

**Soluzioni (o cenno a soluzioni) di Esercizi dei fogli 1 e 2
di analisi II per Ingegneria 2012/13.**

In queste note scriverò la soluzione o almeno l'impostazione di molti degli esercizi dei primi due fogli di esercizi di Analisi II. Inizio con qualche premessa relativa ai primi esercizi. Comincio col ricordare alcuni enunciati visti a lezione (ma a volte un pochino velocemente) sugli insiemi aperti e chiusi. Tali enunciati serviranno a provare in modo rigoroso che certi insiemi sono aperti o chiusi. Anche se generalmente si "vede" geometricamente che un insieme è aperto o chiuso, è comunque utile sapere una spiegazione rigorosa di questo fatto. Ricordo che

P1) se X è uno spazio metrico e f è una funzione continua da X in $\mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, e A, A' sono insiemi definiti da

$$A := \{x \in X : f(x) > a\}, \quad A' := \{x \in X : f(x) < a\}$$

allora A e A' sono sottoinsiemi aperti di X . Ad esempio per vedere che A è aperto, basta osservare che se $\bar{x} \in A$, allora essendo f continua e $f(\bar{x}) > a$, allora esiste $r > 0$ tale che, se $x \in B_r(\bar{x})$ allora $f(x) > a$. (Qui e analogamente nel seguito $B_r(\bar{x})$ indica la palla di centro $\bar{x}$ e raggio r .) Questo segue subito dalla definizione di continuità, per esempio usandola con $\varepsilon = f(\bar{x}) - a > 0$. Quindi $B_r(\bar{x}) \subseteq A$ dalla definizione di A , e dato che per ogni $\bar{x} \in A$ ho trovato una palla centrata in $\bar{x}$ contenuta in A , allora A è aperto. Si vede anche che invece

P2) se X è uno spazio metrico e f è una funzione continua da X in $\mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, gli insiemi B e B' definiti da

$$B := \{x \in X : f(x) \geq a\}, \quad B' := \{x \in X : f(x) \leq a\}$$

sono chiusi. Infatti si vede subito che B è il complementare di A' , mentre B' è il complementare di A .

Fissiamo ora uno spazio metrico X e gli insiemi A, B, A_i etc. saranno sempre sottoinsiemi di X . Ricordo inoltre che

P3) se $A_i, i \in I$ sono insiemi aperti, allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è un insieme aperto, detto in altri termini l'unione di una famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto.

Infatti se $\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} A_i$ allora esiste $i \in I$ tale che $\bar{x} \in A_i$ per definizione di unione, quindi, dato che ogni A_i è aperto, esiste $r > 0$ tale che $B_r(\bar{x}) \subseteq A_i$ e quindi, a maggior ragione $B_r(\bar{x}) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, e $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

Ricordo anche che

P4) se $A_1, \dots, A_n$ sono insiemi aperti anche $\bigcap_{i=1}^n A_i$ è un insieme aperto. Infatti, se $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, allora per ogni $i = 1, \dots, n$ $\bar{x} \in A_i$ e quindi, essendo A_i aperto esiste $r_i > 0$ tale che $B_{r_i}(\bar{x}) \subseteq A_i$; posto $r := \min_{i=1, \dots, n} r_i$, si ha allora per ogni $i = 1, \dots, n$ $B_r(\bar{x}) \subseteq B_{r_i}(\bar{x}) \subseteq A_i$,

e quindi $B_r(\bar{x}) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$, e $\bigcap_{i=1}^n A_i$ è un insieme aperto. Notare che questo ci dice che l'intersezione di un numero *finito* di insiemi aperti è aperto.

Segue dall'enunciato precedente (P3)) che

P5) Se $B_i, i \in I$ sono insiemi chiusi, allora $\bigcap_{i \in I} B_i$ è un insieme chiuso, detto in altri termini l'intersezione di una famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso. Infatti, se A_i è il complementare di B_i , allora A_i è aperto, quindi per P3), $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto, ma segue dalle regole di De Morgan che $\bigcap_{i \in I} B_i$ è il complementare di $\bigcup_{i \in I} A_i$ e quindi è chiuso.

Si avrà anche che un insieme della forma

$$\tilde{A} = \{x \in X : f_i(x) > a_i \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad g_j(x) < b_j \quad \forall j = 1, \dots, m\}$$

ove f_i e g_j sono funzioni continue da X in $\mathbf{R}$ e a_i e b_j sono numeri reali, per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, è un insieme aperto dato che si ha

$$\tilde{A} = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m A'_j \right) \quad A_i := \{x \in X : f_i(x) > a_i\}, \quad A'_j := \{x \in X : g_j(x) < b_j\}$$

in quanto gli A_i e gli A'_j sono aperti per P1) e allora $\tilde{A}$ è aperto per P4). Analogamente, se f_i, g_j, a_i e b_j sono come sopra, l'insieme

$$\tilde{B} = \{x \in X : f_i(x) \geq a_i \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad g_j(x) \leq b_j \quad \forall j = 1, \dots, m\}$$

è chiuso, grazie a P2) e P5). Passiamo ora a vedere gli esercizi e iniziamo con quelli del foglio 1.

Esercizio 1. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$. a) Disegnare A . b) Dire se A è aperto, chiuso, compatto. c) Determinare, se esistono, massimo e minimo su A della funzione $f(x, y) = x^2 - 6xy + ay$ quando $a = 3$ e quando $a = 12$.

Qui e in casi del genere non disegnerò l'insieme. Viene comunque un triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$ incluso il bordo. L'insieme è chiuso per le considerazioni appena fatte (è della forma $\tilde{B}$ vista sopra), non è aperto perché in $\mathbf{R}^n$ solo tutto lo spazio e l'insieme vuoto sono sia aperti sia chiusi, quindi essendo chiuso non è aperto; ma si può anche dire che non soddisfa la definizione di aperto: preso il punto $(0, 0) \in A$ non esiste alcuna palla centrata in $(0, 0)$ tutta contenuta in A . L'insieme è anche limitato (si vede dal disegno, ma per provarlo in modo più preciso basta notare che se $(x, y) \in A$ allora $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$). Essendo chiuso e limitato, A è compatto. Per rispondere alla domanda c) prima di tutto notiamo che la funzione considerata è continua e quindi sull'insieme A *compatto* ha sicuramente massimo e minimo. Poi notiamo che

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \quad \text{ove}$$

$$A_1 =: \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 2\},$$

$$A_2 =: \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0, y \geq 0, x + y \leq 2\},$$

$$A_3 =: \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y = 0, x + y \leq 2\},$$

$$A_4 =: \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2\}.$$

Infatti A è l'insieme dei punti ove valgono tre disuguaglianze larghe (ossia col $\leq$ o col $\geq$) e valgono le tre disuguaglianze larghe se e solo se o sono tutte e tre strette, o una delle tre è un'uguaglianza e valgono comunque le altre due (larghe). Notiamo che A_1 è aperto e A_2 , A_3 e A_4 sono chiusi per le solite considerazioni precedenti (notiamo che dire per esempio $x + y = 2$ equivale a $x + y \geq 2$ e $x + y \leq 2$, quindi equivale a due disuguaglianze larghe e questo vale in genere per tutte le uguaglianze). Notiamo che nella decomposizione dell'insieme A descritta sopra A_1 rappresenta l'interno di A e $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ la frontiera di A , come si capisce dal disegno. Si potrebbe anche provare in modo "algebrico" questo fatto, ossia senza usare la figura, ma in realtà nelle seguenti considerazioni tale fatto non ha alcuna importanza. Comunque questa, in casi del genere, è una procedura generale, ossia si decompone l'insieme nel suo interno e nella frontiera, che a sua volta si decompone in pezzi. Cerchiamo ora i punti di massimo e di minimo di f prima con $a = 3$. I punti di massimo e di minimo o sono su A_1 o sono su A_2 , A_3 o A_4 . Supponiamo un punto di massimo o minimo (x, y) appartenga ad A_1 . Allora, dato che A_1 è aperto, in quel punto si deve annullare il gradiente di f .

IMPORTANTE: solo nei punti di A_1 (che sarebbero i punti interni ad A), vale la regola: se il punto è di massimo o di minimo, in quel punto si annulla il gradiente. Negli altri punti (che sarebbero i punti del bordo di A) questo non vale, ossia un punto in A_2 , A_3 o A_4 può essere di massimo o di minimo di f , anche se non annulla il gradiente di f . Questo del resto è ovvio, dato che anche per funzioni di una variabile, se in un punto INTERNO si ha massimo o minimo in quel punto la derivata si annulla (ammesso che la funzione sia derivabile in quel punto), ma in un estremo di un intervallo si può avere massimo o minimo anche senza che la derivata si annulli, ad esempio basta considerare la funzione $u(x) = x$ su $[3, 4]$: questa ha derivata 1 ovunque, e su $[3, 4]$ ha minimo in 3 e massimo in 4.

Il gradiente di f vale $(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}) = (2x - 6y, -6x + 3)$. Quindi dobbiamo impostare il sistema

$$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -6x + 3 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

dove le prime due equazioni esprimono il fatto che il gradiente è nullo e le altre tre che $(x, y) \in A_1$. Queste ultime tre *NON* vanno trascurate perché noi stiamo cercando punti

che *devono stare* in A_1 . La soluzione è il punto

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right).$$

Ora studiamo i punti di A_2 , A_3 e A_4 . Per ognuno di questi cerchiamo una parametrizzazione in modo da ricondurre il problema allo studio di una funzione di una variabile. Possiamo scrivere $A_2 = \{(0, y) : y \in [0, 2]\}$. Quindi $f(x, y)$ su A_2 è data da $f(0, y) = 3y$ con $y \in [0, 2]$. Se un punto $(x, y) \in A_2$ è di massimo o di minimo sarà anche ovviamente di massimo o minimo per f su A_2 ; quindi dobbiamo avere un punto $(0, y)$ con y massimo o minimo su $[0, 2]$ della funzione $y \mapsto 3y$, quindi $y = 0$ o $y = 2$. Abbiamo quindi due nuovi punti

$$P_2 = (0, 0), P_3 = (0, 2).$$

Facciamo un discorso analogo su A_3 , scritto come $\{(x, 0) : x \in [0, 2]\}$, e studiamo massimo e minimo della funzione $x \mapsto f(x, 0) = x^2$ e troviamo un nuovo punto

$$P_4 = (2, 0)$$

(ci sarebbe anche il punto $(0, 0)$ ma non lo segnalo dato che lo avevo già considerato prima). Infine studio f su A_4 , parametrizzandola come $A_4 = \{(x, y) : y = 2 - x, x \in [0, 2]\}$. Dobbiamo dunque studiare minimo e massimo della funzione

$$x \mapsto f(x, 2 - x) = x^2 - 6x(2 - x) + 3(2 - x) = 7x^2 - 15x + 6$$

su $[0, 2]$. Il massimo e il minimo possono essere presi solo agli estremi, o in punti ove si annulla la derivata che in questo caso è $14x - 15$, che si annulla in $\frac{15}{14}$ che è in $[0, 2]$. Quindi dobbiamo considerare il punto

$$P_5 = \left(\frac{15}{14}, 2 - \frac{15}{14}\right) = \left(\frac{15}{14}, \frac{13}{14}\right),$$

mentre gli altri due punti $(0, 2)$ e $(2, 0)$ non mi interessano in quanto già considerati. In conclusione noi abbiamo trovato 5 punti che sono *i soli* che potrebbero essere o di massimo o di minimo per f su A . *Dato che abbiamo visto che per il teorema di Weierstrass il massimo e il minimo esistono*, uno di questi sarà il massimo e un altro il minimo. Per essere massimo f deve in particolare assumere in quel punto un valore maggiore o uguale a quello assunto negli altri quattro punti e per essere minimo f deve in particolare assumere in quel punto un valore minore o uguale a quello assunto negli altri quattro punti. Quindi calcoliamo f in P_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, e il valore più alto di questi sarà il massimo e il più basso il minimo. Si ha $f(P_1) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) = \frac{1}{4}$, $f(P_2) = f(0, 0) = 0$, $f(P_3) = f(0, 2) = 6$, $f(P_4) = f(2, 0) = 4$, $f(P_5) = f(\frac{15}{14}, \frac{13}{14}) = -\frac{399}{196}$. Conclusione: $\max_A f = 6$, $\min_A f = -\frac{399}{196}$.

Nota bene: In questo caso e in casi analoghi, per quanto ovviamente non sbagliato, non è necessario calcolare l'hessiano nei punti interni che annullano il gradiente, dato che

calcolare l'hessiano può solo servirmi ad escludere che il punto sia di minimo di massimo ma non ad affermarlo, perché potrebbe solo dire che un punto è di massimo o minimo relativo. Facendo come qui sopra semplicemente non mi preoccupo di vedere se il punto è di massimo o minimo relativo, e vedrò alla fine, dopo avere fatto i confronti tra tutti i punti candidati, se sarà di massimo o minimo assoluto.

Vediamo brevemente che cosa succede nel caso $a = 12$ senza fare i calcoli espliciti. Ovviamente l'insieme è lo stesso per cui si decompone come prima in A_1, A_2, A_3, A_4 . Il gradiente qui verrà $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}) = (2x - 6y, -6x + 12)$, che si annulla in $(2, \frac{2}{3})$, ma questa volta tale punto *va escluso* non appartenendo ad A_1 (e nemmeno ad A). Quindi sarebbe sbagliato confrontare la funzione anche in questo punto perché, anche fosse, per esempio $f(2, \frac{2}{3})$ maggiore del valore di f negli altri punti "candidati", non potrebbe essere il massimo non essendo il punto in A .

Esercizio 2. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. a) Disegnare A . b) Dire se A è aperto, chiuso, compatto. c) Determinare, se esistono, massimo e minimo su A della funzione $f(x, y) = e^x - xe^y + 2y$.

Non spiego l'esercizio in dettaglio. L'insieme A è un quadrato di vertici $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$, incluso il bordo. È chiuso per motivi simili a quelli dell'esercizio 1 (è definito da disuguaglianze larghe mediante funzioni continue, più precisamente è del tipo $\tilde{B}$ descritto prima). Si vede anche che A è limitato dato che se $(x, y) \in A$ allora $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$, quindi A è compatto, e f che è continua ha minimo e massimo su A . Scriviamo $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ ove

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = -1, -1 \leq y \leq 1\},$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 1, -1 \leq y \leq 1\},$$

$$A_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = -1, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$A_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

ossia A_1 è l'interno di A , e A_2, A_3, A_4, A_5 sono le parti della frontiera di A (che sarebbero i lati del quadrato A). Cerchiamo i punti di massimo e di minimo, prima cercando i punti di A_1 ove si annulla il gradiente. Si ha

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = (e^x - e^y, -xe^y + 2)$$

quindi il gradiente di f si annulla nei punti (x, y) tali che $x = y, xe^x = 2$. Ora c'è un problema: ossia l'equazione

$$xe^x = 2 \tag{E}$$

non è del tipo di quelle che si risolve. Possiamo però notare che se ha soluzioni queste sono positive (infatti nessun $x < 0$ può soddisfare (E)). Inoltre si può anche provare che (E) ha un'unica soluzione $\bar{x} \in [0, 1]$. Basta notare che, posto $u(x) = xe^x$, si ha $u(0) = 0 < 2$, $u(1) = e > 2$, quindi per il teorema dei valori intermedi esiste $\bar{x} \in [0, 1]$ tale che $u(\bar{x}) = 2$; inoltre tale $\bar{x}$ è unico dato che u è strettamente crescente su $[0, 1]$ come è facile verificare. Comunque l'unica cosa rilevante per il seguito è che (E) non ha soluzioni negative o nulle. Il fatto di non aver trovato il preciso valore di $\bar{x}$ che risolve l'equazione potrebbe essere un problema. Però in questo caso vedremo che comunque tale punto non va preso in considerazione dato che l'hessiano non è né semidefinito negativo né semidefinito positivo. Infatti si ha

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = e^x, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -xe^y, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = -e^y$$

quindi il determinante dell'hessiano vale $-xe^{x+y} - e^{2y}$, che è sicuramente negativo per $x \geq 0$. Notiamo quindi che in questo particolare conviene calcolare l'hessiano dato che non riusciamo a individuare il punto preciso. In conclusione nessun punto in A_1 può essere di massimo o di minimo, e questi vanno cercati sui pezzi di frontiera. Comunque non svolgo i calcoli.

Esercizio 3. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ((x-1)^2 + y^2 - 1)((x+1)^2 + y^2 - 1) = 0\}$. a) Disegnare A . b) Sia $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \in A \\ 1 & \text{se } (x, y) \notin A \end{cases}$. Calcolare tutte le derivate direzionali di f in $(0, 0)$. c) Dire se f è continua in $(0, 0)$.

Non disegno A , che comunque è l'unione di due circonferenze di raggio 1 e centro rispettivamente $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, dato che uso il fatto ben noto che il prodotto di due numeri vale 0 se e solo se almeno uno dei due vale 0. Notiamo che queste due circonferenze hanno un punto in comune, precisamente $(0, 0)$. Quindi, dato che $(0, 0) \in A$ si ha da definizione $f(0, 0) = 0$. Vediamo ora le derivate direzionali in $(0, 0)$. Data una direzione $v = (v_1, v_2)$ (con $\|v\|=1$, quindi $v_1^2 + v_2^2 = 1$), la derivata di f lungo v per definizione è data dalla derivata in 0 della funzione $t \mapsto f(tv)$. Ora, calcoliamo $f(tv)$. Si ha, per definizione di f

$$f(tv) = f(tv_1, tv_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } (tv_1, tv_2) \in A \\ 1 & \text{se } (tv_1, tv_2) \notin A \end{cases}$$

e $(tv_1, tv_2) \in A$ se e solo se

$$\begin{aligned} ((tv_1 - 1)^2 + (tv_2)^2 - 1)((tv_1 + 1)^2 + (tv_2)^2 - 1) &= 0 \iff \\ (t^2v_1^2 + 1 - 2tv_1 + t^2v_2^2 - 1)(t^2v_1^2 + 1 + 2tv_1 + t^2v_2^2 - 1) &= 0 \iff \\ (t^2(v_1^2 + v_2^2) - 2tv_1)(t^2(v_1^2 + v_2^2) + 2tv_1) &= 0 \iff \text{(dato che } v_1^2 + v_2^2 = 1) \\ t^2(t - 2v_1)(t + 2v_1) &= 0 \iff t \in \{0, 2v_1, -2v_1\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$f(tv) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in \{0, 2v_1, -2v_1\} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e a prescindere dal valore di v_1 la funzione $t \mapsto f(tv)$ è discontinua in 0 dato che se $v_1 = 0$ assume valore 1 dovunque tranne in 0, e se $v_1 \neq 0$, comunque assume il valore 1 in un opportuno intorno di 0 tranne 0 stesso; mentre $f(0v) = f(0, 0) = 0$. In conclusione dato che la funzione $t \mapsto f(tv)$ non è continua in 0, non è neanche derivabile in 0 e non esiste la derivata direzionale rispetto a v . NOTA: si vede che la f non è differenziabile in $(0, 0)$, ma questo non basta a dire che non ha derivate direzionali in $(0, 0)$ dato che il teorema dice: se f è differenziabile in un punto, allora ha tutte le derivate direzionali in quel punto, ma sappiamo che non vale il viceversa. Vediamo che f non è continua in $(0, 0)$. Questo si prova facilmente dal momento che in ogni palla centrata in $(0, 0)$ ci sono punti $(x, y) \notin A$ e tali quindi che $f(x, y) = 1$, mentre se f fosse continua in $(0, 0)$, si avrebbe che per ogni $\varepsilon > 0$, in particolare per $\varepsilon = \frac{1}{2}$, esisterebbe $r > 0$ tale che se $(x, y) \in B_r(0, 0)$ allora $|f(x, y)| = |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$. Il fatto che in ogni palla $B_r(0, 0)$ contiene punti fuori di A è evidente geometricamente, e si può anche far vedere in modo "preciso", per esempio $(0, \frac{r}{2}) \in B_r(0, 0) \setminus A$. Non svolgo l'esercizio 4 che si fa in modo simile al 3, e anche in questo caso non c'è alcuna derivata direzionale in $(0, 0)$, e f non è continua in $(0, 0)$.

Esercizio 5. Sia f una funzione C^1 da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}$. Calcolare, in base ad f e alle sue derivate, le derivate, rispetto a x e a y , della funzione $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$g(x, y) = f(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5), y \sin(7x)).$$

Chiamiamo u_1, u_2, u_3 le variabili di f , ossia $f(u_1, u_2, u_3)$. In base alla regola della catena, viene

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5), y \sin(7x)) \frac{\partial(x^2 + y^4)}{\partial x} + \\ \frac{\partial f}{\partial u_2}(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5), y \sin(7x)) \frac{\partial(e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5))}{\partial x} + \\ \frac{\partial f}{\partial u_3}(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5), y \sin(7x)) \frac{\partial(y \sin(7x))}{\partial x} = \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5), y \sin(7x)) 2x + \\ \frac{\partial f}{\partial u_2}(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5), y \sin(7x)) \left(e^{\cos(xy)} (-\sin(xy)) y \ln(x^4 + 5) + e^{\cos(xy)} \frac{4x^3}{x^4 + 5} \right) + \\ \frac{\partial f}{\partial u_3}(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)} \ln(x^4 + 5), y \sin(7x)) y \cos(7x) 7 \end{aligned}$$

e $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ si trova in modo analogo.

Esercizio 6. Provare che se $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ soddisfa $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ allora f è differenziabile in $(0, 0)$.

Per vedere la differenziabilità di f prima studiamo le derivate parziali in $(0, 0)$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

ammesso che tale limite esista finito; ma, dato che $|f(0, 0)| \leq 0^2 + 0^2 = 0$ e quindi $f(0, 0) = 0$, e $|f(x, 0)| \leq x^2$, si ha

$$\left| \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \right| \leq \frac{x^2}{|x|} = |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

e quindi esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, e similmente esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Allora f è differenziabile in $(0, 0)$ se e solo se

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\|(x, y)\|} = \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0. \quad (1)$$

D'altra parte si ha

$$\left| \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 \quad (2)$$

poiché la funzione $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ è continua in quanto ottenuta da funzioni continue mediante somma, prodotto e composizione, e quindi, tende, per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ al valore in $(0, 0)$, ossia $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$. In conclusione f è differenziabile in $(0, 0)$.

NOTA. Avremmo anche potuto dedurre subito da (2) che f è differenziabile in $(0, 0)$ con differenziale 0, senza bisogno di fare le derivate parziali. Questo segue subito dalla definizione di differenziale. Ho però fatto tutto il discorso precedente, per fare vedere il procedimento tipico che si applica per vedere se una funzione è differenziabile in un punto, ossia prima si calcolano le derivate parziali in quel punto e poi si fa il limite come in (1). la funzione è differenziabile se tale limite esiste e vale 0.

Esercizio 7. Sia $f(x, y) = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{x^2 - xy + 6y^2}$. a) Provare che il dominio di f è $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (Cenno: per esempio, si può studiare il denominatore in x per y fissato). b) Dire se $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è aperto, chiuso, compatto. c) Dire se f ha massimo e minimo su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e nel caso calcolarli (più difficile).

Per a) vediamo che il denominatore si annulla solo in $(0, 0)$. Poniamo $q(x, y) = x^2 - xy + 6y^2$. Dato y fissato, poniamo $q_y(x) := q(x, y)$, che è un polinomio di secondo grado (per y fissato) nella variabile x con $\Delta = y^2 - 24y^2 < 0$, e quindi $q_y(x) > 0$, a meno che sia $y = 0$. Ricordo infatti che un polinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 positivo (1 in questo caso) è sempre positivo se e solo se il suo Δ è negativo. Rimane il caso $y = 0$:

si ha $q(x, 0) = x^2$ e quindi $q(x, 0) = 0 \iff x = 0$. In conclusione $q(x, y) = 0$ se e solo se $y = 0$ e $x = 0$. Per b) è facile vedere che $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è aperto (se $\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, allora esiste una palla di raggio $r > 0$ tale che $B_r(\bar{x}) \subseteq \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ad esempio basta prendere $r = d(\bar{x}, 0) = \|\bar{x}\|$). Si dimostra allo stesso modo che in ogni spazio metrico gli insiemi formati da un solo punto sono chiusi, e quindi i loro complementari aperti. È facile vedere che $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è chiuso, sia per il fatto già visto che in $\mathbf{R}^n$ i soli sottoinsiemi aperti e chiusi sono $\emptyset$ e $\mathbf{R}^n$, ma anche vedendo che $(0, 0)$ non è un suo punto, ma appartiene alla sua chiusura. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, non essendo chiuso non può essere compatto. Notiamo che $f(tv) = f(v)$ se $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{(0, 0)\}$, come è facile verificare: se $v = (v_1, v_2)$ si ha $tv = (tv_1, tv_2)$ e

$$f(tv) = f(tv_1, tv_2) = \frac{(tv_1)^2 - 3(tv_1)(tv_2) + (tv_2)^2}{(tv_1)^2 - (tv_1)(tv_2) + 6(tv_2)^2} =$$

$$\frac{v_1^2 - 3v_1v_2 + v_2^2}{v_1^2 - v_1v_2 + 6v_2^2} = f(v_1, v_2) = f(v).$$

Segue che per ogni $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, si ha $f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ e $\frac{x}{\|x\|} \in S_1$, ove con S_1 indico la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, in formula $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Quindi i valori assunti da f su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sono assunti anche su S_1 . Quindi il massimo e il minimo di f su S_1 , che esistono dato che S_1 è compatto, sono anche massimo e minimo di f su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per calcolarli, basta parametrizzare S_1 per esempio $(\cos(t), \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]$. Non svolgo i calcoli in dettaglio.

Esercizio 8. Dato un sottoinsieme non chiuso A di $\mathbf{R}^n$, provare che esiste una funzione continua da A in $\mathbf{R}$ senza minimo.

Dato che A non è chiuso, A non coincide con la propria chiusura, quindi esiste $\bar{x} \in \bar{A} \setminus A$ (ove, ricordo, $\bar{A}$ denota la chiusura di A). La funzione ϕ definita da $\phi(x) = d(x, \bar{x}) (= \|x - \bar{x}\|)$ è continua (come si vede in modo esplicito, ma abbiamo visto a lezione che tale funzione è continua in tutti gli spazi metrici). Inoltre

$$\phi(x) > 0 \quad \forall x \in A.$$

Infatti, se fosse $\phi(x) = 0$, si avrebbe $x = \bar{x}$, che non è possibile dato che $\bar{x} \notin A$. D'altra parte, dato che $\bar{x} \in \bar{A}$, per la definizione di chiusura, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x})$, e quindi $\phi(x) = d(x, \bar{x}) < \varepsilon$. Perciò, per ogni $\varepsilon > 0$, $\inf_{x \in A} \phi(x) < \varepsilon$, e dato che ε è arbitrario, $\inf_{x \in A} \phi(x) = 0$, così che $\inf_A \phi$ non è raggiunto, e quindi non esiste $\min_A \phi$.

Esercizio 9. Calcolare $\sum_{i=2}^{10} a_i$, ove $a_n = 2n + 1$ se n dispari, $a_n = 4$ se n pari.

$$\text{Si ha } \sum_{i=2}^{10} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$= 4 + 7 + 4 + 11 + 4 + 15 + 4 + 19 + 4 = 72.$$

Esercizio 10. Calcolare $\sum_{i=0}^{100} 4 \frac{7^n}{10^{\frac{n}{3}}}, \sum_{i=24}^{100} 4 \frac{7^n}{10^{\frac{n}{3}}}.$

NOTA: nella seconda sommatoria ho messo 7^n come nella prima invece che 7 come era il testo originale, dove avevo dimenticato n ad esponente; comunque il metodo per calcolarla non cambia.

Basta notare che $\frac{7^n}{10^{\frac{n}{3}}} = \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^n$; quindi la prima somma viene

$$4 \sum_{i=0}^{100} \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^n = 4 \frac{\left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{101} - 1}{\frac{7}{\sqrt[3]{10}} - 1}$$

usando la ben nota formula per la somma di una progressione geometrica, ossia $\sum_{k=0}^n x^k =$

$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ se n è un intero non negativo e $x \neq 1$; ovviamente la formula vale *solo partendo*

da 0; se la somma la faccio partendo da un altro indice si ottiene: $\sum_{k=h}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^{h-1} x^k.$

Per la seconda sommatoria, basta notare che in genere $\sum_{i=24}^{100} a_n = \sum_{i=0}^{100} a_n - \sum_{i=0}^{23} a_n$, e quindi per motivi analoghi a prima viene

$$4 \frac{\left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{101} - 1}{\frac{7}{\sqrt[3]{10}} - 1} - 4 \frac{\left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{24} - 1}{\frac{7}{\sqrt[3]{10}} - 1}.$$

In questo caso specifico (progressione geometrica) possiamo anche calcolare la seconda sommatoria così

$$\begin{aligned} & 4 \left(\left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{24} + \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{25} + \dots + \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{100} \right) = \\ & 4 \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{24} \left(1 + \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^1 + \dots + \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{76} \right) = \\ & 4 \left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{24} \frac{\left(\frac{7}{\sqrt[3]{10}}\right)^{77} - 1}{\frac{7}{\sqrt[3]{10}} - 1}. \end{aligned}$$

Esercizio 11. Usare l'uguaglianza $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ per trovare una formula per $\sum_{i=1}^n i^2.$

Si ha

$$\sum_{i=1}^n \left((i+1)^3 - i^3 \right) = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1) =$$

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

e d'altra parte, la somma $\sum_{i=1}^n ((i+1)^3 - i^3)$ è una somma telescopica che ha come risultato $(n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n$. Quindi abbiamo

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

da cui con semplice calcolo ricaviamo $\sum_{i=1}^n i^2$, e fatti i calcoli e semplificati, il risultato è $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. L'esercizio 12 si fa in modo analogo, ovviamente usando anche il risultato dell'esercizio 11. Non svolgo il calcolo nel dettaglio. Voglio solo segnalare che viene un risultato curioso, ossia

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2.$$

Ovviamente, proseguendo induttivamente per questa strada, si possono trovare le somme $\sum_{i=1}^n i^m$ per ogni intero positivo m . Per farlo, si esprime $(i+1)^{m+1} - i^{m+1}$ usando la formula del binomio, e poi si sommano i risultati da 1 a n , sfruttando le formule per $\sum_{i=1}^n i^r$, $r < m$.

Esercizio 1. Calcolare le derivate direzionali di g nel punto $(0,0)$ quando g è definita come f nell'esercizio 3 del foglio 1, con l'unica differenza che la si pone uguale a 1 anche nel punto $(0,0)$. Stessa cosa per l'esercizio 4 del foglio 1.

In questo caso ripetiamo il ragionamento fatto in esercizio 3, foglio 1, ma, dato che $f(0,0) = 0$, si avrà la seguente modifica della formula di quell'esercizio.

$$f(tv) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in \{2v_1, -2v_1\} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi la funzione $t \mapsto f(tv)$ vale 1 in un intervallo centrato in 0 (ossia $(-2|v_1|, 2|v_1|)$ se $v_1 \neq 0$, e in tutto $\mathbf{R}$ se $v_1 = 0$). Quindi la sua derivata in 0 coincide con la derivata in 0 della funzione identicamente 1, e quindi vale 0. È ben noto, e anche evidente, infatti, che per calcolare la derivata in un punto, interessano SOLO i valori della funzione "vicino" al punto, ossia in un opportuno intervallo aperto contenente il punto. Alla fine, tutte le derivate direzionali di f esistono e valgono 0. Da notare che in questi casi conviene prima capire il problema geometricamente per potere intuire che cosa succederà. In questo caso dobbiamo studiare la funzione lungo la retta della forma $0 + tv = tv$. Si vede che per t piccolo la retta interseca A (unione di due circonferenze) solo in $(0,0)$, dove comunque la funzione vale 1, e quindi la funzione lungo la retta vale 1 per valori "vicini" a 0. Invece nell'esercizio 3 del primo foglio, valeva 1 per valori "piccoli", ma diversi da 0. Per quanto riguarda l'analogo dell'esercizio 4 del primo foglio ragionando in modo analogo, vediamo che esiste la derivata direzionale ($= 0$) solo lungo le direzioni verticali $(0,1)$ e $(0,-1)$. Non svolgo i dettagli, ma spiego l'idea geometrica. Ogni retta non verticale passante per $(0,0)$, "entra" dentro il cerchio A per valori piccoli a piacere, e si capisce quindi che la funzione $t \mapsto f(tv)$ è comunque discontinua, valendo 1 in 0, e 0 per t vicino a 0, o positivo o negativo a seconda del segno di v_1 , e quindi non derivabile in 0. Ripeto che non ho fatto una dimostrazione precisa.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \begin{cases} y + \sin(x) & \text{se } y > \sin(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. a) Dire in che punti di $\mathbf{R}^2$ f è continua. b) Calcolare le derivate direzionali di f in $(0,0)$.

Poniamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > \sin(x)\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < \sin(x)\}, \quad C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = \sin(x)\}.$$

Allora A è aperto (infatti $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y - \sin(x) > 0\}$), e usiamo P1). Analogamente B è aperto e C è chiuso. Dato che su A la funzione f coincide con la funzione $(x,y) \mapsto y + \sin(x)$ che è continua, allora f è continua in tutti i punti di A . Infatti se due funzioni coincidono su un aperto, allora in ogni punto dell'aperto la continuità di una equivale alla continuità dell'altra; l'idea è che per studiare la continuità in un punto occorre studiare la funzione in una palla sufficientemente piccola centrata nel punto, che quindi possiamo prendere contenuta nell'aperto. Notare A è l'insieme dei punti "sopra" la sinusoidale di equazione $y = \sin(x)$. In modo analogo f è continua nei punti di B dato che B è aperto

e su B f coincide con la funzione 0. Rimane da studiare f nei punti di C . Si dimostra facilmente (e si capisce geometricamente) che ogni punto di C è punto di accumulazione sia per A sia per $B \cup C$. Geometricamente si "vede" che se $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$, allora ogni palla centrata in $(\bar{x}, \bar{y})$ contiene punti sia di A sia di $B \cup C$ diversi dal punto stesso $(\bar{x}, \bar{y})$. Abbiamo visto a lezione che in questi casi,

$$f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} l \iff f|_A(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} l \text{ e } f|_{B \cup C}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} l. \quad (3)$$

Ora,

$$f|_A(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} \bar{y} + \sin(\bar{x}),$$

dato che $f|_A(x, y) = y + \sin(x)$, e $y + \sin(x) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} \bar{y} + \sin(\bar{x})$, dato che la funzione $(x, y) \mapsto y + \sin(x)$ è continua, ma se una funzione tende a un limite, anche la sua restrizione tende allo stesso limite. Per motivi analoghi,

$$f|_{B \cup C}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} 0.$$

Tenendo conto che per definizione $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ essendo $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$, quindi per (3) si ha

$$f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})} f(\bar{x}, \bar{y}) \iff \bar{y} + \sin(\bar{x}) = 0.$$

In conclusione f è continua su un punto di C della forma $(\bar{x}, \bar{y})$ (e che quindi soddisfa, dalla definizione di C , $\bar{y} = \sin(\bar{x})$) se e solo se $\bar{y} + \sin(\bar{x}) = 0$, e quindi se e solo se $\bar{y} = 0$, $\sin(\bar{x}) = 0$. In altri termini è continua sui punti di A , su quelli di B e su quelli della forma $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$. Notiamo che il procedimento usato qui è l'analogo dello studio della continuità di una funzione $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ che è definita coincidente con una data funzione continua per $x > a$ e con un'altra funzione continua per $x \leq a$. Allora g è sicuramente continua sia nei punti $x > a$, sia nei punti $x < a$, mentre per $x = a$ bisogna fare i limiti destro e sinistro in a . Per le derivate direzionali mi limito a studiare quelle lungo le direzioni v con

$$v = (v_1, v_2), v_1 > 0 \text{ o } v = (1, 0).$$

Infatti si vede facilmente dalla definizione che

$$\frac{\partial f}{\partial(-v)}(z) = -\frac{\partial f}{\partial v}(z) \quad \forall z \in \mathbf{R}^2$$

dato che, usando il cambio di variabile $\tau = -t$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial(-v)}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z - tv) - f(z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{f(z - tv) - f(z)}{-t}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} - \frac{f(z + \tau v) - f(z)}{\tau} = - \frac{\partial f}{\partial v}(z)$$

(e si nota che questo vale per ogni funzione f non solo per questa). Quindi ogni derivata direzionale lungo v con $v_1 < 0$ si riconduce a quella lungo $-v$ che soddisfa $(-v)_1 > 0$, mentre se $v_1 = 0$, allora $v_2 = \pm 1$ dato che $\|v\| = 1$, e quella lungo $(-1, 0)$ si riconduce a quella lungo $(1, 0)$. Nel caso specifico da definizione, dato che $f(0, 0) = 0$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t} \quad (4)$$

e dobbiamo vedere che cosa vale $f(tv)$. Da definizione si ha

$$f(tv) = f(tv_1, tv_2) = \begin{cases} tv_2 + \sin(tv_1) & \text{se } tv_2 > \sin(tv_1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \quad (5)$$

Dobbiamo quindi capire quando $tv_2 > \sin(tv_1)$. Per $t > 0$ si ha

$$tv_2 > \sin(tv_1) \iff v_2 > \frac{\sin(tv_1)}{t} \quad (6)$$

e notando che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(tv_1)}{t} = v_1 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(tv_1)}{tv_1} = v_1 \quad (7)$$

(facendo il cambio di variabile $tv_1 = \tau$, il cambio di variabile non funziona se $v_1 = 0$, ma in tal caso il limite in (7) è ovvio), da (6) segue che $tv_2 > \sin(tv_1)$ vale in un opportuno intorno destro di 0, ossia per $t \in (0, \delta)$ per qualche $\delta > 0$ se $v_2 > v_1$, ma anche se $v_2 = v_1$, dato che si sa che $\sin(x) < x$ per ogni $x > 0$, e quindi $\sin(tv_1) < tv_1$ per $t > 0$. Invece sempre da (7) segue che $tv_2 > \sin(tv_1)$ non vale in un opportuno intorno destro di 0, ossia per $t \in (0, \delta)$ per qualche $\delta > 0$ se $v_2 < v_1$. In conclusione, da (5), (6) e (7), si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tv)}{t} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tv_2 + \sin(tv_1)}{t} = v_1 + v_2 & \text{se } v_2 \geq v_1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{0}{t} = 0 & \text{se } v_2 < v_1 \end{cases}.$$

Se $t < 0$, (6) viene rimpiazzata da

$$tv_2 > \sin(tv_1) \iff v_2 < \frac{\sin(tv_1)}{t} \quad (8)$$

dato che dividere per un numero negativo cambia il verso della disuguaglianza. Ragionando in modo simile a prima si "inverte tutto" ossia

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(tv)}{t} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{tv_2 + \sin(tv_1)}{t} = v_1 + v_2 & \text{se } v_2 < v_1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{0}{t} = 0 & \text{se } v_2 \geq v_1 \end{cases}.$$

In ogni caso, esiste la derivata direzionale lungo v se e solo se $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tv)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(tv)}{t}$ se e solo se $v_1 + v_2 = 0$, ossia c'è la derivata direzionale solo nella direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e poi nella direzione opposta $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. In tali casi la derivata direzionale vale 0. Notiamo che c'è un'interpretazione geometrica di questa procedura, ossia, dato che la retta di equazione $y = x$ è tangente alla sinusoide di equazione $y = \sin(x)$ nel punto $(0, 0)$, si "vede" che se $v_2 > v_1 \geq 0$, allora la pendenza del vettore v è maggiore di 1, e quindi la retta sta sopra la sinusoide per $x > 0$ e sotto per $x < 0$, mentre se $v_2 < v_1$ succede il contrario.

3. Trovare il massimo e il minimo (se esistono) della funzione f definita da $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ nell'insieme A definito da $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

L'insieme A è compatto in quanto chiuso e limitato per motivi come al solito, e quindi la funzione f , essendo continua, ha massimo e minimo su A . Allora scriviamo A come

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

$$A_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\},$$

$$A_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

$$A_3 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}.$$

Su A_1 , che è un insieme aperto, gli eventuali punti di massimo o di minimo annullano il gradiente, e quindi soddisfano $2x + y = 0$, $2y + x = 0$, e l'unica soluzione di questo sistema è data da $x = 0, y = 0$. Dato che il punto $(0, 0)$ non appartiene ad A_1 , non ci sono punti di massimo o minimo su A_1 . Studiamo poi f su A_2 , parametrizzando A_2 come $A_2 = \{(\cos(t), \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$. Abbiamo

$$f(\cos(t), \sin(t)) = 1 + \cos(t) \sin(t)$$

e la funzione $t \mapsto 1 + \cos(t) \sin(t)$, fatti i calcoli, assume il valore massimo in $[0, 2\pi]$ nei punti $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, e tale valore massimo è $\frac{3}{2}$, mentre assume il valore minimo in $[0, 2\pi]$ nei punti $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, e tale valore minimo è $\frac{1}{2}$. Studiamo infine f su A_3 , parametrizzando A_3 come $A_3 = \{(\sqrt{2} \cos(t), \sqrt{2} \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$. Spiego tale parametrizzazione. È noto che in genere un punto (x, y) di $\mathbf{R}^2$ si può scrivere come $(x, y) = (\rho \cos(t), \rho \sin(t))$, ove $\rho = \|(x, y)\|$ (coordinate polari). Ora A_3 è l'insieme dei punti (x, y) aventi norma $\sqrt{2}$. Del resto, basta notare che se $(x, y) \in A_3$, allora $\frac{1}{\sqrt{2}}(x, y) \in A_2$. Ora abbiamo

$$f(\sqrt{2} \cos(t), \sqrt{2} \sin(t)) = 2(1 + \cos(t) \sin(t))$$

e la funzione $t \mapsto 2(1 + \cos(t) \sin(t))$ assume il valore massimo in $[0, 2\pi]$ nei punti $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, e tale valore massimo è 3, mentre assume il valore minimo in $[0, 2\pi]$ nei punti $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, e tale valore minimo è 1. In conclusione $\max_A f = \max \{3, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\} = 3$, $\min_A f = \min \{3, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente nei seguenti casi:

$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$; basta vedere che $a_n = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ e, dato che $\frac{2}{3} \leq 1$ la serie diverge.

$a_n = \frac{n^5}{2-n^5}$; basta vedere che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$, quindi la serie non può convergere, perché non è vero che il limite del termine generale è 0.

$a_n = \frac{1}{(n!)^n}$; la serie converge dato che $(n!)^n \geq n!$, quindi $\frac{1}{(n!)^n} \leq \frac{1}{n!}$ e usando il criterio del rapporto si vede subito che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge (infatti $\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$).

Quindi per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Notiamo che se si capisce il concetto si intuisce subito che la serie data converge; infatti l'idea è che una serie a termini ≥ 0 converge se il termine generale tende a 0 in modo "abbastanza veloce". Anche se ovviamente il termine "abbastanza veloce" è vago si capisce subito che $\frac{1}{(n!)^n}$ tende a 0 molto velocemente, in quanto è più piccola di oggetti (tipo $\frac{1}{n!}$), la cui serie converge; perciò il confronto dato risulta naturale, ossia la soluzione precisa è suggerita dall'idea intuitiva. Ovviamente molti altri confronti sarebbero possibili, ad esempio $a_n \leq \frac{1}{2^n}$ se $n \geq 2$.

$a_n = \frac{6^n}{3^n}$. Si ha $a_n = 2^n$, serie geometrica divergente.

$a_n = \frac{6^n}{3^n + 4^n}$. L'idea è che a denominatore il termine 3^n è trascurabile rispetto a 4^n , e quindi alla serie si "dovrebbe comportare come" $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{4^n}$, ma $\frac{6^n}{4^n} = (\frac{3}{2})^n$, che viene una serie geometrica divergente dato che $\frac{3}{2} > 1$. Per rendere precisa questa idea procediamo così.

$$a_n = \frac{6^n}{3^n + 4^n} = \frac{6^n}{4^n(1 + (\frac{3}{4})^n)} = (\frac{3}{2})^n \frac{1}{1 + (\frac{3}{4})^n} \quad (9)$$

ossia metto in evidenza 4^n proprio perché prevale su 3^n . Alla fine si ha

$$\frac{a_n}{(\frac{3}{2})^n} = \frac{1}{1 + (\frac{3}{4})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, le serie $\sum_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n \rightarrow +\infty} (\frac{3}{2})^n$ che diverge. In questo caso specifico non ci sarebbe nemmeno bisogno di applicare il criterio del confronto asintotico, ma basterebbe vedere da (9) che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, e quindi la serie non può convergere dato che a_n non tende a 0. Ho usato il criterio del confronto asintotico per illustrare il caso generale, ossia come procedere se a_n tende a 0.

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$. Basta notare che $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, e la serie converge dato che $\frac{3}{2} > 1$.

$a_n = \frac{n^4}{3^n}$. Col criterio del rapporto viene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4 3^n}{3^{n+1} n^4} = \frac{(n(1 + \frac{1}{n}))^4 3^n}{3^n \cdot 3 n^4} = \frac{n^4(1 + \frac{1}{n})^4}{3n^4} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^4}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} < 1$$

e la serie converge. Notiamo che non è preciso, facendo il limite dire cose del tipo "in $(n+1)^4$ trascuro 1"; in questo caso funziona, ma a volte può condurre ad errori. Bisogna invece mettere in evidenza n , usando solo passaggi algebrici e le regole sui limiti (limite della somma è la somma dei limiti, limite del prodotto è il prodotto dei limiti ecc.) Potremmo pensare ma in $(1 + \frac{1}{n})^4$ non abbiamo forse violato il principio precedente trascurando 1, più piccolo di n ? La risposta è NO. Possiamo vedere il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^4$ in due modi: o vediamo $(1 + \frac{1}{n})^4$ come prodotto di quattro fattori $1 + \frac{1}{n}$ che tendono tutti a 1, e quindi, dato che il limite del prodotto è il prodotto dei limiti, il limite viene $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; oppure dato che la funzione ϕ definita da $\phi(x) = x^4$ è continua (in realtà serve solo che sia continua in 1), per il teorema ponte dato che $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, si ha $(1 + \frac{1}{n})^4 = \phi(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(1) = 1^4 = 1$. Quest'ultimo metodo è particolarmente utile perché si può anche usare quando l'esponente non è intero, e quindi non viene un prodotto di un certo numero di volte $1 + \frac{1}{n}$. Infine noto che per dire che $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ NON metto 0 al posto di $\frac{1}{n}$, ma faccio la somma del limite di 1 che vale 1 e del limite di $\frac{1}{n}$ che vale 0.

$a_n = \frac{2^n}{n^{38}}$; la serie non può convergere dato che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e quindi a_n non è infinitesima. Notiamo che in questo caso, e, in generale, quando abbiamo serie a termini non negativi, per un noto risultato, se non convergono divergono.

$a_n = \frac{\sqrt{n} \sqrt[5]{n} \sqrt{3n+7}}{n^2 + n^{\sqrt{2}} \sqrt{n}}$. Si ha

$$a_n = \frac{n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{5}} (3n+7)^{\frac{1}{2}}}{n^2 (1 + n^{\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 2})} = \frac{n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{5}} (n(3 + \frac{7}{n}))^{\frac{1}{2}}}{n^2 (1 + n^{\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 2})} = \frac{n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{5}} n^{\frac{1}{2}} (3 + \frac{7}{n})^{\frac{1}{2}}}{n^2 (1 + n^{\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 2})} =$$

$$\frac{n^{\frac{6}{5}}}{n^2} \frac{(3 + \frac{7}{n})^{\frac{1}{2}}}{(1 + n^{\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 2})} = \frac{1}{n^{\frac{4}{5}}} \frac{(3 + \frac{7}{n})^{\frac{1}{2}}}{(1 + n^{\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 2})}$$

quindi

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}} = \frac{(3 + \frac{7}{n})^{\frac{1}{2}}}{(1 + n^{\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 2})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3}$$

e dato che $0 < \sqrt{3} < +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}$ che diverge dato che $\frac{4}{5} \leq 1$, quindi diverge. Nota che nella somma $n^2 + n^{\sqrt{2}} \sqrt{n}$ abbiamo messo in evidenza n^2 poiché prevale sull'altro addendo che, fatti i conti viene $n^{\sqrt{2} + \frac{1}{2}}$, e $\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1.914... < 2$.

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sin(n^5)}$. Si ha

$$a_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2 (1 + \frac{\sin(n^5)}{n^2})} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{1 + \frac{\sin(n^5)}{n^2}}$$

quindi $\frac{a_n}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{\sin(n^5)}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, e per il criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, che converge, dato che $\frac{3}{2} > 1$, e quindi anche la

serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$. Usiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{a^n n!} = \frac{a^n \cdot a(n+1)n!n^n}{(n+1)^n(n+1)a^n n!} = \frac{a n^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{e}$$

e quindi la serie data converge se $a < e$ e diverge se $a > e$. Inoltre diverge anche per $a = e$ dato che dalla formula precedente risulta in questo caso $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \geq 1$ dato che,

come noto, la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende ad e crescendo. Ora, se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, in genere non si può concludere nulla sulla convergenza della serie, ma se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ per ogni n , allora

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

$a_n = \frac{n^7 + n^5 + 3}{n^6 + n^8 + \cos(n)}$. Si ha

$$a_n = \frac{n^7 \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^7}\right)}{n^8 \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{\cos(n)}{n^8}\right)} = \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^7}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{\cos(n)}{n^8}}$$

quindi $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^7}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{\cos(n)}{n^8}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e quindi diverge.

$a_n = (-1)^n \frac{1}{1 + \ln(n)}$. Dato che chiaramente, la successione $\frac{1}{1 + \ln(n)}$ è decrescente e infinitesima, per il criterio di Leibniz, la serie converge.

$a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}$. in questo caso non posso applicare il criterio di Leibniz poiché la successione $\frac{n^2}{n^2 + 1}$ non è infinitesima. Anzi si ha $|a_n| = \frac{n^2}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, e quindi a_n non è infinitesima (se lo fosse lo sarebbe anche $|a_n|$) e la serie non può convergere.

A partire dalla prossima serie, se non ci saranno motivi particolari, spiegherò meno in dettaglio i passaggi, dato che ormai dovrebbe essere chiaro come si fanno. Ovviamente in uno scritto uno studente deve spiegare più in dettaglio.

$a_n = \frac{1}{n^{n^n}}$. L'idea è che a_n tende a 0 molto rapidamente e quindi mi aspetto che la serie converga. Per vederlo in modo più rigoroso, basta notare che $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ se $n \geq 2$, e usare il criterio del confronto.

$a_n = \frac{1}{((n!)!)}$. Simile a prima, ad esempio vediamo che $a_n \leq \frac{1}{n!}$, e dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge (come visto in precedenza), per confronto converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$a_n = \frac{1}{8 + \ln(\ln n)}$. Qui l'idea, è, al contrario che a_n che è positiva, tende a 0, ma molto lentamente, e quindi la serie diverge. Per formalizzare questo basta notare che, con semplice procedimento si ha $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, e, dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Come viene in mente di confrontare proprio con $\frac{1}{n}$? Proprio perché siamo abituati a pensare che il $\ln(x)$ è un infinito lento proprio perché più piccolo di x . Per vedere poi che $\frac{n}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, notiamo che dato che $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, anche $\frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, facendo il cambio di variabile $\ln(x) = y$. Alla fine

$$\frac{x}{\ln(\ln(x))} = \frac{x}{\ln(x)} \frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

e quindi anche $\frac{n}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

$a_n = n \sin(\frac{1}{n^2})$. Basta notare che

$$a_n = n \frac{1}{n^2} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}$$

e dato che $\frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, e perciò diverge.

$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Usando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{4}$$

e, dato che $\frac{1}{4} < 1$ la serie converge.

$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)! - n!}$. Si vede facilmente, usando il criterio del confronto asintotico, che la serie ha lo stesso carattere della precedente, e quindi converge.

$a_n = \left(\frac{2a+1}{3-a}\right)^n$, $a \in \mathbf{R}$. Dai risultati sulle serie geometriche, per avere la convergenza si deve avere $-1 < \frac{2a+1}{3-a} < 1$, e quindi sarà convergente per gli a che verificano entrambe

le disequazioni $\frac{2a+1}{3-a} < 1$, $-1 < \frac{2a+1}{3-a}$, e quindi basta risolvere il sistema di quelle due disequazioni.

$a_n = \frac{n^2}{n^4 - (\ln(n))^{10}}$. Col criterio del confronto asintotico si vede facilmente che la serie

ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, e quindi converge.

$a_n = \frac{2^n + n^{15}}{3^n + n^2}$. Col criterio del confronto asintotico si vede facilmente che la serie ha lo

stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, e quindi converge.

$a_n = n^a \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$, $a > 0$. L'idea consiste nel capire con che velocità tende a 0 $1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Basta ricordare il limite notevole $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ per rispondere. Col teorema ponte, sostituendo x con $\frac{1}{n^3}$ (che tende a 0), si ha $\frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^6}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Quindi

$$\frac{n^a \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n^{6-a}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6-a}}$, e quindi converge se e solo se $6 - a > 1$, ossia $a < 5$.

$a_n = \frac{3}{2^n} - 5 \frac{3^n}{4^n}$. Basta notare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ in quanto prodotto della costante 3

per la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \frac{3^n}{4^n}$ in quanto prodotto della

costante 5 per la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ sono entrambe convergenti, per concludere che la serie data, differenza di serie convergenti, è convergente.

$a_n = \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2 + 1}$. È simile alla precedente, ma questa volta abbiamo la differenza tra una serie divergente e una convergente, e quindi diverge.

$a_n = \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$. Svolgo questa serie abbastanza nel dettaglio. Si ha

$$\frac{a_n}{\frac{n(4n)!}{(n!)^4 396^{4n}}} = \frac{(4n)! \cdot n \left(\frac{1103}{n} + 26390\right)}{(n!)^4 396^{4n}} \frac{(n!)^4 396^{4n}}{n(4n)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 26390$$

e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ove $b_n := \frac{n(4n)!}{(n!)^4 396^{4n}}$. Chiariamo un attimo perché abbiamo paragonato a_n proprio con b_n ; questo si ottiene naturalmente studiando

a_n come facessimo un limite di successione, ossia nella somma $(1103 + 26390n)$ mettiamo in evidenza il termine piú grande ossia n , e otteniamo che a_n equivale a b_n moltiplicata per $\frac{1103}{n} + 26390$ che tende a un numero positivo, e quindi dividendo a_n per b_n abbiamo un limite strettamente tra 0 e $+\infty$, e quindi le serie hanno lo stesso carattere; questo spiega come cercare la b_n giusta. Se uno fa invece ad "occhio" può sbagliare, ad esempio se uno a numeratore trascura il fattore $1103 + 26390n$ sbaglia perché quando divide a_n per la successione cosí ottenuta, ottiene una successione che tende a $+\infty$; uno può anche provare, ma poi si rende conto che non torna: il principio generale sottostante è che in un *prodotto* non si può trascurare il fattore piú piccolo rispetto a quello piú grande. Tale principio comunque non va imparato come regoletta, ma capito vedendo che in casi come questo non funziona. Torniamo ora alla nostra serie, studiando $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ che come visto, ha lo stesso carattere, e per far questo usiamo il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(n+1)(4(n+1))!}{((n+1)!)^4} \frac{(n!)^4 396^{4n}}{396^{4(n+1)} n(4n)!} = \\ &= \frac{(n+1)(4n)!(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)(n!)^4 396^{4n}}{(n+1)^4 (n!)^4 396^{4n} 396^4 (4n)!} = \\ &= \frac{(1 + \frac{1}{n})(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(n+1)^4 396^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4^4}{396^4} < 1,\end{aligned}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, e quindi anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Riguardo a questa serie segnalo per curiosità che si può anche calcolarne la somma. Ad esempio, partendo da 0 si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} = \frac{8901}{2\sqrt{2}\pi}.$$

I metodi per ottenere tale somma vanno molto oltre quelli descritti in questo corso.

$$a_n = \frac{n^2 \sin(n) + n + 1}{n^4 + 6n + 1}. \text{ Si ha } |a_n| \leq \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 6n + 1}, \text{ e siccome } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 6n + 1} \text{ converge}$$

per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente e quindi converge. Notiamo che non possiamo applicare direttamente il criterio del confronto asintotico perché a_n ha termini che possono anche essere negativi, ma se anche $\sin(n)$ fosse rimpiazzato da $|\sin(n)|$, non sarebbe chiaro a numeratore quale sarebbe piú grande tra $n^2|\sin(n)|$ e n , dato che n^2 prevale su n ma è moltiplicato per $|\sin(n)|$ che può avvicinarsi a 0 in modo non facilmente prevedibile. È da notare, che facendo considerazioni analoghe, se in a_n n^2 fosse rimpiazzato da n^3 , non sarebbe facile coi criteri noti stabilire se la serie converge.

$a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 6}$. La serie converge per il criterio di Leibniz: basta provare che la successione $b_n := \frac{n}{n^2 + 6}$ è infinitesima e decrescente. Il fatto che sia infinitesima è ovvio; vediamo se è anche decrescente. Si ha

$$\begin{aligned} b_{n+1} \leq b_n &\iff \frac{n+1}{(n+1)^2 + 6} \leq \frac{n}{n^2 + 6} \iff (n+1)(n^2 + 6) \leq n((n+1)^2 + 6) \\ &\iff n^3 + n^2 + 6n + 6 \leq n^3 + 2n^2 + 7n \iff n^2 + n \geq 6 \end{aligned}$$

e, dato che $n^2 + n \geq 6$ è chiaramente vera per $n \geq 2$, otteniamo che $b_{n+1} \leq b_n$ per $n \geq 2$, ossia b_n è decrescente *definitivamente* e, dato che in una serie posso cambiare i primi termini senza alterare il risultato, questo chiaramente basta ad affermare che la serie converge.

$a_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{(x^2 - 8)^n}{n}, x \in \mathbf{R}$. Dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ è convergente e sommare una serie convergente non altera il carattere di una serie, basta studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 8)^n}{n}$. La studiamo col criterio della radice, e trattandosi di serie non necessariamente non negativa, si deve mettere il modulo, ossia facciamo

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(x^2 - 8)^n}{n} \right|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x^2 - 8|.$$

e la serie converge se $|x^2 - 8| < 1$, ossia se $7 < x^2 < 9$, ossia se $x \in (-3, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, 3)$; non converge se $|x^2 - 8| > 1$ ossia se $x \notin [-3, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, 3]$; se $x \in \{-\sqrt{7}, -3, 3, \sqrt{7}\}$ non possiamo concludere nulla in base al criterio della radice, ma possiamo vedere che la serie equivale alla serie armonica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se $x = \pm 3$, mentre equivale alla serie alterna

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, convergente per il criterio di Leibniz, se $x = \pm \sqrt{7}$.

$a_n = \left(\frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+5)} \right)^{2+\sin(n)}$. La serie diverge. Basta notare che

$$\left(\frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+5)} \right)^{2+\sin(n)} = \left(\frac{n^2 + 7n + 12}{n^2 + 7n + 10} \right)^{2+\sin(n)} > 1$$

dato che $\frac{n^2 + 7n + 12}{n^2 + 7n + 10} > 1$ e $2 + \sin(n) > 0$. Ora, in generale, se $a_n \geq 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge; questo si può provare in due modi (almeno): uno è che a_n non può tendere a 0, e l'altro è che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverge e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge per il criterio del confronto.

$$a_n = \frac{(n^2 + 4)^3 (3^n + n^2 + 1)^{16}}{n! + n}. \text{ Si ha}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)\right)^3 \left(3^n \left(1 + \frac{n^2}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right)\right)^{16}}{n! + n} = \frac{n^6 \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^3 3^{16n} \left(1 + \frac{n^2}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right)^{16}}{n! \left(1 + \frac{n}{n!}\right)} \\ &= \frac{n^6 3^{16n}}{n!} \frac{\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^3 \left(1 + \frac{n^2}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right)^{16}}{1 + \frac{n}{n!}} \end{aligned}$$

e allora si vede facilmente che per il criterio del confronto asintotico la serie data ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 3^{16n}}{n!}$, che converge, facendo i calcoli col criterio del rapporto, e quindi converge anche la serie data.

$$a_n = \frac{3^{n^2(1+\frac{1}{n})}}{3^{n^2}} \frac{1}{2^n}. \text{ Si studia facilmente cos\acute{i}.}$$

$$\frac{3^{n^2(1+\frac{1}{n})}}{3^{n^2}} \frac{1}{2^n} = \frac{3^{n^2+n}}{3^{n^2}} \frac{1}{2^n} = \frac{3^{n^2} \cdot 3^n}{3^{n^2}} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

e quindi la serie diverge (serie geometrica di ragione > 1). Questo esercizio \u00e8 significativo perch\u00e9 contiene una piccola trappola: ossia se uno dicesse *in* $n^2(1 + \frac{1}{n})$ *trascuro* $\frac{1}{n}$, otterrebbe un risultato sbagliato, dato che verrebbe $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, la cui serie converge. Questo dimostra che non si pu\u00f2 trascurare un pezzo liberamente, e anche che non si pu\u00f2 sostituire a un "pezzo di successione" il suo limite (in questo caso non si pu\u00f2 mettere al posto di $(1 + \frac{1}{n})$ il limite 1. Questo \u00e8 un procedimento abbastanza diffuso tra gli studenti, ma, come per esempio mostra questo caso, in genere non \u00e8 corretto, e in effetti non c'\u00e8 alcun teorema o regola che dice questa cosa, quindi usarla \u00e8 un procedimento arbitrario (e, come visto, sbagliato).

$$a_n = \frac{n^3 \sin(n^3)}{n^{\sqrt{17}} + 1}. \text{ Basta notare che } |a_n| \leq \frac{n^3}{n^{\sqrt{17}} + 1} \leq \frac{1}{n^{\sqrt{17}-3}}, \text{ e dato che } \sqrt{17} - 3 > 1,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{17}-3}}$ converge, e, per confronto, la serie data converge assolutamente, e quindi converge.

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 10 \\ \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} & \text{se } n > 10. \end{cases}$$

Si pu\u00f2 usare il criterio del confronto con un integrale improprio. infatti si vede che la "funzione associata alla successione" da 10 in poi, ossia $\frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$ \u00e8 decrescente e positiva. Facciamo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} dx &= \int \frac{1}{y \ln(y)} dy, \quad (y := \ln(x)) \\ &= \int \frac{1}{z} dz = \ln(|z|) + c, \quad (z = \ln(y)) \end{aligned}$$

$$= \ln \left(\ln \left(\ln (x) \right) \right) + c,$$

quindi dato che $\int_{10}^a \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} dx = \ln \left(\ln \left(\ln (a) \right) \right) - \ln \left(\ln \left(\ln (10) \right) \right) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$, l'integrale improprio diverge, e di conseguenza anche la serie data diverge. Si può anche usare il criterio di condensazione.

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}. \text{ Notiamo che il termine } a_n \text{ non è una serie, ma una somma finita, e non}$$

è neanche una somma parziale di $\frac{1}{k^2}$ dato che nella somma parziale la somma parte da un indice fissato per sempre, il primo indice da cui si fa partire la serie, mentre qui l'indice dipende da n . Basta notare che

$$\frac{1}{4n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2n} \right)^2 \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n}$$

per capire che la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che diverge. In

particolare notiamo che dalle prime disuguaglianze segue che $\frac{1}{4n} \leq a_n$ e quindi concludiamo

per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ che diverge dato che è la serie armonica moltiplicata per una costante positiva, e quindi ha lo stesso carattere della serie armonica.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{3}{n^3} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}. \text{ Basta notare che } 0 \leq a_n \leq \frac{3}{n^2} \text{ per concludere, grazie al cri-}$$

terio del confronto che la serie data converge.

Esercizio 5.

Dire se la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{13}{2^n} - \frac{5}{3^n} \right)$ è convergente e nel caso trovarne la somma. Dire se la serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, e nel caso calcolarne la somma, ove $a_n = \begin{cases} \frac{n}{3^{n+2}} & \text{se } n \leq 4 \\ \frac{3^n}{4^n} & \text{se } n > 4 \end{cases}$. Ricordo la formula, valida per ogni $h \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=h}^{+\infty} x^n = \frac{x^h}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Infatti, ragionando in modo simile all'esercizio 10 del primo foglio, possiamo scrivere

$$\sum_{n=h}^{+\infty} x^n = x^h + x^{h+1} + x^{h+2} + \dots = x^h (1 + x + x^2 + \dots) = x^h \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = x^h \frac{1}{1-x}.$$

In genere, scriviamo $\sum_{n=h}^{+\infty} a_n$ come $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{h-1} a_n$. se a_n è una successione arbitraria per cui la serie converge (o anche diverge); nel caso specifico della serie geometrica possiamo anche usare il "trucco" precedente. Dopo avere fatto queste premesse la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{13}{2^n} - \frac{5}{3^n} \right)$ converge perché differenza di serie convergenti, e la sua somma viene

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{13}{2^n} - \frac{5}{3^n} \right) = 13 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 5 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 13 \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 5 \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{13}{2} - \frac{5}{6} = \frac{34}{6}.$$

Se $a_n = \begin{cases} \frac{n}{3^{n+2}} & \text{se } n \leq 4 \\ \frac{3^n}{4^n} & \text{se } n > 4 \end{cases}$, la serie converge dato che per la convergenza basta guardare il comportamento di a_n per $n > 4$. La sua somma sarà data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^4 \frac{n}{3^{n+2}} + \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{3}{11} + \frac{4}{14} + \left(\frac{3}{4} \right)^5 \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}.$$

Si potrebbe finire il calcolo, ma mi interessava solo illustrare il procedimento.

Esercizio 6. a) Provare che, per ogni k intero positivo, si ha

$$\sum_{n=1}^k \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2}. \quad (P_k)$$

b) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Prima proviamo a) per induzione. Basta provare che (P_1) vale e che $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$ per ogni $k = 1, 2, 3, \dots$. Notiamo che (P_1) equivale a

$$\sum_{n=1}^1 \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1+1}{(1+2)^2} \iff \frac{1^2 + 1 - 1}{(1+1)^2(1+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1+1}{(1+2)^2},$$

e questo è vero dato che da semplici calcoli ambro i membri dell'uguaglianza valgono $\frac{1}{36}$.

Supponiamo ora vera (P_k) e proviamo (P_{k+1}) , ossia

$$\sum_{n=1}^{k+1} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{k+1+1}{(k+1+2)^2}. \quad (P_{k+1})$$

Otteniamo

$$\sum_{n=1}^{k+1} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \left(\sum_{n=1}^k \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} \right) + \frac{(k+1)^2 + (k+1) - 1}{(k+1+1)^2(k+1+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2} + \frac{(k+1)^2 + k}{(k+2)^2(k+3)^2},$$

ove nella seconda uguaglianza abbiamo usato (P_k) , che abbiamo supposto vera. Perciò, per provare (P_{k+1}) basta provare che

$$\frac{1}{4} - \frac{k+1+1}{(k+1+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2} + \frac{(k+1)^2 + k}{(k+2)^2(k+3)^2}$$

e questo è vero e per vederlo basta svolgere i calcoli. In definitiva abbiamo provato quanto chiesto in a). Vediamo b). Basta applicare la definizione di somma di una serie e usare a), ossia

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2} \right) = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 7*. Provare che, se a_n è una successione positiva (cioè $a_n > 0$) e decrescente, e inoltre converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n^2}$, (cioè la serie $a_1 + a_4 + a_9 + a_{16} + \dots$), allora converge

anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{4\sqrt{n}}$.

Ovviamente basta provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge, e lo faremo usando una tecnica simile a quella usata per provare il criterio di condensazione, ossia raggruppare bene i termini e studiare una sottosuccessione opportuna della successione delle somme parziali. Posto $s_n = \frac{a_1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}$, (ossia la somma parziale n -sima di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$), si ha

$$s_{n^2-1} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{1}} + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \frac{a_3}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{a_{(n-1)^2}}{\sqrt{(n-1)^2}} + \dots + \frac{a_{n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}} \right)$$

$$= \sum_{h=2}^n \left(\sum_{j=(h-1)^2}^{h^2-1} \frac{a_j}{\sqrt{j}} \right) \leq \sum_{h=2}^n \left(\sum_{j=(h-1)^2}^{h^2-1} \frac{a_{(h-1)^2}}{h-1} \right) = \sum_{h=2}^n \left((2h-1) \frac{a_{(h-1)^2}}{h-1} \right)$$

ove nella disuguaglianza abbiamo usato il fatto che dato che per ipotesi a_n è decrescente e quindi, $a_j \leq a_{(h-1)^2}$, e ovviamente $\frac{1}{\sqrt{j}} \leq \frac{1}{\sqrt{(h-1)^2}} = \frac{1}{h-1}$, se $(h-1)^2 \leq j \leq h^2-1$; nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che la sommatoria interna è una somma di $h^2-1-(h-1)^2+1=2h-1$ addendi tutti uguali a $\frac{a_{(h-1)^2}}{h-1}$. Alla fine abbiamo ottenuto che

$$s_{n^2-1} \leq s'_n \tag{10}$$

ove s'_n è la somma parziale n -sima della serie $\sum_{h=2}^{+\infty} (2h-1) \frac{a_{(h-1)^2}}{h-1}$, che col confronto asintotico vediamo che ha lo stesso carattere di $\sum_{h=2}^{+\infty} a_{(h-1)^2}$, che per l'ipotesi iniziale è una serie convergente, e quindi converge essa stessa (il fatto che sia $a_{(h-1)^2}$ e non a_{h^2} come nell'ipotesi ovviamente non cambia il carattere della serie). Dato che la serie converge le somme parziali s'_n sono limitate, diciamo $\leq k$, ove k è una costante opportuna. Da (10) ora segue che anche $s_{n^2-1} \leq k$, quindi il limite delle somme parziali della serie iniziale s_n , che esiste dato che i termini sono non negativi, ed è lo stesso del limite della sottosuccessione s_{n^2-1} , è necessariamente finito, e allora abbiamo provato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge, come volevamo.

Concludo queste spiegazioni richiamando il criterio del confronto asintotico (che sul libro non è scritto nella forma più completa).

Supponiamo a_n e b_n entrambi positivi per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$ e supponiamo $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Da questo segue che dato che $\frac{a_n}{b_n} > 0$, il suo limite l soddisfa $l \in [0, +\infty]$. Avremo

- i) Se $0 < l < +\infty$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.
- ii) Se $l = 0$, allora se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- iii) Se $l = +\infty$, allora se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.