{\sqrt{3}}$  e quindi  $\int_{\partial+C} \omega = -\sqrt{3}\pi a^2$  ●●

*Seconda soluzione* Con il cambio di coordinate  $((\xi, \eta) \rightarrow (x, y))$  scritto sopra abbiamo

$$\omega = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \frac{d\eta - d\xi}{\sqrt{2}} + \left( -\frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \right) \frac{d\xi + d\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}} d \left( \underbrace{-\frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}}_{z = -x - y} \right) + =$$

Osserviamo che  $\xi d(\xi) = d(\xi^2)/2$  (così per  $\eta$ ) e quindi l'integrale su una curva chiusa è zero. Rimaniamo con

$$\frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{2} + (-\sqrt{2}\eta) \frac{d\xi + d\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}} (-\sqrt{2}d\eta) =$$

e poi con

$$\frac{3}{2}(\xi d\eta - \eta d\xi), \quad \xi = a \cos t, \quad \eta = -\frac{a}{\sqrt{3}} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \implies \int \frac{3}{2}(\xi d\eta - \eta d\xi) = -\sqrt{3}\pi a^2$$

••

♠ *Terza soluzione* Come la prima solo che per calcolare  $\int_{\partial+C} xdy$  usiamo coordinate polari.

Dunque dobbiamo calcolare l'integrale  $\iint_{2x^2+2y^2+2xy \leq a^2} dx dy$ . Usiamo le coordinate polari  $x = \rho \cos \vartheta, y = \rho \sin \vartheta$ , ed otteniamo che  $2x^2+2y^2+2xy = a^2$  è equivalente a  $2\rho^2+2\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = a^2$

ossia  $\rho^2 = \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$  e quindi  $\iint_{\bar{D}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}}} \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2} \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^\pi d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} + \int_{\pi/2}^\pi d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$ . Con la sostituzione  $\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}$  si ha

$\int_{\pi/2}^\pi d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{a^2}{2-\sin 2\vartheta}$  e quindi l'integrale è  $\int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{4a^2}{4-\sin^2 2\vartheta}$ . Per risolvere l'integrale bisogna effettuare la sostituzione  $\vartheta = \arctan x$  da cui si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \frac{4a^2}{4-4\frac{x^2}{(1+x^2)^2}} = a^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{x^4+x^2+1} = a^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{a^2}{2} 2\pi \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e quindi il risultato è  $-\sqrt{3}\pi a^2$

♠♠

Nozione di rotore di un campo vettoriale e di forma chiusa in  $\mathbf{R}^3$ .

**Teorema** Sia  $A \subseteq \mathbf{R}^3$  aperto e connesso e sia  $\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$  una forma tale che  $a, b, c \in C^1(A)$ . Allora la forma è esatta se e solo se l'integrale su ogni curva chiusa regolare, semplice è nullo. ••

Il Teorema 3 a pag.17 delle dispense di Tauraso sugli integrali curvilinei dimostra lo stesso risultato per forme differenziali sul piano. La esattezza vuol dire che esiste una funzione  $f \in C^1(A)$  tale che  $\underline{\partial}f = (a, b, c)$ .

• **Funzione potenziale per forme chiuse definite in  $\mathbf{R}^3$  oppure parallelepipedi**

Quindi data una forma  $\omega$  chiusa in  $\mathbf{R}^2$  oppure  $\mathbf{R}^3$  definita su di un semplicemente connesso possiamo trovare una funzione (detta anche *funzione potenziale*)  $f(\underline{x})$  tale che  $\omega = df$ . Procedendo come nel Teorema 8.2 sia  $\underline{\gamma}(t)$  una curva tale che  $\underline{\gamma}(a) = \underline{x}_o$  e  $\underline{\gamma}(b) = \underline{x}$ .  $\underline{\gamma}(t) \in E$  per ogni  $t$ . Come funzione  $f(\underline{x})$  basta prendere  $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ . Ai fini del calcolo però conviene prendere la curva

che rende l'integrale il più semplice possibile e ciò dipende dalla struttura di  $E$ . Se ad esempio  $E = \mathbf{R}^3$  e  $\omega = \sum_{i=1}^3 a_i(\underline{x}) dx_i$  allora una possibile curva regolare a tratti è :  $\underline{\gamma}_1(t) = (t, y_o, z_o)$   $x_o \leq t \leq x$ ,  $\underline{\gamma}_2(t) = (x, t, z_o)$   $y_o \leq t \leq y$ ,  $\underline{\gamma}_3(t) = (x, y, t)$   $z_o \leq t \leq z$ .

$$f(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega + \int_{\underline{\gamma}_2} \omega + \int_{\underline{\gamma}_3} \omega = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y dt a_2(x, t, z_o) + \int_{z_o}^z dt a_3(x, y, t).$$

**Esercizio** Si verifichi che  $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \omega(\underline{x})$ .

$$\begin{aligned} f_x &= a_1(x, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y \frac{\partial a_2}{\partial x}(x, t, z_o) dt + \int_{z_o}^z \frac{\partial a_3}{\partial x}(x, y, t) dt && \stackrel{\text{usando la chiusura}}{=} \\ &= a_1(x, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y \frac{\partial a_1}{\partial t}(x, t, z_o) dt + \int_{z_o}^z \frac{\partial a_1}{\partial t}(x, y, t) dt \\ &= a_1(x, y_o, z_o) + a_1(x, y, z_o) - a_1(x, y_o, z_o) + a_1(x, y, z) - a_1(x, y, z_o) = a_1(x, y, z) \\ f_y &= a_2(x, y, z_o) + \int_{z_o}^z dt \frac{\partial a_3}{\partial y}(x, y, t) = a_2(x, y, z_o) + \int_{z_o}^z dt \frac{\partial a_2}{\partial z}(x, y, t) = \\ &= a_2(x, y, z_o) + a_2(x, y, z) - a_2(x, y, z_o) = a_2(x, y, z) \end{aligned}$$

Si può trovare la funzione potenziale anche nel seguente modo. Indichiamo con  $g(\underline{x})$  la funzione potenziale.

Si risolve la equazione  $g_x(\underline{x}) = a_1(\underline{x})$  e quindi  $g(\underline{x}) = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y, z) + q(y, z)$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} g_y(\underline{x}) &= \int_{x_o}^x \frac{\partial a_1}{\partial y}(t, y, z) dt + q_y(y, z) && \stackrel{\text{usando la chiusura}}{=} \int_{x_o}^x \frac{\partial a_2}{\partial x}(t, y, z) dt + q_y(y, z) && \stackrel{\text{integrando}}{=} \\ &= a_2(x, y, z) - a_2(x_o, y, z) + q_y(y, z) = a_2(x, y, z) \end{aligned}$$

e quindi  $q_y(y, z) = a_2(x_o, y, z)$ . Una ulteriore integrazione dà  $q(y, z) = \int_{y_o}^y ds a_2(x_o, s, z) + p(z)$ . A questo punto la funzione potenziale è

$$g(x, y, z) = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y, z) + \int_{y_o}^y ds a_2(x_o, s, z) + p(z).$$

L'ultima derivazione dà

$$g_z(x, y, z) = \int_{x_o}^x dt \frac{\partial a_1}{\partial z}(t, y, z) + \int_{y_o}^y ds \frac{\partial a_2}{\partial z}(x_o, s, z) + p_z(z).$$

ed usando sempre la chiusura si perviene a

$$g_z(x, y, z) = \int_{x_o}^x \frac{\partial a_3}{\partial x}(t, y, z) dt + \int_{y_o}^y \frac{\partial a_3}{\partial y}(x_o, s, z) ds + p_z = a_3(x, y, z).$$

ossia

$$g_z(x, y, z) = a_3(x, y, z) - a_3(x_o, y, z) + a_3(x_o, y, z) - a_3(x_o, y_o, z) + p_z = a_3(x, y, z)$$

Integrando si ha  $p_z(z) = a_3(x_o, y_o, z)$  e quindi  $p(z) = c + \int_{z_o}^z du a_3(x_o, y_o, u)$  e quindi la funzione potenziale è  $g(x, y, z) = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y, z) + \int_{y_o}^y ds a_2(x_o, s, z) + \int_{z_o}^z du a_3(x_o, y_o, u) + c$

Ogni altra funzione potenziale differisce dalla precedente per una costante. Infatti

**Esercizio** Si dimostri che la funzione appena scritta è uguale alla precedente a meno di una costante.

Ci basta far vedere che  $\underline{\partial}f(\underline{x}) = \underline{\partial}g(\underline{x})$  e ciò è chiaramente vero. ●●

**105 min. Lezione del 18/12/2018 Forme differenziali in  $\mathbf{R}^3$**

Paragrafo 42 senza la dimostrazione di pag.198

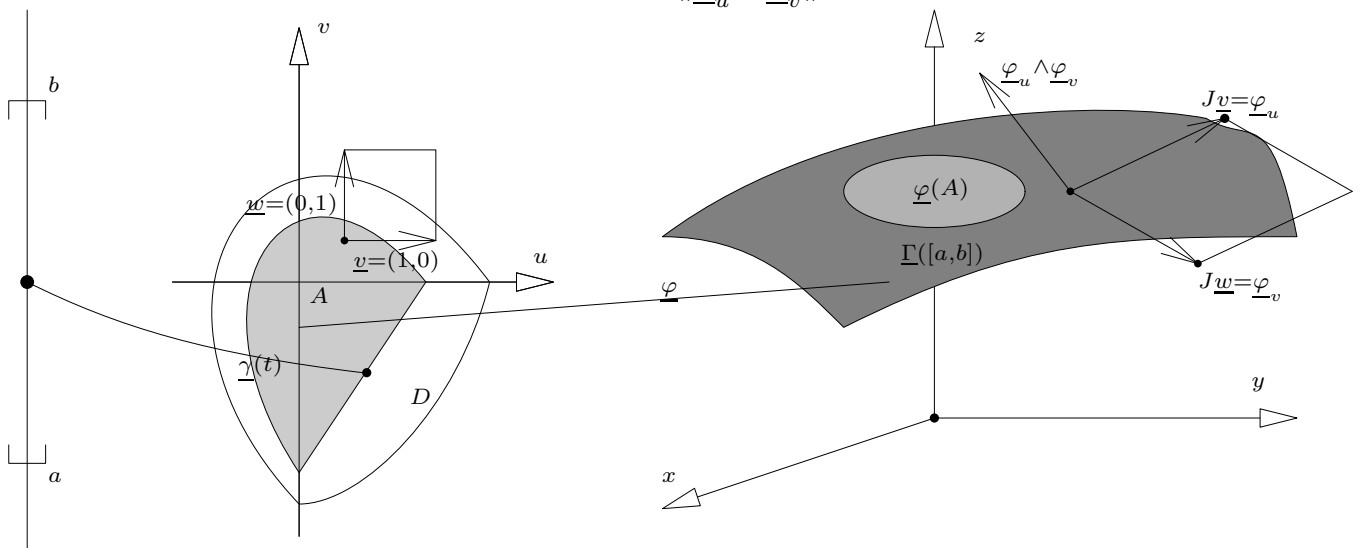
● **Teorema di Stokes o del rotore**

Sia  $D \subset \mathbf{R}^2$  compatto  $D = \overline{B}$  con  $B$  aperto e connesso.  $\underline{\varphi}: D \rightarrow \mathbf{R}^3$  è una superficie regolare di equazioni parametriche  $\underline{\varphi}(u, v) = \begin{cases} x = \varphi^1(u, v) \\ y = \varphi^2(u, v) \\ z = \varphi^3(u, v) \end{cases}$ . Sia  $A = \overset{\circ}{A}$  un aperto tale che

$$\overline{A} \subset \overset{\circ}{D} \text{ e } \partial A \text{ è una curva regolare. Sia } S = \underline{\varphi}(A). \text{ Chiameremo } \textit{bordo di } S \text{ l'immagine secondo } \underline{\varphi} \text{ della frontiera di } A \text{ ossia } \partial S = \underline{\varphi}(\partial A). \text{ Sia } \underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2 \text{ una curva il cui sostegno è } \partial A \text{ e orienta } \partial A \text{ positivamente. La curva } \underline{\Gamma} = \underline{\varphi} \circ \underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ ha come sostegno } \partial S. \text{ Si dice che } \Gamma \text{ orienta positivamente } \partial S \text{ e si indica con } \partial^+ S \text{ il cammino individuato da } \Gamma.$$

Se  $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$  la curva  $\Gamma$  ha equazioni  $\begin{cases} x = \varphi^1(u(t), v(t)) \\ y = \varphi^2(u(t), v(t)) \\ z = \varphi^3(u(t), v(t)) \end{cases}$  I vettori  $\underline{a}(t) \in \mathbf{R}^2$  e  $\underline{b}(t) \in \mathbf{R}^2$  sono rispettivamente i vettori, normalizzati a uno, tangente e ortogonale a  $\partial A$  in modo tale che  $\underline{\gamma}$  orienti positivamente  $\partial A$ .  $\underline{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2) = \frac{1}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}}(u'(t), v'(t))$  e  $\underline{b}(t) = (b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}}(v'(t), -u'(t))$ . La matrice  $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix}$  applicata ai vettori di  $\mathbf{R}^2$  ci fornisce la loro immagine in  $\mathbf{R}^3$  sotto la parametrizzazione della superficie ossia i due vettori  $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{t}$  e  $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\tau}$ . Sia  $\underline{n}_e$  la normale esterna che è definita come quella normale (delle due possibili  $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$  e  $-\underline{n}$ ) tale che  $(\underline{\tau} \wedge \underline{t}) \cdot \underline{n}_e > 0$

La matrice  $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix}$  applicata ai vettori di  $\mathbf{R}^2$  ci fornisce la loro immagine in  $\mathbf{R}^3$  sotto la parametrizzazione della superficie ossia i due vettori  $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{t}$  e  $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\tau}$ . Sia  $\underline{n}_e$  la normale esterna che è definita come quella normale (delle due possibili  $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$  e  $-\underline{n}$ ) tale che  $(\underline{\tau} \wedge \underline{t}) \cdot \underline{n}_e > 0$



Sia ora  $\underline{V}(\underline{x}) = P(\underline{x})\underline{i} + Q(\underline{x})\underline{j} + R(\underline{x})\underline{k}$  un campo vettoriale al quale è associata la forma differenziale  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ . Abbiamo il seguente importante teorema

**Teorema 8.6 (di Stokes)** Sia  $S$  una superficie di classe  $C^2$ . Allora  $\iint_S (\underline{rotV}, \underline{n}) d\sigma = \int_{\partial^+ S} \omega$

**Esempi**

Il primo esercizio del 17/2 si può risolvere anche con il Teorema di Stokes.

L'intersezione delle due superfici è una circonferenza equatoriale della sfera la cui inclinazione è tale da rendere il disco (detto  $D$ ) contenuto in tale circonferenza perpendicolare ai vettori  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  e  $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$ . Possiamo applicare il Teorema di Stokes ottenendo  $\int_{\partial^+ C} \omega = \iint_D (\underline{rotV}, \underline{n}) d\sigma$ . La normale dettata dalla parametrizzazione della superficie e della curva è  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  e quindi  $\iint_D (\underline{rotV}, \underline{n}) d\sigma = \iint_D -\frac{3}{\sqrt{3}} d\sigma = -3 \iint_{\tilde{D}} dx dy$  dove  $\tilde{D}$  è la proiezione sul piano  $(x, y)$  della superficie planare  $D$  ossia  $\tilde{D} = \{2x^2 + 2y^2 + 2xy \leq a^2\}$ . ●●

♠ Si valuti  $\int_{\varphi} \omega$  dove  $\omega = (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$  e  $\varphi$  è la curva il cui sostegno è costituito dall'intersezione del cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  e dal piano  $y = z$ .

La curva  $\varphi$  è chiusa in quanto il piano è inclinato e il cilindro è infinito. Sostituendo  $z = y$  nella forma differenziale vediamo che  $\omega = 2d(xy)$  e quindi l'integrale è nullo.

Usando il Teorema di Stokes vediamo che  $\underline{rotV} = \underline{0}$  dove  $\underline{V} = (y + z)\underline{i} + (z + x)\underline{j} + (x + y)\underline{k}$  e quindi...

Sia  $C$  l'insieme dato dall'intersezione del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  e il piano  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$   $a, b > 0$ . Sia data la forma differenziale  $\omega = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ . Sia  $\partial^+ C$  l'orientazione positiva su  $C$ . Si calcoli  $\int_{\partial^+ C} \omega$ .

L'intersezione (detta  $S$ ) delle due superfici, una volta proiettata sul piano  $(x, y)$  è data dalla circonferenza  $x^2 + y^2 = a^2$  e il disco da essa contenuto è detto  $D$ .

Usando l'espressione di  $z$  in funzione di  $x$ , l'integrale della forma è dato da  $\int_{\varphi} ((ydx - xdy) - \frac{2b}{a} xdy) = -2\pi a^2 - 2ab\pi = -2a\pi(a + b)$  e il bordo di  $S$  è percorso in senso antiorario.  $\varphi$  è la parametrizzazione del bordo di  $S$  ossia  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = b(1 - \cos t)$  ma tale parametrizzazione non serve ai fini del calcolo.

Usando il Teorema di Stokes abbiamo  $\underline{rotV} = -2(1, 1, 1)$  dove  $\underline{V} = (y - z)\underline{i} + (z - x)\underline{j} + (x - y)\underline{k}$  e la normale esterna è il vettore  $\underline{n}_e = \frac{1}{c}(\frac{b}{a}, 0, 1)$  dove  $c$  è il modulo del vettore  $(\frac{b}{a}, 0, 1)$ .  $\iint_D (\underline{rotV}, \underline{n}_e) d\sigma = (-2\frac{b}{a} - 2)\pi a^2$ . ♠♠

**105 min. Lezione del 20/12/2018 Applicazioni Teorema di Stokes e Teorema di Gauss. prime nozioni del capitolo 1**

Paragrafo 51 ed esempio 1 a pag.259

● Sia  $C$  l'insieme dato dall'intersezione della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$  e  $x^2 + y^2 = 2bx, z > 0, 0 < b < a$ . Si calcoli  $\int_{\partial^+ C} \omega$  dove  $\omega = (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ .

La proiezione di  $C$  sul piano  $(x, y)$  è il cerchio  $(x - b)^2 + y^2 = b^2$  detto  $D$ . Usando le relazioni fra le variabili si ha  $\int_{\partial^+ C} \omega = \int_{\partial^+ C} (2axdy + 2bx dz)$ . Ora  $z = \sqrt{2a - 2b}\sqrt{x}$  per cui  $dz = \sqrt{\frac{a-b}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}$  e quindi, a parte una costante  $x dz = \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$  da cui l'integrale di linea nullo su una curva chiusa. Si è ottenuto quindi  $\int_{\partial^+ C} \omega = \int_{\partial^+ C} 2axdy$  che è uguale all'area della proiezione sul piano  $(x, y)$  dell'intersezione fra le due figure geometriche (un cerchio di raggio  $b$  la cui area è  $\pi b^2$ ) moltiplicata per  $2a$ .

Per usare il Teorema di Stokes calcoliamo  $\underline{rotV} = 2(y - z)\underline{i} + 2(z - x)\underline{j} + 2(x - y)\underline{k}$  e chiaramente  $\underline{V} = (y^2 + z^2)\underline{i} + (x^2 + z^2)\underline{j} + (x^2 + y^2)\underline{k}$ . La normale esterna alla superficie è  $\underline{n}_e = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$  dove  $\underline{v} = (\frac{x-a}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2 - y^2}}, 1)$ ;  $(\underline{rotV} \cdot \underline{v}) = 2a$  e  $\iint_S (\underline{rotV} \cdot \underline{n}_e) d\sigma = \iint_D 2adxdy = 2\pi ab^2$ ,

$S$  è la porzione di spazio delimitata da  $C$ . ●●

● **Teorema di Gauss o della divergenza**

Un insieme aperto  $D \subset \mathbf{R}^n$  è detto regolare se esiste una funzione  $F(\underline{x})$ ,  $F \in C^1(\mathbf{R}^n)$  tale che 1)  $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : F(\underline{x}) < 0\}$  2)  $\partial D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : F(\underline{x}) = 0\}$  3)  $\underline{\partial}F(\underline{x}) \neq \underline{0}$  per ogni  $\underline{x} \in \partial D$

La frontiera di un aperto regolare è una superficie regolare grazie al Teorema delle funzioni implicite. Il vettore  $\underline{n}_e(\underline{x}) = \frac{\underline{\partial}F(\underline{x})}{\|\underline{\partial}F(\underline{x})\|}$  è normale a  $\partial D$  ed è diretto verso l'esterno. Infatti  $F(\underline{x} + t\underline{n}_e) = F(\underline{x}) + t\underline{\partial}F(\underline{x}) \cdot \underline{n}_e + o(|t|) = t\|\underline{\partial}F(\underline{x})\| + o(|t|)$  e per  $t > 0$  e piccolo la funzione è positiva. Vuol dire che muovendosi sul segmento  $[\underline{x}, \underline{x} + \underline{n}_e]$  da  $\underline{x}$  verso  $\underline{x} + \underline{n}_e$ , si aumenta il valore di  $F(\underline{x})$  e quindi ci si trova fuori da  $D$ .

Sia  $\underline{V}(\underline{x})$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  definito su  $\mathbf{R}^n$  oppure su di un suo sottoinsieme aperto.

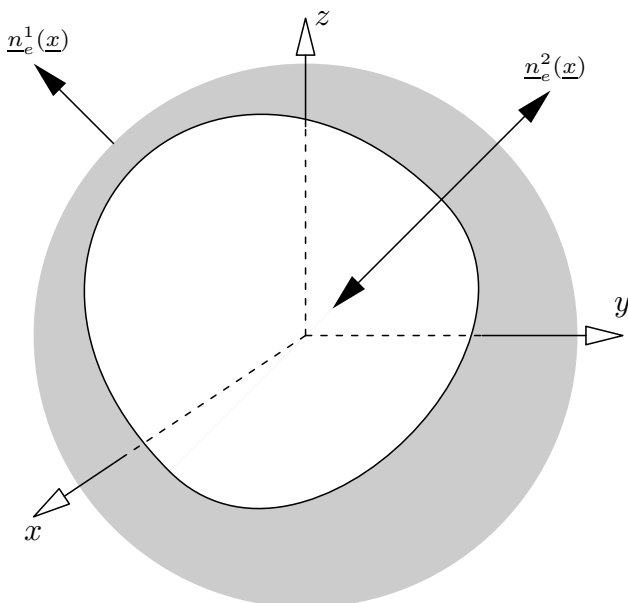
**Definizione** La funzione  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$  è detta divergenza del campo vettoriale e di indica con  $\text{div}\underline{V}$ .

Ad esempio sia  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ ;  $F(\underline{x}) < 0$  definisce l'interno della sfera di raggio  $r$  detto  $D$ .  $F(x, y, z) = 0$  definisce la superficie ossia  $\partial D$ .  $\underline{\partial}F(\underline{x}) = 2(x, y, z) \neq \underline{0}$  per ogni  $\underline{x} \in \partial D$  e quindi l'interno della sfera è un aperto regolare.

Si ha il seguente

**Teorema (di Gauss)** Sia  $D$  un aperto regolare limitato e sia  $\underline{V}(\underline{x})$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  in un aperto  $E$  contenente  $\bar{D}$ . Allora  $\iiint_D \text{div}(\underline{V}) dx dy dz = \iint_{\partial D} (\underline{n}_e(\underline{x}), \underline{V}(\underline{x})) d\sigma$

**Corollario** Siano dati due aperti regolari  $D_1$  e  $D_2$  tali che  $\bar{D}_2 \subset D_1$ . Sia dato il campo vettoriale  $\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^3 V_i(\underline{x})\underline{e}_i$ ,  $\underline{V} \in C^1(\mathbf{R}^3)$  tale che  $\text{div}\underline{V} \equiv 0$ . Siano  $\underline{n}_e^1$  e  $\underline{n}_e^2$  le normali esterne delle regioni racchiuse da  $D_1$  e  $D_2$ . Allora abbiamo  $\iint_{\partial D_1} (\underline{V}, \underline{n}_e^1) d\sigma = \iint_{\partial D_2} (\underline{V}, \underline{n}_e^2) d\sigma$ .



● **Esercizio** Calcolare il flusso del campo vettoriale  $\underline{F}(x, y, z) = \frac{xy^2}{2R^2}\underline{i} + \underline{j} + z\underline{k}$  verso l'esterno



della superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$  e verso l'esterno della superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$  ( $R$  è una costante)

Applichiamo il Teorema di Gauss ed otteniamo  $\iint_V (\frac{1}{2R^2}y^2 + 1)dx dy dz =$   
 $= R^3 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^2 \sin \theta + R^3 \frac{1}{2} \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^4 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi = R^3 \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{5} R^3 \pi \frac{2}{3} =$   
 $\frac{11}{15} \pi R^3$  ●●



Stesso esercizio di prima ma stavolta  $z \geq 0$ .

Applicando la definizione si ha un calcolo più lungo. Le superfici da parametrizzare sono due. La prima è la semisfera con  $z \geq 0$ . Usando la parametrizzazione  $(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \doteq (r_1, r_2, r_3) \doteq \underline{r}, D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  si ha che la normale esterna  $\underline{r}_x \wedge \underline{r}_y = (\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1)$  ed il cui modulo è  $\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ . L'integrale  $\iint_{\Sigma} (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma$  è uguale a  $\iint_D (\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}})^{-1} (\frac{1}{2R^2} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$ . Passando a coordinate polari nell'insieme  $x^2 + y^2 \leq R^2$  l'integrale diventa  $\int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho d\theta \rho (\frac{1}{2R^2} \frac{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}})$  (l'integrale di mezzo è nullo). Ora  $\int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho d\theta \rho \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2\pi \frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{3/2} \Big|_R^0 = \frac{2}{3} \pi R^3$ . Nel primo integrale vi è  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{1}{3} d(\sin^3 \theta) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{3} \pi - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$  da cui  $\frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{3}$  e quindi  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$ . Il secondo integrale del primo contributo è  $\int_0^R d\rho \frac{\rho^5}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$  ed integrando per parti si arriva a  $\frac{8}{15} \pi R^5$ .

La seconda superficie da parametrizzare è  $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$  e la normale esterna è  $(0, 0, -1)$  per cui l'integrale da calcolare è  $\iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} z dx dy$  che vale zero essendo zero il valore di  $z$ . Mettendo assieme i vari contributi otteniamo  $\frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{1}{2R^2} \frac{\pi}{4} \frac{8}{15} R^5 = \frac{11}{15} \pi R^3$

Un'altra possibile parametrizzazione ("angolare") è la seguente seguente  $(x, y, z) = \underline{r}(\vartheta, \varphi) = (r_1(\vartheta, \varphi), r_2(\vartheta, \varphi), r_3(\vartheta, \varphi))$   $r_1 = R \sin \vartheta \cos \varphi, r_2 = R \sin \vartheta \sin \varphi, r_3 = \cos \vartheta$  si avrebbe  $\underline{r}_\vartheta \wedge \underline{r}_\varphi = \underline{i}(R^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi) + \underline{j}(R^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi) + \underline{k}(\sin \vartheta \cos \vartheta)$ . Il dominio di variazione delle variabili  $(\vartheta, \varphi)$  è il rettangolo  $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \doteq D$

$\iint_{\Sigma} (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = \iint_D (\underline{F}, \underline{r}_\vartheta \wedge \underline{r}_\varphi) d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta d\varphi (\frac{R^3}{2} \sin^5 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + R^3 \sin^2 \vartheta \cos \varphi + R^3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta)$ .

$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$  per cui il secondo integrale vale zero.  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta d\varphi R^3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta = R^2 2\pi \frac{1}{3}$ ,  
 $I \doteq \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d(\frac{1}{3} \sin^3 \varphi) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^4 \varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi$  e quindi  $\frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{3}$  da cui  $I = \frac{\pi}{4}$   
 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin^5 \vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin^3 \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos \vartheta \frac{1}{4} d(\sin^4 \vartheta) =$   
 $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sin^5 \vartheta$  da cui  $\frac{5}{4} I = \frac{2}{3}$  e quindi  $I = \frac{8}{15}$ . Sommando i due contributi otteniamo il risultato.

Vi è una terza possibile parametrizzazione che è quella ottenuta "affettando" la sfera con un piano orizzontale. Le coordinate sono  $(u, \theta)$   $(x, y, z) = \underline{r}(\vartheta, \varphi) = (r_1(\vartheta, \varphi), r_2(\vartheta, \varphi), r_3(\vartheta, \varphi))$   $r_1(u, \theta) = \sqrt{R^2 - u^2} \cos \theta, r_2(u, \theta) = \sqrt{R^2 - u^2} \sin \theta, r_3(u, \theta) = u$  e  $\underline{r}_u \wedge \underline{r}_\theta = \underline{i} \cos \theta \sqrt{R^2 - u^2} + \underline{j} \sin \theta \sqrt{R^2 - u^2} + \underline{k}u$ .  $(u, \theta) \in D = \{(u, \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq u \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$\iint_{\Sigma} (\underline{F}, \underline{n}) d\sigma = \iint_D (\underline{F}, \underline{r}_u \wedge \underline{r}_\theta) d\theta du =$   
 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R du (\frac{1}{2R^2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta (R^2 - u^2)^2 + \sin \theta \sqrt{R^2 - u^2} + u^2) = \frac{11}{15} \pi R^3$

si può verificare che  $\frac{22}{15} \pi R^3$  è il flusso uscente se calcolato su tutta la sfera. ♠♠

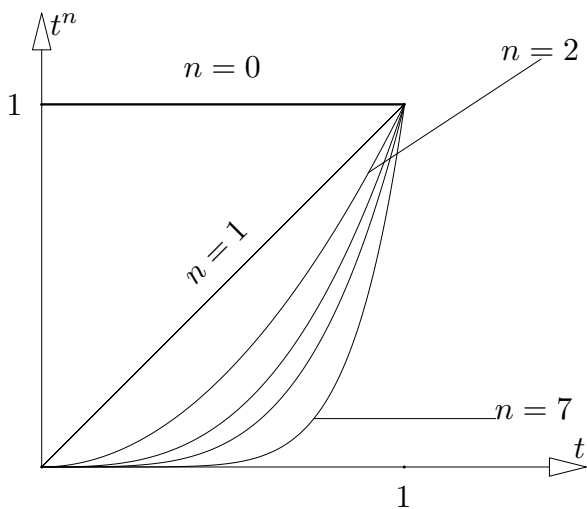
Paragrafi 1 capitolo 1 sulle successioni di funzioni.

• Cosa è una successione di funzioni è noto a tutti. Ad esempio si prenda la successione  $\{f_n(t)\} = \{t^n\}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  e  $n$  intero positivo o nullo. In altre parole per  $n = 0$  l'elemento della successione è dato dalla funzione identicamente uguale ad 1 e quindi  $f_0(t) \equiv 1$ . Se  $n = 1$  abbiamo  $f_1(t) = t$  e via dicendo. La successione è quindi data dalle funzioni  $(1, t, t^2, t^3, \dots, t^n \dots)$ . Per ogni valore di  $t = t_o$  abbiamo una successione numerica data da  $(1, t_o, t_o^2, t_o^3, \dots, t_o^n \dots)$ . Chiediamoci ora a cosa tende la successione  $\{f_n(t_o)\}$  per  $n \rightarrow +\infty$  ed al variare di  $t_o \in [0, 1]$  (si fissa  $t$  e si manda  $n$  all'infinito). Ad esempio prendiamo  $t_o = 0$  ed osserviamo che  $\{f_n(0)\} = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ ; ne concludiamo che  $f_n(0) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . La convergenza a 0 di  $f_n(0)$  si può ovviamente codificare attraverso la definizione usuale ossia  $\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$  t.c.  $n > n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(0)| < \varepsilon$  e dalla forma di  $\{f_n(0)\}$  viene fuori che  $n_\varepsilon = 0$ .

Se  $t_o \in [0, 1)$  ci si convince che il limite fa ancora zero ( $t_o^n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ ) ed inoltre (ovviamente)  $\forall \varepsilon \exists n_{\varepsilon, t_o}$  t.c.  $n > n_{\varepsilon, t_o} \Rightarrow |f_n(t_o)| < \varepsilon$ . Volendo trovare (od il più delle volte dare una stima) di  $n_{\varepsilon, t_o}$  si ha  $t_o^n < \varepsilon \Rightarrow n \ln t_o < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln t_o}$  da cui  $n_{\varepsilon, t_o} = \lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln t_o} \rfloor + 1$  ed effettivamente rimane la dipendenza da  $t_o$ . Salta immediatamente agli occhi dello studente/ssa accorto/a che se  $t_o \rightarrow 1$  il precedente conto perde di significato. In altre parole  $n_{\varepsilon, t_o} \rightarrow +\infty$  per  $t_o \rightarrow 1$ . In Analisi questo fatto si codifica dicendo che la successione  $\{f_n(t)\}$  non è uniformemente convergente in  $[a, 1)$  per qualsiasi  $0 \leq a < 1$ . Per  $t = 1$  la successione converge sempre ma al valore 1 ed  $n_\varepsilon$  è zero per ogni  $\varepsilon$ . La funzione costituente il limite della successione di funzioni è data da

$$f(t) \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 1 \\ 1 & t = 1 \end{cases}$$

Si noti che mentre le funzioni  $f_n(t)$  sono tutte continue in  $[0, 1]$ , la funzione  $f(t)$  è discontinua per  $t = 1$ . La figura forse aiuterà la comprensione



A questo punto possiamo dare la definizione di *successione uniformemente convergente*.

**Definizione** Data la successione  $\{f_n(x)\}$  con  $x \in E$  ( $E \subset \mathbf{R}$  insieme arbitrario) supponiamo che per ogni  $x \in E$  si abbia il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $f_n(x)$ . Definiamo  $f(x) \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . La successione  $\{f_n\}$  si dice *uniformemente convergente* su  $E$  ad  $f(x)$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  t.c.  $n > n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in E$  ( $n_\varepsilon$  va bene per tutto  $E$ ).

Come conseguenza possiamo scrivere che la successione è uniformemente convergente se  $n > n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ . ●●

**105 min. Lezione del 07/01/2019 Successioni e serie di funzioni**

Da pag.2 fino a pag.11 (esclusa la proposizione)

**105 min. Lezione del 08/01/2019 Successioni e serie di funzioni**

Da pag.11 (Proposizione) fino a pag.14 (paragrafo 5 escluso).

- Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2 k}$ . Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

*Svolgimento* La serie converge puntualmente per ogni  $x \in \mathbf{R}$ . Se  $x = 0$  vale identicamente zero. Se  $x \neq 0$  possiamo osservare che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{e^{-x^2 k}} = e^{-x^2} < 1$  da cui la convergenza. Possiamo anche osservare che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^2 e^{-x^2 k} = 0$ .

Convergenza uniforme. Siccome in questo caso specifico possiamo addirittura calcolare  $S(x)$

$$S(x) \doteq x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2 k} = \begin{cases} x^2 \frac{1}{1 - e^{-x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

siamo in grado di dire che  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \neq 0$  ossia la funzione limite non è continua in  $x = 0$ ; segno questo che la convergenza non è uniforme in nessun intervallo del tipo  $(-a, a)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$ .

Dimostrare che la convergenza è uniforme in ogni intervallo del tipo  $[a, +\infty)$  con  $a > 0$ . ●●

♠ Dimostrazione diretta che la convergenza non è uniforme in  $(0, 1)$ . Sia  $x \in [1/\delta, 2/\delta] \subset (0, 1)$  e sia  $x$  tale che  $x^2 k \leq 1$ . Per questo è sufficiente  $k \leq \delta^2/4$ . Ne segue che

$$\sup_{(0,1)} x^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-x^2 k} \geq \sup_{[1/\delta, 2/\delta]} x^2 \sum_{k=n+1}^{\delta^2/4} e^{-x^2 k} \geq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{\delta^2/4} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \frac{\delta^2 - n}{4\delta^2} \geq \frac{1}{8e}$$

non appena  $\delta^2 > n^2/4$  per cui, dato un qualsiasi intero  $n$ , trovo un  $\delta$  che rende la precedente quantità maggiore di  $1/(8e)$  ossia la non convergenza uniforme. ♠♠

- Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k}$ . Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

*Svolgimento* Per la convergenza puntuale si procede come sopra e si verifica che converge per ogni  $x \in \mathbf{R}$ . Poi verifichiamo che  $S(x) \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} = \frac{x^3}{1 - e^{-x^2}}$  se  $x \neq 0$  mentre vale zero se  $x = 0$ . Siccome  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0$ , ci sono gli indizi di una possibile uniforme convergenza ed infatti

il massimo della funzione  $x^3 e^{-x^2 k}$  si ha per  $x_k = \left(\frac{3}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq \bar{x}_k$  da cui

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} |_{x_k = \bar{x}_k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-3/2} < \varepsilon$$

da cui la convergenza totale e quindi uniforme. ●●

- Dimostrare che la serie geometrica  $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$  non converge uniformemente per  $0 \leq x < 1$ . Infatti

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ . Ora prendiamo  $x = 1 - 1/n$  da cui  $n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow +\infty$  e quindi niente uniforme convergenza. ●●

**45 min. Lezione del 10/01/2019 (ultima lezione) Successioni e serie di funzioni**

Richiami sulle serie di potenze. Serie di Taylor.