Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
02–09–2019 A.A. 2018/2019, Sessione autunnale, primo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Consegnare il presente foglio sempre, anche in caso di ritiro

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. In caso di ritiro scrivere "Ritirata/o" sotto al cognome

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4 Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 1,2,5,6

1) (7.5 punti) Sia data la curva in $\mathbf{R}^2$ $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t))$ con $\gamma_1 = 2t - t^3/6$, $\gamma_2(t) = t^2$, $0 \le t \le 1$. Si calcoli l'area della superficie $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon (x,y) \in \underline{\gamma},\ 0 \le z \le x+y\}$

Si veda il compito del 22/6/2016 A.A.2015/2016. La struttura della soluzione è la stessa. Qui abbiamo

$$\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2}+2\right)\left(2t+t^2-\frac{t^3}{6}\right) = \frac{1051}{360}$$

2) (7.5 punti) Calcolare (Nel risultato finale non voglio vedere neppure una i)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(x^2+x+1)}dx$$

[1) Si disegni il cammino di integrazione, 2) si parametrizzino tutte le curve coivolte. Chi scrive che l'integrale è pari alla metà dell'integrale fra $-\infty$ e $+\infty$ prende zero. Si integri la funzione $\frac{Lnz}{(1+z^2)(z^2+z+1)}$ su di un opportuno cammino]

Il cammino "a pacman" ci da $I = -\sum_{res} \frac{\mathrm{Ln}z}{(1+z^2)(1+z+z^2)}$. I residui si hanno nei quattro punti $z_0 = i$, $z_1 = -1$, $z_2 = e^{\frac{2}{3}\pi i}$, $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi i}$, .

$$\lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)\mathrm{Ln}z}{(1+z^2)(1+z+z^2)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{Ln}z + \frac{1}{z}(z-z_0)}{2z(1+z+z^2)+(1+z^2)(1+2z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{Ln}z}{2z(1+z+z^2)} = \frac{-\pi i}{4}$$

$$\lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)\mathrm{Ln}z}{(1+z^2)(1+z+z^2)} = \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{Ln}z + \frac{1}{z}(z-z_1)}{2z(1+z+z^2)+(1+z^2)(1+2z)} = \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{Ln}z}{2z(1+z+z^2)} = \frac{-3\pi i}{4}$$

$$\lim_{z\to z_2} \frac{(z-z_2)\mathrm{Ln}z}{(1+z^2)(1+z+z^2)} = \lim_{z\to z_2} \frac{\mathrm{Ln}z + \frac{1}{z}(z-z_2)}{2z(1+z+z^2)+(1+z^2)(1+2z)} = \lim_{z\to z_2} \frac{\mathrm{Ln}z}{(1+z^2)(1+2z)} =$$
$$= \lim_{z\to z_2} \frac{2\pi i}{3}\frac{1}{-z(1+2z)} = \frac{-2\pi i}{3}\frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi i}{3}$$

$$\lim_{z\to z_3} \frac{(z-z_3)\mathrm{Ln}z}{(1+z^2)(1+z+z^2)} = \lim_{z\to z_3} \frac{\mathrm{Ln}z + \frac{1}{z}(z-z_3)}{2z(1+z+z^2)+(1+z^2)(1+2z)} = \lim_{z\to z_3} \frac{\mathrm{Ln}z}{(1+z^2)(1+2z)} =$$
$$= \lim_{z\to z_3} \frac{4\pi i}{3}\frac{1}{-z(1+2z)} = -\frac{4\pi i}{3}e^{i\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{-\sqrt{3}i} = \frac{-2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi i}{3}$$

La somma è

$$I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

3) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = xt, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0, & x \geq 0, t \geq 0, \end{cases}$$

Detta $v(x,p) = \mathcal{L}u(x,t)$ si ha $p^2 v - a^2 v_{xx} = \dfrac{x}{p^2}$ da cui $v(x,t) = \dfrac{a}{p^5} e^{\frac{-p}{a}x} + \dfrac{x}{p^4}$ da cui $u(x,t) = \dfrac{a}{4!}\left(t - \dfrac{x}{a}\right)^4 H\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{xt^3}{6}$

4) (7.5 punti) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y^2 - y^4 + x^2 + 2y^2 - x$ Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura. [ci sono sei punti critici]

I punti critici $(-1,0)$, $(1/3,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$,

I punti $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, sono di sella. $(1/3,0)$ è di minimo.

$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, sono di massimo

5) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x' + 2x = f(t), \quad x(0) = 0$$

dove $f(t) \equiv 1$ per $0 \leq t < 1$, $f(t) = -2t$ per $1 \leq t < 2$, $f(t) \equiv 0$ per $t \geq 2$ [Si scriva $f(t)$ come combinazione lineare $f(t) = f_1(t-\alpha_1)H(t-\alpha_1) + \ldots + f_n(t-\alpha_n)H(t-\alpha_n)$]

$f(t) = H(t) - 2(t-1)H(t-1) - 3H(t-1) + 2(t-2)H(t-2) + 4H(t-2)$. Sia $\mathcal{L}(x) = X(p)$ e quindi

$$X(p)(p+2) = \frac{1}{p} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} - 3\frac{e^{-p}}{p} + 2\frac{e^{-2p}}{p^2} + 4\frac{e^{-2p}}{p}$$

da cui

$$X(p) = \frac{1}{p(p+2)} - 2\frac{e^{-p}}{p^2(p+2)} - 3\frac{e^{-p}}{p(p+2)} + 2\frac{e^{-2p}}{p^2(p+2)} + 4\frac{e^{-2p}}{p(p+2)}$$

Poi usiamo

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{4p} - \frac{1}{4(p+2)} \qquad \frac{1}{p^2(p+2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{p+2} - \frac{1}{4p} + \frac{1}{2p^2}$$

da cui

$$X(p) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-p} + \frac{1}{2}e^{-2p}\right] + \frac{1}{p+2}\left[\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}e^{-p} - \frac{1}{2}e^{-2p}\right] + \frac{1}{p^2}(-2e^{-p} + 2e^{-2p}) =$$

da cui

$$x(t) = \frac{1}{4}H(t) - \frac{1}{4}H(t-1) + \frac{1}{2}H(t-2) - \frac{1}{4}e^{-2t}H(t) + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}H(t-1) - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}H(t-2) +$$
$$-2(t-1)H(t-1) + 2(t-2)H(t-2) =$$
$$= \frac{1}{4}(1 - e^{-2t})H(t) + H(t-1)\left(\frac{7}{4} - 2t + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)}\right) + H(t-2)\left(2t - 2 - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right) = x(t)$$

6) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{(x^6y^2 + y - x^2y^2 + x^2 + 2x^4y)}{(1+x^2y)^2}dx + \dfrac{x + x^3y}{(1+x^2y)^3}dy$.

Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma} = (t, \sin(t/2))$, $0 \leq t \leq \pi$

R.: $\pi^3/3 + \pi/(1+\pi^2)$. La forma è esatta e il potenziale è $U(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2y} + \dfrac{x^3}{3}$