Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2007/08 21/07/2008

1) Sia

$$J(y) = \int_0^1 \Big((y'(t))^n + \big(y(t)+t\big)^{400} \Big) dt \,.$$

$$y(0) = 2, y(1) = 5 \,. \tag{1}$$

a) Scrivere l'equazione di Eulero per il funzionale J.
b) Per quali $n = 1, 2, 3, ...$ possiamo dire che ogni estremale di J soddisfacente (1) di classe C^1 è un minimo per sulle funzioni C^1 a tratti soddisfacenti (1)?
c) Per quali $n = 1, 2, 3, ...$, J è inferiormente limitato sulle funzioni C^1 a tratti soddisfacenti (1)?

2) Definiamo per $y : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ continua,

$$J_1(y) = \int_0^1 \Big(f\big(||y(t)||\big) \Big) dt \,,$$

$$J_2(y) = J_1(y) + L(y) \,,$$

con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Qui $L(y)$ denota la lunghezza della curva y.
a) Provare che esiste f tale che J_1 non ha minimo sulle funzioni continue $y : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ soddisfacenti $y(0) = (-1,0)$, $y(1) = (1,0)$.
b) Provare che esiste f tale che J_2 non ha minimo sulle funzioni continue $y : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ soddisfacenti $y(0) = (-1,0)$, $y(1) = (1,0)$.
c) Provare che per ogni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua, J_2 ha minimo sulle funzioni $y : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ Lipshitziane di costante 1, soddisfacenti $y(0) = (-1,0)$, $y(1) = (1,0)$.

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2007/08 26/06/2008

1) Sia

$$J(y) = \int_0^1 \Big((y'(t))^3 + t^3 y(t)\Big) dt\,.$$

$$y(0) = 2, y(1) = a\,. \tag{1}$$

a) Determinare per almeno un a reale un estremale C^1 di tale problema.
b) Provare che per ogni a reale, J non ha minimo sulle funzioni C^1 a tratti soddisfacenti (1).

2) Sia

$$\tilde{J}(y) = \int_1^2 \Big(f(y'(t))\,.$$

con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Si consideri il problema di minimo

$$\min \tilde{J}(y) \tag{P_B}$$

sulle y di classe C^1 su $[0, 1]$ che verificano

$$y(0) = 2, y(1) = B$$

Supponiamo che $f(x) = x^2$ se $x \leq 1$.
a) Supponiamo $f(x) \geq x^2$ per ogni x. Trovare un B tale che (P_B) ha soluzione.
b) Supponiamo $f(x) \geq x^2$ per ogni x Provare che se $B = 3$ la funzione $y(t) = t + 2$ è soluzione del problema (P_B).
c) Provare che se f è C^1 e $f'(x) \geq 2$ se $x \geq 1$ allora se $B = 3$ la funzione $y(t) = t + 2$ è soluzione del problema (P_B).

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2006/07 17/12/2007

1) Sia

$$J(y) = \int_0^1 \Big((y'(t))^4 (t^2+1)^3 + 24 \Big) dt \, .$$

Si consideri il problema di minimo

$$\min J(y) \qquad (P_A)$$

sulle y di classe C^1 su $[0,1]$ che verificano

$$y(0) = 0, y(1) = 2 \, . \qquad (1)$$

a) Determinare gli eventuali minimi di classe C^1 di J sotto le condizioni date.
b) Determinare gli eventuali minimi di classe C^1 di J rimpiazzando (1) con

$$y(0) = 0, (y(1))^2 = 2 \, . \qquad (2)$$

2) Sia

$$\tilde{J}(y) = \int_1^2 \Big(f\big(y'(t)\big) - 3 \Big)^6 dt \, .$$

con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Si consideri il problema di minimo

$$\min \tilde{J}(y) \qquad (P_B)$$

sulle y di classe C^1 a tratti su $[1,2]$ che verificano

$$y(1) = 4, y(2) = B$$

a) Provare che, se f è biiettiva, allora esiste $B \in \mathbf{R}$ tale che P_B ha soluzione.
b) Esiste $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non costante tale che $\tilde{J}(y) > 0$ per ogni y di classe C^1 su $[1,2]$?
c) Esistono f illimitata sia superiormente sia inferiormente e $B \in \mathbf{R}$ tali che P_b non ha soluzione?

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2006/07 10/07/2007

1) Sia

$$J(y) = \int_0^1 (y'(t))^{10} + e^t y(t)\, dt\,.$$

Si consideri il problema di minimo

$$\min J(y) \qquad (P_A)$$

sulle y di classe C^1 su $[0,1]$ che verificano

$$y(0) = 0, y(1) = A$$

a) Dire per quali $A \in \mathbf{R}$ ogni estremale del problema (P_A) è un minimo.
b) Determinare gli estremali di (P_A) per qualche $A \in \mathbf{R}$.

2) Sia

$$\tilde{J}(y) = \int_0^1 \phi(y'(t))dt\,.$$

con $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Si consideri il problema di minimo

$$\min \tilde{J}(y) \qquad (P_{A,B})$$

sulle y di classe C^1 a tratti su $[0,1]$ che verificano

$$y(0) = A, y(1) = B$$

a) Provare che se $\phi(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $\phi(n) = -n$ per ogni numero naturale n, allora $P_{0,0}$ non ha soluzione, e che piú generalmente $P_{A,B}$ non ha soluzione soluzione per ogni coppia di numeri reali A e B.
b) Provare che se ϕ è inferiormente illimitata ma superiormente limitata, allora $P_{0,0}$ non ha soluzione, e che piú generalmente $P_{A,B}$ non ha soluzione soluzione per ogni coppia di numeri reali A e B.
c) Se ϕ come sopra non ha minimo, è necessariamente vero che $P_{A,B}$ non ha soluzione?
d) Provare che se per ogni $B \in \mathbf{R}$ la funzione y definita da $y(x) = Bx$ è soluzione di $P_{0,B}$ allora ϕ è convessa.

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2006/07 13/06/2007

1) Sia

$$J(y) = \int_0^1 (y'(t))^2 + t^2 y'(t) + t^4 + (y(t))^2 \, dt \, .$$

Dire se esiste,

$$\min J(y)$$

sulle y di classe C^1 su $[0,1]$ che verificano

$$y(0) = y(1) = 0$$

e nel caso determinare almeno una y di classe C^1 su $[0,1]$ che realizza tale minimo. Provare inoltre che comunque dati numeri reali A e B i punti di minimo del funzionale $J(y)$ sulle y di classe C^1 su $[0,1]$ che verificano

$$y(0) = A, \quad y(1) = B \tag{1}$$

coincidono con i punti di minimo del funzionale $\big(J(y)\big)^2$ sulle y di classe C^1 su $[0,1]$ che verificano (1).

2) Sia data la funzione $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da

$$L(t, x, q) = \alpha(q) + f(t)x$$

con f e α funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^∞, e sia

$$J(y) = \int_0^1 L\big(t, y(t), y'(t)\big) \, dt \, ,$$

$$P_{A,B} = \min\{J(y) : y \in C^1([0,1]) : y(0) = A, y(1) = B\} \, .$$

a) Supponendo $\alpha(q) = q^2$, provare che $P_{A,B}$ ha una unica soluzione per ogni coppia di numeri reali A e B.
b) Supponendo $\alpha(q) = q^2$, dire per quali f, L soddisfa le condizioni del teorema di esistenza del minimo (di Tonelli).
c) Supponendo piú generalmente $\alpha'' \geq 1$, provare che $P_{A,B}$ ha una unica soluzione per ogni coppia di numeri reali A e B.
d) Se invece $\alpha'' > 0$, è ancora vero che $P_{A,B}$ ha una unica soluzione per ogni coppia di numeri reali A e B?

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2003/04 09/06/2004

1) Sia
$$J(y) = \int_0^1 (y'(x))^4 + 3y'(x) + 5y(x)\, dx\,.$$
Dire se esiste,
$$\min J(y)$$
sulle y di classe C^1 su $[0,1]$ che verificano
$$y(0) = y(1) = 2$$
e nel caso determinare almeno una y di classe C^1 su $[0,1]$ che realizza tale minimo.
Dire se esiste,
$$\max J(y)$$
sulle y di classe C^1 su $[0,1]$ che verificano
$$y(0) = y(1) = 2$$
e nel caso determinare almeno una y di classe C^1 su $[0,1]$ che realizza tale massimo.

2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1 tale che f ha un numero finito di zeri (cioè l'insieme $\big\{x \in \mathbf{R} : f(x) = 0\big\}$ è un insieme finito). Siano
$$J_1(y) = \int_0^1 \big|f(y'(x))\big|\, dx\,, \quad J_2(y) = \int_0^1 \big|f(y'(x))\big| + \big|y(x) - 6\big|\, dx\,.$$
Dire sotto quali condizioni sugli zeri di f
a) esiste y di classe C^1 su $[0,1]$ che verifica
$$y(0) = y(1) = 6, \quad J_1(y) = 0\,.$$
b) esiste y di classe C^1 a tratti su $[0,1]$ che verifica
$$y(0) = y(1) = 6, \quad J_1(y) = 0\,.$$
c) vale b), e inoltre esiste
$$\min J_2(y)$$
sulle y di classe C^1 a tratti su $[0,1]$ che verificano
$$y(0) = y(1) = 6\,.$$

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2004/05 26/05/2005

1) Siano

$$J_\alpha(y) = \int_0^1 (y'(x))^2 + 16(y(x))^2 + \alpha y(x)\, dx\,,$$

$$\tilde{J}_\alpha(y) = \int_0^1 (y'(x))^2 + 16(y(x))^2 + \alpha y(x) + y'(x)((y(x))^6\, dx\,.$$

Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, dire se esiste

$$\min_{y\in F} J_\alpha(y)$$

$$\text{ove} \quad F := \Big\{ y \in C^1([0,1]) : y(0) = y(1) = 2 \Big\}\,.$$

e nel caso determinare almeno una $y \in F$ che realizza tale minimo.
Provare inoltre che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, data $\overline{y} \in F$ si ha $J_\alpha(\overline{y}) = \min_{y\in F} J_\alpha(y)$ se e solo se $\tilde{J}_\alpha(\overline{y}) = \min_{y\in F} \tilde{J}_\alpha(y)$, in altri termini J_α e $\tilde{J}_\alpha$ hanno gli stessi punti di minimo su F.

2) Sia

$$J(y) = \int_0^1 |y(x)| + g\big(|y'(x)|\big)\, dx\,,$$

ove g è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, tale che $g(0) = 0$, $g(t) > 0$ se $t > 0$. Sia

$$A_b = \Big\{ y \in C^1([0,1]) : y(0) = y(1) = b \Big\}\,.$$

a) Dire se in tali condizioni esiste

$$\min_{y\in A_0} J(y).$$

b) Supponendo inoltre $g(t) \ge 40t$ per ogni $t \ge 0$, provare che esiste

$$\min_{y\in A_1} J(y).$$

c) Cercare di migliorare la costante 40 in b), ossia cercare un β positivo il piú piccolo possibile tale che se $g(t) \ge \beta t$ per ogni $t \ge 0$, allora esiste

$$\min_{y\in A_1} J(y).$$

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2004/05 25/07/2005

1) Sia
$$J(y) = \int_0^1 e^{y(x)+\alpha y'(x)}\, dx\,.$$
con $\alpha \in \mathbf{R}$, con le condizioni $y(0) = 0, y(1) = 2$, y di classe C^1 su $[0, 1]$.

Determinare gli eventuali estremali di tale problema per $\alpha = 3$.

Dire inoltre per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ possiamo essere sicuri che ogni estremale di J con tali condizioni è un minimo.

2) Sia dato il funzionale
$$\tilde{J}(y) = \int_0^1 \sqrt{\Big|y'(x) - f(y(x))\Big|}\, dx\,.$$
con le condizioni
$$y(0) = 0, \quad y(1) = \beta\,.$$
con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1 e limitata.

a) Provare che per alcuni valori di β tale problema ha minimo.

b) Provare che per certi valori di β $\tilde{J}$ non si annulla mai per le y che soddisfano le condizioni dette.

c) Si può dire qualcosa sull'esistenza del minimo di $\tilde{J}$ per le y che soddisfano le condizioni dette (di classe C^1 o C^1 a tratti) per i valori di β del caso b), o almeno per alcuni di tali valori?

Scritto di Calcolo delle Variazioni

Anno Accademico 2005/06 08/08/2006

1) Sia
$$J(y)=\int_0^1 e^x\Big((y'(x))^2+\alpha y^2(x)\Big)\,dx\,.$$
con $\alpha\in\mathbf{R}$, con le condizioni $y(0)=0, y(1)=6$, y di classe C^1 su $[0,1]$.

Determinare gli eventuali estremali di tale problema per $\alpha=12$ e per $\alpha=-12$.
Dire inoltre per quali $\alpha\in\mathbf{R}$ possiamo essere sicuri che ogni estremale di J con tali condizioni è un massimo.

2) Sia dato il funzionale
$$\tilde{J}(y)=\int_0^1 \big(f(y(x))^2+\big(g(y'(x))^2\big)\,dx\,.$$
con le condizioni
$$y(0)=0,\quad y(1)=1.$$
con f e g funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continue.

a) Provare che se f si annulla nell'intervallo $[0,1]$ e g si annulla in un punto opportuno (quale?), allora $\tilde{J}$ ha minimo uguale a 0 sulle funzioni C^1 che soddisfano le condizioni date.
b) Vale il viceversa?
c) Si possono dare condizioni per il minimo uguale a 0 sulle funzioni AC che soddisfano le condizioni date?
d) Provare che per ogni $b>0$ esiste esistono f e g continue non costanti tali che $\tilde{J}$ ha minimo uguale a b sulle funzioni C^1 che soddisfano le condizioni date.