$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$$

Ci sono molti modi di dimostrare tale risultato. Uno di essi è il seguente.

Supponiamo che n sia pari e scriviamo

$$\frac{n}{1\cdot n}\cdot\frac{n}{2\cdot(n-1)}\cdot\frac{n}{3\cdot(n-2)}\cdots\frac{n}{\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}+1)}\cdot\frac{n}{(\frac{n}{2}+1)\cdot\frac{n}{2}}\cdots\frac{n}{(n-1)\cdot 2}\cdot\frac{n}{n\cdot 1}$$

ossia

$$\frac{n}{2\cdot(n-1)}\cdot\frac{n}{3\cdot(n-2)}\cdots\frac{n}{\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}+1)}\cdot\frac{n}{(\frac{n}{2}+1)\cdot\frac{n}{2}}\cdots\frac{n}{(n-1)\cdot 2}$$

Ora affermiamo che per $2 \leq k \leq n/2$ e $n > 3$ si ha $k(n-k+1) > 3n/2$. Se questo è vero possiamo scrivere

$$\frac{n}{2\cdot(n-1)}\cdot\frac{n}{3\cdot(n-2)}\cdots\frac{n}{\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}+1)}\cdot\frac{n}{(\frac{n}{2}+1)\cdot\frac{n}{2}}\cdots\frac{n}{(n-1)\cdot 2} \leq \frac{n^n}{\frac{3^n n^n}{2^n}} = \frac{2^n}{3^n}$$

e questo è abbastanza per definire il limite.

Sia $3/2 \doteq a$.

$$k(n-k+1) > an \iff n > k\frac{k-1}{k-a} = k+a-1+\frac{a(a-1)}{k-a}$$

Facciamo vedere che $k+a-1+\dfrac{a(a-1)}{k-a}$ è crescente ossia

$$k' > k \implies k'+a-1+\frac{a(a-1)}{k'-a} > k+a-1+\frac{a(a-1)}{k-a}$$

e semplificando questo è vero se e solo se

$$kk' + a(k+k') > -a$$

Notare che k è crescente ma $\dfrac{a(a-1)}{k-a}$ è decrescente. Dunque

$$k+a-1+\frac{a(a-1)}{k-a} \leq \frac{n}{2}+a-1+\frac{a(a-1)}{\frac{n}{2}-a} \leq n \iff n^2-4n \geq 0$$

e questo è vero avendo scelto $n \geq 4$. Quindi abbiamo

$$n \geq \max_{2\leq k\leq n/2} k\frac{k-1}{k-a}$$

Se n è dispari scriviamo

$$\frac{n}{1\cdot n}\cdot\frac{n}{2\cdot(n-1)}\cdots\frac{n}{\frac{n-1}{2}\frac{n+3}{2}}\cdot\frac{n}{.\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{n}{\frac{n+3}{2}\frac{n-1}{2}}\cdots\frac{n}{(n-1)\cdot 2}\cdot\frac{n}{n\cdot 1}$$

e stavolta $2 \leq k \leq (n+1)/2$ per cui dobbiamo osservare che $n > \dfrac{n+1}{2}$ essendo $n \geq k \geq 2$.