Cenni a soluzioni degli esercizi per il corso di analisi II per Ingegneria 2012/13, 4^o foglio.

1. L'unica piú difficile è $\gamma(t) = (t, e^t) : t \in [0,1]$. Notiamo che viene l'integrale $\int \sqrt{1+e^{2t}}\, dt$ che si risolve con la sostituzione $\sqrt{1+e^{2t}} = x$.

2. Basta impostare il fatto che le forme siano chiuse dato che $\mathbf{R}^2$ è sempicemente connesso.

3*. Questo è un po' lungo e difficile. Notiamo che non potremmo cercare di dimostrare che ω è chiusa dato che essendo a coefficienti solo continui, non si può nemmeno parlare di chiusura. Ricordo che l'implicazione forma chiusa $\Rightarrow$ forma esatta vale (sui semplicemente connessi) per per le forme a coefficienti *di classe* C^1. Chiamiamo U una primitiva di ω in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che esiste dato che abbiamo supposto che la forma sia esatta lí. Come primo passo facciamo vedere che U is estende con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$, ossia che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} U(x,y) \in \mathbf{R}^2 \tag{1}$$

e per provare (1) proveremo

$$\forall\, (x_n, y_n) \neq (0,0) : (x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0) \text{ abbiamo } \exists \lim_{n\to+\infty} U(x_n, y_n) \in \mathbf{R}^2 \tag{2}$$

e che inoltre il limite in (2) non dipende dalla successione (x_n, y_n). In tal modo (1) vale per il teorema ponte. Per provare (1), proveremo che la successione $U(x_n, y_n)$ è di Cauchy. Notiamo due fatti:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu : (x_n, y_n) \in B_\varepsilon(0,0) \setminus \{(0,0)\}\ \forall\, n \geq \nu, \tag{3}$$

$$\text{Se } P, P' \in B_\varepsilon(0,0) \setminus \{(0,0)\}, \exists \gamma \text{ curva } C^1_* \text{ tra } P \text{ e } P' \text{ in } B_\varepsilon(0,0) \setminus \{(0,0)\} : L(\gamma) < 3\varepsilon \tag{4}$$

ove con C^1_* indico C^1 a tratti e tra P e P' vuol dire che ha P come punto iniziale e P' come punto finale (ossia $\gamma : [a,b] \to B_\varepsilon(0,0) \setminus \{(0,0)\}$, $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = P'$). Qui ovviamente $B_\varepsilon(0,0)$ denota la palla (aperta) di centro $(0,0)$ e raggio ε. Notiamo che (3) segue dalla definizione di (x_n, y_n) in (2), mentre per (4) notiamo che potremmo prendere come γ una parametrizzazione del segmento tra P e P' che, ha ovviamente lunghezza minore di 2ε; c'è però il rischio che questo segmento (che giace sicuramente in $B_\varepsilon(0,0)$ dato che $B_\varepsilon(0,0)$, come ogni palla è un insieme convesso) potrebbe non stare in $B_\varepsilon(0,0)\setminus\{(0,0)\}$ dato che potrebbe passare per $(0,0)$; basta però modificare leggermente tale curva, facendo in modo di cambiarla un pochino vicino a $(0,0)$ per evitare appunto $(0,0)$, e, cambiandola di poco, posso fare in modo che la sua lunghezza sia minore di 3ε. Ora, dato $\varepsilon > 0$, e noi supporremo nel seguito $\varepsilon < 1$, usando il ν dato da (3), abbiamo che se $n, m \geq \nu$, allora $(x_n, y_n), (x_m, y_m) \in B_\varepsilon(0,0)\setminus\{(0,0)\}$, e usando (4) troviamo una curva $\gamma : [a,b] \to B_\varepsilon(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ C^1 a tratti, congiungente (x_m, y_m) a (x_n, y_n) con lunghezza minore di 3ε. Allora, essendo U una primitiva di ω in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si ha

$$\left|U(x_n,y_n)-U(x_m,y_m)\right| = \Big|\int_\gamma \omega\Big|$$

$$= \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\Big| \le \int_a^b \left|f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\right|dt$$

$$\le \int_a^b ||f(\gamma(t))||\,||\gamma'(t)||\,dt \le \max_{\overline{B_1(0)}} ||f|| \int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt$$

$$= \max_{\overline{B_1(0)}} ||f|| L(\gamma) < \Big(3\max_{\overline{B_1(0)}} ||f||\Big)\varepsilon$$

dove ho usato la disuguaglianza di Schwartz, e il fatto che, essendo $\varepsilon < 1$, $\gamma_(t) \in B_\varepsilon(0,0) \subseteq B_1(0) \subseteq \overline{B_1(0)}$; notiamo anche che il massimo usato esiste dato che la funzione $||f||$ è continua e $\overline{B_1(0)}$ è compatto. In conclusione dalla catena di disuguaglianze e dall'arbitrarietà di ε, la successione $U(x_n,y_n)$ è di Cauchy e (2) è provata. Per provare che il limite di $U(x_n,y_n)$ non dipende dalla successione (x_n,y_n), consideriamo due successioni (x_n,y_n) e (x'_n,y'_n) come in (2), e facciamo la successione che le "alterna" ossia $z_n = (x_1, x'_1, x_2.x'_2, x_3, x'_3, ...)$. Questa successione chiaramente soddisfa ancora le ipotesi di (2), e quindi, per quanto appena provato, esiste il limite di $U(z_n)$, che però, chiaramente deve anche essere il limite sia di $U(x_n,y_n)$ sia di $U(x'_n,y'_n)$, dato che sono entrambe sottosuccessioni di $U(z_n)$, e quindi $U(x_n,y_n)$ e $U(x'_n,y'_n)$ tendono allo stesso limite, come dovevamo provare. Abbiamo finalmente concluso il primo passo, provando (1). Allora definiamo $U(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} U(x,y)$, e in questo modo abbiamo definito U in modo che sia continua anche in $(0,0)$. Proveremo ora che U estesa in questo modo in $(0,0)$ è un potenziale di ω su tutto $\mathbf{R}^2$ e cosí U è esatta su $\mathbf{R}^2$. Richiamo il seguente fatto:

se α è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, derivabile in tutti i punti di $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, e tale che $\alpha'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} l \in \mathbf{R}$, allora esiste $\alpha'(0) = 0$ (A).

Per dimostrare (A), basta osservare che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h} = \lim_{x\to 0}\alpha'(x) = l$$

dove nella prima uguaglianza ho usato la regola di L'Hopital, che posso usare avendo una forma $\frac{0}{0}$ e il numeratore tende a 0 per l'ipotesi che α è continua. Questo è un risultato di Analisi I, che in realtà si può enunciare in casi piú generali, ma ci limitiamo a quanto ci serve ora.

Usiamo ora l'enunciato precedente (A) con $\alpha(x) = U(x,0)$. Noi sappiamo che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) \tag{5}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$ dato che per ipotesi U è primitiva di ω su $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e proviamo che (5) vale anche per $(x,y) = (0,0)$. Si ha che α è continua dato che lo è U. Inoltre

$$\alpha'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = f_1(x,0) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f_1(0,0)$$

e quindi per (A) esiste $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \alpha'(0) = f_1(0,0)$ e (5) vale anche per $(x,y) = (0,0)$. In modo analogo si prova che $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$ per $(x,y) = (0,0)$ e quindi per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, quindi è definitivamente provato che U è una primitiva di ω in $\mathbf{R}^2$.

4. Ovviamente si potrebbe calcolare facendo il calcolo su ogni segmento dell'ottagono, ma dato che sarebbe un pochino lungo cerchiamo un metodo con meno calcoli. Dato che la forma è chiusa e quindi su $\mathbf{R}^2$, semplicemente connesso, anche esatta, basta calcolare l'integrale della forma su una qualunque curva che congiunge i due punti, per esempio sul segmento che li congiunge. In alternativa, si trova una primitiva e si vede che $U(x,y) = xy$ è una primitiva, e poi l'integrale sarà, per noti risultati $U(Q) - U(P)$.

5. Questa volta la forma è chiusa, ma definita su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non semplicemente connesso, e quindi non possiamo dire che è esatta, e difatti non lo è. Però lo è su $B := \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$, insieme semplicemente connesso, quindi basta fare l'integrale della forma su una curva che congiunge P e Q in B, ad esempio l'arco di circonferenza che congiunge P e Q in senso orario.

6*. Descrivo solo l'idea. Siano date γ_1 e γ_2 circonferenze di centro l'origine e raggi rispettivamente r_1 e r_2 percorse in senso antiorario e proviamo che $\int\limits_{\gamma_{r_1}} \omega = \int\limits_{\gamma_{r_2}} \omega$. Usiamo le quattro semirette bisettrici del quadranti, e facciamo la curva, contorno dell'insieme compreso tra γ_1, γ_1 e tra due consecutive di tali semirette, ad esempio la bisettrice del primo e quella del secondo quadrante. Dato che per esempio tale curva giace nel semipiano $y > 0$, insieme semplicemente connesso si ha che l'integrale di ω lungo tale curva, e lungo poi tutte quelle analoghe, vale 0. Sommando gli integrali lungo le quattro curve, si cancellano i tratti lungo le semirette e rimane $\int\limits_{\gamma_{r_1}} \omega - \int\limits_{\gamma_{r_2}} \omega = 0$.

7. Si fa senza problemi. Basta stare attenti che l'insieme su cui varia x non èsemplicemente $\{x \leq 1\}$, ma devo anche imporre $x \geq -x$, quindi devo fare variare x in $[0,1]$. Si suggerisce in questi casi di fare il disegno.

8. Devo calcolare l'integrale della funzione 1 sull'insieme. Anche in questo caso devo imporre $3 - x^2 \geq 0$, e quindi x varia in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

9. Ancora abbiamo le stesse considerazioni e x varia in $[\frac{1}{2}, 2] \cap [1, +\infty] = [1,2]$.

10. Si può calcolare in piú modi, per esempio si può scrivere $A = B \setminus C$ ove

$$B = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\big\}, \quad C = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\big\},$$

e, dato che $C \subseteq B$, l'integrale su A sarà la differenza tra l'integrale su B e quello su C. Infine si calcola l'integrale su B con le coordinate polari e quello su C con le coordinate cartesiane.

11. Il problema è scrivere u in modo piú esplicito, e per fare questo bisogna vedere dove $2 - (x^2 + y^2)$ è maggiore di 0. Risulta facilmente $u(x,y) = \begin{cases} 2 - (x^2 + y^2) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Quindi basta integrare la funzione $2-(x^2+y^2)$ sulla palla chiusa (ma anche aperta va bene) di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$.

12. L'integrale viene 0 dato che la funzione integranda è dispari rispetto a x e l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

13. Dato che si vede facilmente che gli insiemi A sono disgiunti tra di loro, e contenuti in $[0,1]\times[-1,2]$, per ogni k intero positivo si avrà $\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n \subseteq [0,1]\times[-1,2]$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{k}\int_{A_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n} f(x,y)\,dx\,dy \leq \int_{[0,1]\times[-1,2]} f(x,y)\,dx\,dy := M < +\infty$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che $f \geq 0$, e nella seconda che chiaramente f è integrabile su $[0,1]\times[-1,2]$. Risulta quindi che la serie data è a termini non negativi e ha somme parziali limitate superiormente da M. Per risultati noti tale serie converge. Notiamo che sarebbe problematico calcolare esplicitamente gli integrali su A_n.