Teorema ponte

Dato che nel libro il teorema ponte non sembra espresso in modo molto chiaro, o quantomeno in modo adatto al corso che ho svolto, lo richiamo in queste note. Ci mettiamo nella situazione descritta nelle note che ho messo in rete come *Note sui limiti e sugli integrali*, il cui titolo è

Alcune ulteriori precisazioni sul corso di Matematica per Biotecnologie 2005/06.

Sia $f : A \to \mathbf{R}$, ove A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$, e sia $x_0 \in \overline{A}$. Allora il Teorema ponte dice

Teorema 1. *Dato* $l \in \overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, *allora*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l \quad \text{se e solo se}$$

per ogni successione x_n *tale che* $x_n \in A$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \neq x_0$, *si ha*

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\,.$$

Nota anche che nel caso in cui $x_0 \in A$, allora f è continua in x_0 se e solo se $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ ossia potremmo applicare tale teorema con l al posto di $f(x_0)$. Però in tale caso si può anche togliere la condizione $x_n \neq x_0$ e il teorema si può esprimere così.

Teorema 2. f *è continua in* x_0 *se e solo se per ogni successione* x_n *tale che* $x_n \in A$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, *si ha*

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)\,.$$

Notiamo che il fatto che nel teorema 2 possiamo omettere la condizione $x_n \neq x_0$ è collegato al fatto che, mentre per quanto riguarda il limite in un punto non ha alcuna importanza il comportamento della funzione nel punto, e quindi non possiamo pretendere nulla su $f(a_n)$ se $a_n = x_0$, per la continuità ovviamente conta il valore nel punto.

Vediamo alcune applicazioni del teorema ponte. Dal fatto che $e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ segue che $e^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ossia possiamo "sostituire" x con una qualunque successione che tende al valore a cui facciamo tendere x ossia $+\infty$. Per esempio $e^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dal fatto che $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, possiamo dedurre $\frac{\sin(a_n)}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, per qualunque successione a_n che tende a 0 (e diversa da 0), poiché questa volta il limite si fa per x che tende a 0. In questo caso applichiamo il teorema 1 con $x_0 = 0$, mentre nell'esempio precedente con $x_0 = +\infty$. Per esempio

$$\frac{\sin(\frac{n}{n^2+1})}{\frac{n}{n^2+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Un esempio ulteriore, in cui forse è piú appropriato usare il Teorema 2, è il seguente. Dal fatto che la funzione cos è continua in 0, segue che $\cos(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$, se a_n è una successione tendente a 0 (ovviamente per $n \to +\infty$), per esempio $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$. Penso che molti studenti tendano in realtà ad usare il teorema ponte in modo implicito ossia senza rendersi conto che dietro il loro ragionamento c'è un teorema. Un altro uso del teorema ponte, che forse per lo studente è meno ovvio, è quello di provare che un certo limite non esiste. Guardando con attenzione il teorema 1, ci si rende conto che se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora l deve essere anche il limite di TUTTE le successioni $f(x_n)$, con $x_n \in A$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \neq x_0$; quindi se prendiamo due successioni x_n, x'_n con tali proprietà tali che le successioni $f(x_n)$ e $f(x'_n)$ hanno limiti diversi, allora il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non può esistere, perché, se esistesse dovrebbe coincidere sia col limite di $f(x_n)$, sia col limite di $f(x'_n)$. Vediamo un esempio concreto. Proviamo che il limite $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ non esiste. Prendiamo $x_n = 2n\pi$, $x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Per usare il teorema 1 sul limite per $x \to +\infty$, dobbiamo verificare che $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $x'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ma questo si vede subito. Da note formule sul seno, si ha, ponendo $f(x) = \sin(x)$,

$$f(x_n) = \sin(2n\pi) = \sin(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$f(x'_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Per quanto detto prima, dato che i limiti delle due successioni $\sin(x_n)$ e $\sin(x'_n)$ sono diversi, non esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$.

Per chi è interessato accenno alla dimostrazione di parte del teorema 1. Supponiamo per semplicità x_0 e l numeri reali (ossia non $+\infty, -\infty$). Allora se $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$, per definizione, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. D'altra parte, se $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \neq x_0$, si ha, per n abbastanza grande, $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, e dunque per quanto appena detto $f(x_n) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Questo prova $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Per finire la dimostrazione del teorema 1, bisognerebbe provare che, se non è vero che $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$, allora esiste una successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \neq x_0$ tale che non è vero che $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Questa parte è un po' piú complicata e la tralasciamo. In questa dimostrazione abbiamo sottointeso che $x_n \in A$ per tutte le successioni x_n considerate.

NOTA: abbiamo sempre sottointeso in queste note che i limiti di successioni sono per $n \to +\infty$.