

**Soluzioni di alcuni degli esercizi dell' esonero
di Matematica per Biotecnologie del 10/12/2004**

1) Siano $a_n = \frac{2^n}{40^n + 5}$, $b_n = \frac{3^{n^2}}{85^{7n}}$. Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente e se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente.

Soluzione. Vediamo la prima serie. Presento diversi modi di risolverla. Innanzitutto notiamo che si "vede" che nella frazione a denominatore 40^n "prevalge" su 5. Questo fa pensare che il comportamento della serie sia dello stesso tipo di quello della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{40^n}$.

Tale considerazione suggerisce la prima soluzione: Posto $c_n = \frac{2^n}{40^n}$,
Facciamo il limite

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{c_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^n}{40^n + 5}}{\frac{2^n}{40^n}} = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{40^n + 5} \frac{40^n}{2^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40^n}{40^n + 5} = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40^n}{40^n \left(1 + \frac{5}{40^n}\right)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{40^n}} = 1\end{aligned}$$

poiché $\frac{5}{40^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Allora, poiché $0 < 1 < +\infty$ (e a_n e c_n sono entrambe a termini

positivi), per il criterio del confronto asintotico, le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ hanno lo stesso

carattere. D'altra parte, essendo $\frac{2^n}{40^n} = \left(\frac{1}{20}\right)^n$, si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ è convergente in quanto

serie geometrica di ragione $\frac{1}{20}$ (ricordo che la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ è convergente se e

solo se $-1 < x < 1$), e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è pure convergente.

Seconda soluzione (in sostanza simile alla prima). Usando le stesse notazioni di prima si ha $40^n + 5 \geq 40^n > 0$ quindi $0 \leq \frac{1}{40^n + 5} \leq \frac{1}{40^n}$, e quindi, moltiplicando i membri di tale disuguaglianza per il numero positivo 2^n ,

$$0 \leq a_n \leq c_n$$

da cui, poiché come abbiamo visto prima, $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ è convergente, per il criterio del confronto

anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Terza soluzione. Usiamo il criterio del rapporto. Si ha $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{40^{n+1} + 5}$ e quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{40^{n+1} + 5}}{\frac{2^n}{40^n + 5}} =$$

$$\frac{2^{n+1}}{40^{n+1} + 5} \frac{40^n + 5}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{40^n + 5}{40^{n+1} + 5} =$$

$$2 \frac{40^n \left(1 + \frac{5}{40^n}\right)}{40^{n+1} \left(1 + \frac{5}{40^{n+1}}\right)} = \frac{2}{40} \frac{1 + \frac{5}{40^n}}{1 + \frac{5}{40^{n+1}}},$$

e poiché $\frac{5}{40^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, e $\frac{5}{40^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$. Poiché $\frac{1}{20} < 1$, per il criterio del rapporto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Studiamo la convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Usiamo il criterio del rapporto. Si ha $b_{n+1} = \frac{3^{(n+1)^2}}{85^{7(n+1)}}$, quindi

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{3^{(n+1)^2}}{85^{7(n+1)}}}{\frac{3^{n^2}}{85^{7n}}} = \frac{3^{(n+1)^2}}{85^{7(n+1)}} \frac{85^{7n}}{3^{n^2}} =$$

$$\frac{3^{n^2+2n+1}}{3^{n^2}} \frac{85^{7n}}{85^{7(n+1)}} = 3^{2n+1} \frac{85^{7n}}{85^{7n} 85^7} =$$

$$9^n \frac{3}{85^7} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

in quanto $9^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, e $\frac{3}{85^7} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{85^7}$. Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = +\infty > 1$, per il criterio del rapporto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente.

Vediamo alcuni dei principali errori: Un errore è confondere la convergenza della serie con la convergenza della successione, ossia dire cose del tipo, dato che a_n tende a un limite finito la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. Invece dire che a_n tende a un limite finito equivale a dire che la *successione* a_n è convergente, cosa **BEN DIVERSA**.

Altro errore molto diffuso è il seguente: Dato che la successione a_n tende a 0 (per $n \rightarrow +\infty$), allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. Invece, come detto più volte durante il corso vale **SOLO** il

viceversa, ossia se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente allora $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Di conseguenza, se a_n non

tende a 0 (per $n \rightarrow +\infty$), possiamo concludere che sicuramente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non è convergente, e quindi se a termini ≥ 0 , sicuramente divergente (ricordo che una serie a priori potrebbe essere convergente, divergente, o indeterminata, ma se a termini ≥ 0 , è *sempre* o convergente o divergente). Se invece $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, non possiamo concludere nulla

sulla convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$; ricordo per esempio che $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ma che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Un terzo errore diffuso e grave è quello di non sapere scrivere, nel criterio del rapporto a_{n+1} una volta noto a_n (o b_{n+1} una volta noto b_n). Ad esempio, alcuni scrivono, con b_n come sopra, cose del tipo $b_{n+1} = \frac{3^{n^2+1}}{85^{n+1}}$. Tale errore non è comprensibile, in quanto b_{n+1} *può solo volere dire che la successione b_n è calcolata in $n+1$ invece che in n* , più precisamente ad n sostituiamo $n+1$, in altre parole tutte le volte che in b_n compare n bisogna mettere al suo posto $n+1$.

Vi sono poi errori gravi di algebra, di cui accenno solo rapidamente, tipo errori nel semplificare le frazioni, o semplificazioni errate negli esponenti.

Vediamo (più rapidamente) ora un'altra versione dell'esercizio 1.

Siano $a_n = \frac{n^4}{n^{54} + 3}$, $b_n = \frac{49^{8n}}{4n^2}$. Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente e se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente.

Per studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, facciamo considerazioni simili a prima.

Vediamo che nel denominatore di a_n , 3 "è più piccolo di n^{54} e quindi noi pensiamo che possa essere trascurato". Questo suggerisce di confrontare asintoticamente tale serie con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, ove $c_n = \frac{n^4}{n^{54}}$, ossia facciamo

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{c_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^4}{n^{54}+3}}{\frac{n^4}{n^{54}}} = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{n^{54}+3} \frac{n^{54}}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{54}}{n^{54}+3} = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{54}}{n^{54}(1 + \frac{3}{n^{54}})} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{n^{54}}} = 1\end{aligned}$$

poiché $n^{54} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Come nell'altro caso, essendo $0 < 1 < +\infty$, si ha che le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ hanno lo stesso carattere. D'altra parte, poiché $c_n = \frac{n^4}{n^{54}} = \frac{1}{n^{50}}$, si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$

è una serie armonica generalizzata ossia una serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Poiché noi sappiamo dalla teoria che tale serie è convergente se e solo se $\alpha > 1$, e nel nostro caso $\alpha = 50$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ è convergente, e quindi anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Come nell'altro caso si può provare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente, usando anche il criterio del confronto in quanto, essendo $n^{54} + 3 \geq n^{54} > 0$, si ha come prima $0 \leq \frac{n^4}{n^{54}+3} \leq \frac{n^4}{n^{54}} = \frac{1}{n^{50}}$, e come abbiamo già detto è noto che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{50}}$ è convergente.

Notiamo che invece nel nostro caso, come è facile vedere, se applicassimo il criterio del rapporto otterremmo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

e quindi il criterio del rapporto non ci da informazioni sul fatto se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente o no.

Per studiare invece la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, usiamo anche in questo caso il criterio del rapporto e con calcoli del tutto analoghi al caso precedente otteniamo che

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

e quindi, essendo $0 < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente.

Nota. Ovviamente anche quando ho esposto due o tre possibili modi di risolvere l'esercizio, lo studente può spiegarne uno solo purché corretto e giustificato.

2) Sia data la funzione

$$f(x) = 8(x-3)^{-11} + 5(x-3)^{14}.$$

a) Determinare gli intervalli di crescita e decrescita di f contenuti nell'intervallo $(3, +\infty)$. (**NOTA:** come detto esplicitamente non si richiede di studiare il comportamento di f per $x \leq 3$).

b) Dire se si ha $f(x) \leq f(6x-10)$ per tutti gli $x \geq 85$.

Soluzione.

a) Per studiare la crescita e la decrescita di f per prima cosa ne calcoliamo la derivata. In questo caso, essendo una derivata molto semplice non svolgo tutti i passaggi. Si ha

$$f'(x) = 8(-11)(x-3)^{-11-1} + 5 \cdot 14 \cdot (x-3)^{14-1} = -88(x-3)^{-12} + 70(x-3)^{13} =$$

$$\frac{-88}{(x-3)^{12}} + 70(x-3)^{13} = \frac{-88 + 70(x-3)^{25}}{(x-3)^{12}}.$$

Ora noi dobbiamo studiare il segno di f' . A tale fine notiamo che il denominatore $(x-3)^{12}$ è chiaramente sempre positivo nell'intervallo $(3, +\infty)$, in quanto in tale intervallo $x-3 > 0$. Studiamo ora il segno del numeratore. Si ha

$$-88 + 70(x-3)^{25} > 0 \iff 70(x-3)^{25} > 88$$

$$\iff (x-3)^{25} > \frac{88}{70} \iff x-3 > \sqrt[25]{\frac{88}{70}}$$

$$\iff x > 3 + \sqrt[25]{\frac{88}{70}}.$$

In conclusione, posto $\bar{x} = 3 + \sqrt[25]{\frac{88}{70}}$, si ha che $f' > 0$ in $(\bar{x}, +\infty)$. Poiché con lo stesso argomento di prima (anzi con un argomento ancora più semplice) si vede che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \bar{x}$, allora si ha che $f' < 0$ in $(3, \bar{x})$, (poiché in tale intervallo f' non

è né $= 0$ né > 0). Segue che f è crescente (anzi strettamente crescente) nell'intervallo $[\bar{x}, +\infty)$, e decrescente (anzi strettamente decrescente) nell'intervallo $(3, \bar{x}]$. Ricordo che se una funzione è continua, la stretta crescita vale anche negli estremi dell'intervallo in cui è maggiore di 0, purché inclusi nell'insieme di definizione, e un simile discorso vale per la stretta decrescenza. Comunque si è anche accettata come soluzione corretta una in cui si diceva che la funzione è crescente nell'intervallo aperto $(\bar{x}, +\infty)$ e similmente per l'intervallo di decrescenza. Per completezza ho specificato anche che la crescita e la decrescenza erano strette, ma questo non era richiesto, in quanto l'esercizio chiedeva solo che si dicesse dove era crescente e dove era decrescente.

Vediamo la parte b). Sia $x \geq 85$. Si ha $6x - 10 \geq x$ in quanto la disequazione $6x - 10 \geq x$ è verificata se e solo se $x \geq 2$, e quindi anche i punti x e $6x - 10$ entrambi giacciono nell'intervallo $(\bar{x}, +\infty)$, essendo $85 > \bar{x}$. Poiché in tale intervallo f è crescente, si ha subito $f(6x - 10) \geq f(x)$ per ogni $x \geq 85$.

3)

Sia

$$g(x) = \cos \left((7x^5 - 5 \ln x) \sin(x) \right).$$

a) Calcolare la derivata g' di g .

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left((10 + 9x)^{-71} + g'(x) \right) dx.$$

Risolviamo a), *svolgendo i passaggi*. Poiché g è la composizione della funzione coseno e della funzione $u(x) = (7x^5 - 5 \ln x) \sin(x)$, la derivata g' di g si calcola con la regola di derivazione delle funzioni composte, ossia, tenuto conto che $D \cos = -\sin$,

$$g'(x) = -\sin \left((7x^5 - 5 \ln x) \sin(x) \right) u'(x). \quad (1)$$

D'altra parte u è un prodotto, e quindi

$$\begin{aligned} u'(x) &= D(7x^5 - 5 \ln x) \sin(x) + (7x^5 - 5 \ln x) D(\sin)(x) \\ &= (35x^4 - 5 \frac{1}{x}) \sin(x) + (7x^5 - 5 \ln x) \cos(x) \end{aligned}$$

e in conclusione,

$$g'(x) = -\sin \left((7x^5 - 5 \ln x) \sin(x) \right) \left((35x^4 - 5 \frac{1}{x}) \sin(x) + (7x^5 - 5 \ln x) \cos(x) \right). \quad (2)$$

Faccio ora alcune considerazioni su che cosa può essere richiesto nella soluzione di questo esercizio. Non è sufficiente lasciare la formula (1) per esprimere g' in quanto, quando si chiede di calcolare una derivata, per "calcolare" si intende ottenere un'espressione in cui

sono scritte delle funzioni in modo "esplicito", *senza alcun simbolo di derivazione*. Quindi (1) non va bene perché contiene l'espressione u' che è la derivata di u , e non mi dice quanto vale in modo esplicito. Invece (2) è la soluzione completa dell'esercizio in quanto non vi sono più simboli di derivazione ma la funzione è descritta esplicitamente. *Una volta ottenuta un'espressione come la (2) non è richiesto svolgerla, semplificarla, o scriverla comunque in un modo più semplice, poiché non si chiede che l'espressione della derivata sia la più elegante possibile*. Invece, quello che è importante è che si spieghi come si arriva ad ottenere (2); non è detto che si devano spiegare i passaggi come ho spiegato io qui; potrebbero esserci altri modi di spiegarli. Qualche passaggio potrebbe anche non essere scritto in modo esplicito, ma si richiede comunque che *non si scriva l'espressione in (2) senza dare spiegazioni*. *Se qualcuno scrive la (2) senza spiegazioni, e poi la modifica o semplifica, a rigore non ha dato alcuna giustificazione dell'esercizio in quanto l'esercizio consiste nel dire quanto vale g' , non nello scrivere g' in modo più elegante*.

Vediamo ora la soluzione della parte b). Poiché l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali, si ha

$$\int \left((10 + 9x)^{-71} + g'(x) \right) dx = \int (10 + 9x)^{-71} dx + \int g'(x) dx .$$

Per il primo integrale si ha il procedimento standard

$$\begin{aligned} \int (10 + 9x)^{-71} dx &= \frac{1}{9} \int 9(10 + 9x)^{-71} dx = \\ \frac{1}{9} \int y^{-71} dy|_{y=10+9x} &= \frac{1}{9} \frac{1}{-71+1} y^{-71+1} + c|_{y=10+9x} = -\frac{1}{630} (10 + 9x)^{-70} + c \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che 9 è la derivata della funzione $10 + 9x$; mentre $\int g'(x) dx = g(x) + c = \cos \left((7x^5 - 5 \ln x) \sin(x) \right) + c$ per la definizione di integrale indefinito (ricordo che una primitiva di una funzione w è una funzione la cui derivata vale w , quindi una primitiva di g' è g). In conclusione

$$\int \left((10 + 9x)^{-71} + g'(x) \right) dx = -\frac{1}{630} (10 + 9x)^{-70} + \cos \left((7x^5 - 5 \ln x) \sin(x) \right) + c .$$

Vediamo ora la soluzione di un'altra versione del terzo esercizio.

Sia

$$g(x) = \ln(8x^3 - 2 \sin x) \cos(x) .$$

a) Calcolare la derivata g' di g .

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left((8 - 5x)^{67} + g'(x) \right) dx .$$

Svolgo solo a) poiché b) è molto simile a quella già vista. Si ha

$$\begin{aligned} g'(x) &= D\left(\ln(8x^3 - 2\sin x)\right) \cos(x) + \ln(8x^3 - 2\sin x) D(\cos)(x) = \\ &= \left(D(\ln)\right)(8x^3 - 2\sin x) D(8x^3 - 2\sin x) \cos(x) - \ln(8x^3 - 2\sin x) \sin x \\ &= \frac{1}{8x^3 - 2\sin x} (24x^2 - 2\cos(x)) \cos(x) - \ln(8x^3 - 2\sin x) \sin x \end{aligned}$$

4) a) Sia $v(x) = \cos(7x^8)$. Trovare due successioni a_n e b_n tali che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, e $v(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $v(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, e dedurre che non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$.
b) Provare che se u è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, tale che $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, posto

$$v(x) = \cos(u(x)),$$

non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$.

Soluzione a) Si ha $v(x) = 0$ quando $7x^8 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in \mathbf{Z}$. Quindi se prendiamo a_n tale che $7a_n^8 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, sicuramente $v(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Possiamo quindi prendere $a_n = \sqrt[8]{\frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{7}}$ (n intero positivo). Si vede anche facilmente che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Similmente si ha $v(x) = 1$ quando $7x^8 = 2n\pi$ con $n \in \mathbf{Z}$. Quindi se prendiamo b_n tale che $7b_n^8 = 2n\pi$, sicuramente $v(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Prendiamo $b_n = \sqrt[8]{\frac{2n\pi}{7}}$. Si ha che $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Una volta trovate queste due successioni deduciamo che non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$, in quanto se esistesse tale limite e lo chiamiamo l , per il teorema ponte si avrebbe, $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} v(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v(b_n)$, quindi l dovrebbe essere simultaneamente uguale a 0 e a 1.

b) Fissato un intero positivo n , esiste k intero positivo tale che $u(n) < 2k\pi$ dato che chiaramente $2k\pi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$. D'altra parte, poiché $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, esisterà $x_n > n$ tale che $u(x_n) > 2k\pi$. Allora, poiché u è continua, per il teorema dei valori intermedi, esiste $b_n \in (n, x_n)$ tale che $u(b_n) = 2k\pi$. Segue che $v(b_n) = \cos(u(b_n)) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, e inoltre $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ essendo $b_n > n$. Ragionando analogamente, prendendo $\frac{\pi}{2} + k\pi$ invece di $2k\pi$, si trova una successione a_n tale che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, e $v(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La conclusione segue come in a).