

Soluzione di alcuni esercizi dati in uno scritto dell'anno 2002/03

In queste poche pagine espongo le soluzioni di alcuni esercizi dati in uno scritto di Matematica 0 per B.E.E. l'anno 2002/03. Lo scopo di queste note non è tanto quello di spiegare le soluzioni, ma quello di farvi vedere, su alcuni esempi, come si deve giustificare un esercizio in modo che voi ne traiate aiuto per come vi dovrete comportare durante gli esoneri e gli scritti. Io presenterò per ogni esercizio un metodo risolutivo che non sarà necessariamente l'unico e che potrebbe non essere neanche sempre il migliore. Quindi lo studente che avesse risolto gli esercizi dati in un altro modo non deve pensare che ha sbagliato l'esercizio o che non lo ha giustificato bene, caso mai può chiedere se il metodo di risoluzione dato da lui è corretto e se le giustificazioni che ha dato sono sufficienti. Come prima cosa espongo qui la soluzione degli esercizi. Dopo, scrivo dei commenti su alcune possibili varianti sulle spiegazioni, in modo da far capire quali varianti possono essere accettate come sufficientemente giustificate e quali no.

1) Risolvere la disequazione

$$(\cos x - 8)x > (\cos x - 8) \frac{11x - 35}{x - 1}. \quad (1)$$

Soluzione: Poiché $\cos x \leq 1$ si ha $\cos x - 8 \leq 1 - 8 < 0$ e quindi la disequazione data equivale a

$$x < \frac{11x - 35}{x - 1} \quad (2)$$

che equivale a

$$x - \frac{11x - 35}{x - 1} < 0 \quad (3)$$

che equivale a

$$\frac{x(x - 1) - (11x - 35)}{x - 1} < 0 \quad (4)$$

che equivale a

$$\frac{x^2 - 12x + 35}{x - 1} < 0. \quad (5)$$

Poiché il polinomio di secondo grado $x^2 - 12x + 35$ ha come radici

$$\frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 35}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2} = \{5, 7\}$$

si avrà che il polinomio $x^2 - 12x + 35$ è positivo su $(-\infty, 5)$ e su $(7, +\infty)$ e negativo su $(5, 7)$ (ricordo che un polinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 positivo e con $\Delta > 0$ è positivo sugli intervalli "esterni alle radici" e negativo nell'intervallo tra le radici). Quindi indicando nel disegno qui sotto dove è positivo e dove è negativo il numeratore e dove è positivo e dove è negativo il denominatore si ottiene

Notiamo che in nessuno degli estremi degli intervalli segnati la disequazione è soddisfatta. Quindi la disequazione iniziale (1) è verificata su $(-\infty, 1) \cup (5, 7)$.

-		+		+		+	segno del denominatore
+		+		-		+	segno del numeratore
		1		5		7	
-			+		-		+
							segno della funzione

3) Un teorema afferma che se p è un numero primo, allora $7^p - 7$ è divisibile per p . Quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre da questo teorema tenendo conto che 65537 è primo, mentre 68247 non è primo?

- a) $7^{68247} - 7$ è divisibile per 68247.
- b) $7^{68247} - 7$ non è divisibile per 68247.
- c) $7^{65537} - 7$ è divisibile per 65537.
- d) $7^{65537} - 7$ non è divisibile per 65537.

Soluzione: Poiché 65537 è primo il teorema si applica per $p = 65537$ e quindi c) segue dal teorema, e ovviamente d) non può valere in base al teorema in quanto ci direbbe che c) è falsa. Poiché il teorema ci dice informazioni solo su quello che succede se p è primo, non possiamo dedurre niente se p non è primo. Quindi non possiamo dedurre né a) né b).

4) Dire per quali numeri reali x vale l'uguaglianza

$$x^{\frac{3}{8}} = \frac{1}{x^{-\frac{3}{8}}} \quad (6)$$

e per quali numeri reali x vale l'uguaglianza

$$(x - 5)^7 = \left(\frac{1}{x - 5} \right)^7. \quad (7)$$

Soluzione. Per (6), notiamo che per definizione $x^{-\frac{3}{8}}$ è definita quando $x > 0$ poiché $-\frac{3}{8}$ è un numero razionale negativo con denominatore pari (ricordo che per definizione $x^{-\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{x^{-3}}$ e che x^{-3} è definita per $x \neq 0$). D'altra parte $\sqrt[8]{x^{-3}}$ è definita quando $x^{-3} > 0$ che succede quando $x > 0$. Comunque la parte di spiegazione dentro questa parentesi non è necessaria dato che quello che ho detto prima si giustifica completamente in base alle definizioni date. La scrivo solo per ricordare il perché di una definizione che potrebbe sembrare strana a chi non ne conosce il motivo). Inoltre per $x > 0$ si ha $x^{-\frac{3}{8}} > 0$, quindi posso fare $\frac{1}{x^{-\frac{3}{8}}}$. In conclusione i due membri di (6) sono definiti se e solo se $x > 0$, e

per $x \leq 0$ la formula (6) non avrebbe nemmeno senso. Se $x > 0$ per note proprietà si ha $x^{-\frac{3}{8}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{8}}}$ e quindi $\frac{1}{x^{-\frac{3}{8}}} = x^{\frac{3}{8}}$ e (6) vale. perciò (6) vale se e solo se $x > 0$. Per quanto riguarda (7), notiamo che i due membri di (7) sono entrambi definiti se e solo se $x \neq 5$. Per $x \neq 5$ (7) equivale, moltiplicando i due membri di (7) per $(x-5)^7$ a $(x-5)^7(x-5)^7 = 1$ ossia $(x-5)^{14} = 1$, che per note proprietà delle potenze, essendo 14 pari, equivale a $x-5 = \pm \sqrt[14]{1}$ ossia $x-5 = \pm 1$ e quindi $x = 4$ oppure $x = 6$. Noto che sia $x = 4$ sia $x = 6$ soddisfano la condizione richiesta $x \neq 5$ e quindi in definitiva le soluzioni di (7) sono $x = 4$ e $x = 6$.

5) Fare il grafico della funzione $|12 - 5x| - 2$.

Soluzione. Per chiarezza poniamo $\alpha(x) = 12 - 5x$, $\beta(x) = |12 - 5x|$, $\gamma(x) = |12 - 5x| - 2$. Prima faccio il grafico della funzione α . Sarà una retta poiché ogni funzione della forma $ax + b$ ha come grafico una retta. Inoltre nel nostro caso $a = -5$ e $b = 12$. Quindi la retta passerà per il punto di coordinate $(0, 12)$ (o in altri termini interseca l'asse delle ordinate in un punto di ordinata 12). Inoltre ha coefficiente angolare -5 poiché a rappresenta sempre il coefficiente angolare della retta. Quindi la retta è quella indicata in Figura 1. Poi facciamo il grafico della funzione β che sarà ottenuto da quello di α lasciando come è la parte che sta sopra l'asse delle ascisse e rimpiazzando la parte che sta sotto l'asse delle ascisse con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse (vedi Figura 2). Infine il grafico di γ si ottiene spostando di 2 verso il basso il grafico di β (vedi Figura 3).

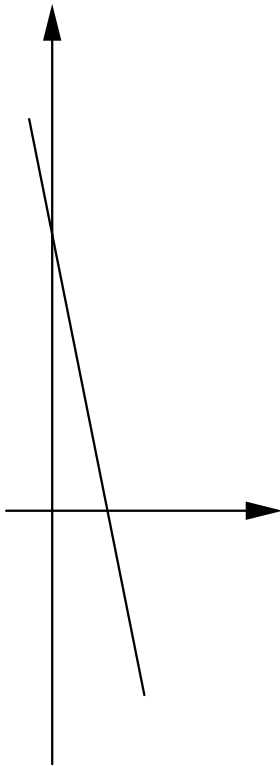


Figura 1

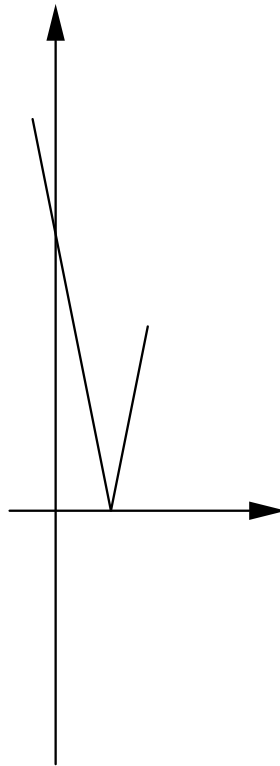


Figura 2

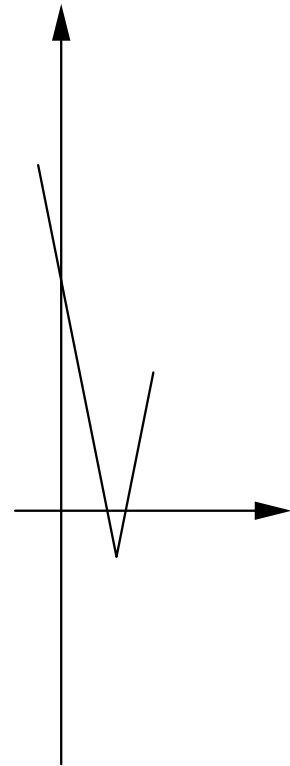


Figura 3

Commenti sugli esercizi.

Esercizio 1. Qui ho numerato le formule ((1), (2), ecc.) solo per spiegare le varianti; non è necessario farlo effettivamente in uno scritto.

Questo è un metodo di soluzione, non l'unico metodo di soluzione. Non ci preoccupiamo qui di altri possibili metodi ma piuttosto di quali varianti del modo esposto sopra siano sufficientemente giustificate. Ovviamente un altro metodo di soluzione corretto sarà altrettanto accettato come valido in uno scritto. Si può mettere " $\Longleftrightarrow$ " al posto di "equivale". Si potrebbe anche più semplicemente dire "l'equazione (1) si trasforma via via in

$$\begin{aligned}x &< \frac{11x - 35}{x - 1}, \\x - \frac{11x - 35}{x - 1} &< 0, \\\frac{x(x - 1) - (11x - 35)}{x - 1} &< 0, \\\frac{x^2 - 12x + 35}{x - 1} &< 0\end{aligned}$$

Al limite si può anche saltare qualche passaggio nel senso che se uno passa da (3) direttamente a (5) non sarà penalizzato, ma non basterà da (1) passare direttamente a (5) poiché appare poco probabile che uno studente sia in grado di passare direttamente da (1) a (5) e quindi deve spiegare come è arrivato. In altri termini non si può dire una frase "fatti i calcoli si trova (5)". Lo studente deve dimostrare che è in grado di fare i passaggi intermedi. La frase

"(ricordo che un polinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 positivo e con $\Delta > 0$ è positivo sugli intervalli "esterni alle radici" e negativo nell'intervallo tra le radici)"

è stata scritta per maggiore chiarezza, ma non è strettamente necessario scriverla. Ad ogni modo è sempre meglio scrivere qualche giustificazione in più poiché se ci fosse un errore causato da una svista, se non c'è giustificazione viene considerato un errore e basta, se c'è una giustificazione, può anche essere considerato quasi giusto se si vede che il ragionamento è corretto.

Esercizio 3. Per quanto uno studente bravo possa trovare ovvio che la c) è l'unica affermazione che segue dal teorema bisogna dare qualche spiegazione tipo quella che ho descritto qui. Tra l'altro molti studenti credono che anche la b) sia deducibile dal teorema.

Esercizio 5. Si poteva anche disegnare il grafico di α segnando due punti specifici per cui passa, ad esempio $(0, 12)$ e $(\frac{12}{5}, 0)$, e poi disegnando la retta che passa per tali due punti.