

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2019/20

21/09/2020

1) a) Siano $E_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x + y < b\}$, $F_{a,b} = \{(x, y) \in E_{a,b} : x^2 + y^2 \in \mathbf{Z}\}$, ove $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Provare che $E_{a,b}$ e $F_{a,b}$ sono boreliani.

b) Definiamo la misura μ sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ come $\mu(A) = \int_A e^{-x^2-y^2} dx dy$. Dire se $\mu(E_{a,+\infty}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[\frac{1}{5}, +\infty]} \frac{x}{x^\pi + \frac{1}{n}} dm_1(x)$.

b) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1, 2+\frac{1}{n}]} n \ln \left(1 + \frac{x^e}{n}\right) dm_1(x)$.

3) Definiamo un insieme $K \subseteq [0, 1]$ come $K := \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$, ove K_n sono definiti induttivamente come $K_0 = [0, 1]$; supponiamo $K_n = \bigcup_{i \in I_n} [a_{n,i}, b_{n,i}]$, ove I_n è un insieme finito, $a_{n,i} < b_{n,i}$ e gli intervalli $[a_{n,i}, b_{n,i}]$ al variare di $i \in I_n$ sono a due a due disgiunti; allora

$$K_{n+1} = \bigcup_{i \in I_n} \left([a_{n,i}, c_{n,i}] \cup [d_{n,i}, b_{n,i}] \right).$$

Qui $c_{n,i} := \frac{a_{n,i} + b_{n,i}}{2} - \eta_{n,i}$, $d_{n,i} := \frac{a_{n,i} + b_{n,i}}{2} + \eta_{n,i}$, ove $\eta_{n,i} > 0$ è scelto in modo che

$$a_{n,i} < c_{n,i} < d_{n,i} < b_{n,i}.$$

Ovviamente tale insieme dipende dalla scelta di $\eta_{n,i}$.

a) Dire se K è un boreliano di $\mathbf{R}$.

b) Dire se K ha misura di Lebesgue uguale a 0.

c) Dire se, dato un boreliano w di $\mathbf{R}$ avente misura di Lebesgue nulla, l'insieme $K \cup w$ ha interno vuoto.

d) Dire se la funzione u definita da $u(x) = \frac{1}{x}$ sta in $L^1(K)$.

NOTA: le domande a), b), c) d) si intendono tutte come

la proprietà richiesta è sempre vera comunque scelti $\eta_{n,i}$ o è sempre falsa comunque scelti $\eta_{n,i}$, oppure a seconda della scelta di $\eta_{n,i}$ può essere vera o falsa?

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2019/20

21/07/2020

- 1)** a) Siano $A_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : n \leq \|(x, y)\| < n + 1\}$,
 $B_n = \{(x, y) \in A_n : x > 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Provare che A_n e B_n sono boreliani in $\mathbf{R}^2$ per ogni intero positivo n .
b) Provare che la successione $m_2(B_n)$ è limitata, e dire se è convergente.
c) Provare che se a_n è una successione strettamente crescente di numeri reali con $a_1 = 0$ tale che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, allora per ogni successione b_n di numeri reali la funzione f da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ definita da
 $f(x, y) = b_n$ se $a_n \leq \|(x, y)\| < a_{n+1}$ è misurabile.
d) Provare che in c) se $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, allora esiste a_n come in c) tale che $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ se e solo se $\alpha > 0$.
- 2)** a) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} e^{-\frac{nx^2}{nx+1}} dm_1(x)$.
b) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n^2} e^{-x^2} dm_1(x)$.
- 3)** a) Sia $u_a(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \leq \frac{\pi}{2} \\ x + a & \text{se } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Provare che u_a è B.V su $[0, 1]$ e che u_a è B.V. su $[0, 5]$ per ogni $a \in \mathbf{R}$.
b) Provare che se $v : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ è B.V. su $[0, a]$ e su $[b, 1]$ con $0 < b < a < 1$, allora v è B.V. su $[0, 1]$.
c) Provare che se $v : 0, 1 \rightarrow \mathbf{R}$ e per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $\delta > 0$ tale che v è B.V. su $[0, 1] \cap [x - \delta, x + \delta]$, allora v è B.V. su $[0, 1]$.

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2019/20

07/07/2020

1) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^6 + 2 > y^6, x \geq 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in A : y \geq x\}$.

a) Provare che A e B sono boreliani.

b) Dire se $m_2(A) < +\infty$ e se $m_2(B) < +\infty$.

2) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

a) Provare che se f_n è una successione di funzioni misurabili su C a valori reali tale che $f_n \rightarrow f$ puntualmente su C allora

$$\int_C \arctan \circ f_n \, dm_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_C \arctan \circ f \, dm_2.$$

b) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_C \frac{(x+y)^n}{x+y+2} dm_2(x, y)$

c) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_C \frac{(x+2y)^n}{x+y+2} dm_2(x, y)$

3)

a) Sia μ una misura sui boreliani di $\mathbf{R}^2$. Provare che se E e F sono boreliani di $\mathbf{R}^2$ e $F \subseteq E$, e inoltre $\mu(E) = m_2(E)$ e $\mu(B) \leq m_2(B)$ per ogni boreliano B in $\mathbf{R}^2$, allora $\mu(F) = m_2(F)$

b) Sia μ una misura sui boreliani di $\mathbf{R}^2$. Provare che se $\mu(B) \leq m_2(B)$ per ogni B della forma $[a, b] \times [c, d]$ e $\mu([-n, n] \times [-n, n]) = m_2([-n, n] \times [-n, n])$ per ogni intero positivo n , allora $\mu(B) = m_2(B)$ per ogni B della forma $[a, b] \times [c, d]$.

c) Vale lo stesso se l'ipotesi $\mu([-n, n] \times [-n, n]) = m_2([-n, n] \times [-n, n])$ per ogni intero positivo n viene rimpiazzata da $\mu(B_n) = m_2(B_n)$ per ogni intero positivo n , ove B_n indica la palla chiusa di centro l'origine e raggio n ?

d) (più difficile). Supponiamo che se μ è una misura sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ e per ogni $Q \in \mathcal{A}$ esiste $Q' \in \mathcal{A}$ con $Q' \subseteq Q$ tale che $\mu(Q') = 0$. Qui

$\mathcal{A} = \{[a, b] \times [c, d] : a, b, c, d \in \mathbf{R}, a < b, c < d\}$. Posso dedurre $\mu(B) = 0$ per ogni boreliano B in $\mathbf{R}^2$?

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2019/20

18/02/2020

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a)

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{6} \leq \sin(x + y) < \frac{1}{3}\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{6} < \sin(x + y) \leq \frac{1}{3}\}$.

Provare che A e B sono boreliani in $\mathbf{R}^2$.

b) Calcolare $m_2((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1] \times [n,2n]} \frac{1}{x^2 + y^2} dm_2(x, y)$.

b) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1] \times [n,n+1]} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dm_2(x, y)$.

c) Determinare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{n^a + n + 1}{n^3 + (x + y)^n} dm_2(x, y)$.

3) Data una misura μ definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$, diciamo che μ è 1-invariante se esiste $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tale che per ogni boreliano A di $\mathbf{R}^2$ si ha $\mu(A + v) = \mu(A)$. Diciamo che μ è 2-invariante se esiste $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tale che per ogni boreliano A di $\mathbf{R}^2$ e per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha $\mu(A + \lambda v) = \mu(A)$.

a) Provare che se μ è 1-invariante e finita, allora per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ si ha $\mu(\{x\}) = 0$.

b) Provare che se μ è 1-invariante e finita, allora $\mu(\mathbf{R}^2) = 0$.

c) Provare che se μ è 2-invariante e σ -finita, allora per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ si ha $\mu(\{x\}) = 0$.

d) Provare che se μ è 2-invariante e supponiamo che esistano $x \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$ tale che $\mu(S_r(x)) > 0$, ove per definizione $S_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^2 : \|x - y\| = r\}$. Qui $\| \cdot \|$ denota la norma euclidea. Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{z} \in S_r(x)$ tale che $\mu(B_\varepsilon(\bar{z})) = +\infty$.

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2019/20

18/02/2020

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

medskip **1)** a)

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{6} \leq \sin(x + y) < \frac{1}{3}\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{6} < \sin(x + y) \leq \frac{1}{3}\}$.

Provare che A e B e sono boreliani in $\mathbf{R}^2$.

b) Calcolare $m_2((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1] \times [n,2n]} \frac{1}{x^2 + y^2} dm_2(x, y)$.

b) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1] \times [n,n+1]} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dm_2(x, y)$.

c) Determinare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{n^a + 3n + 1}{n^5 + (x + y)^n} dm_2(x, y)$.

3) Data una misura μ definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$, diciamo che μ è 1-invariante se esiste $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tale che per ogni boreliano A di $\mathbf{R}^2$ si ha $\mu(A + v) = \mu(A)$. Diciamo che μ è 2-invariante se esiste $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tale che per ogni boreliano A di $\mathbf{R}^2$ e per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha $\mu(A + \lambda v) = \mu(A)$

a) Provare che se μ è 1-invariante e finita, allora per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ si ha $\mu(\{x\}) = 0$.

b) Provare che se μ è 1-invariante e finita, allora $\mu(\mathbf{R}^2) = 0$.

c) Provare che se μ è 2-invariante e σ -finita, allora per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ si ha $\mu(\{x\}) = 0$.

d) Provare che se μ è 2-invariante e supponiamo che esistano $x \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$ tale che $\mu(S_r(x)) > 0$, ove per definizione $S_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^2 : \|x - y\| = r\}$. Qui $\| \cdot \|$ denota la norma euclidea. Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{z} \in S_r(x)$ tale che $\mu(B_\varepsilon(\bar{z})) = +\infty$.

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2019/20

28/01/2020

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a)

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 100\}$, $B_d = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2x + y^2 + 6y \leq d\}$,
 $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y + x = 1\}$, $C_d = B_d \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbf{Q}} (S + (q, q)) \right)$. Provare che A , B_d e C_d sono

boreliani in $\mathbf{R}^2$ per ogni numero reale $d > 0$.

b) Dire per quali numeri reali $d > 0$ si ha $m_2(A \setminus C_d) = m_2(A) - m_2(C_d)$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty[} f_n(x) dm_1(x)$, ove

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x^2+n} & \text{se } x > n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

b) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, 2[} g_n(x) dm_1(x)$ ove $g_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n} + 3^n x^n + n^2}$.

c) Dire se è vera la seguente affermazione:

Per ogni funzione $g : [0, 5] \rightarrow \mathbf{R}$ misurabile esistono $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ tali che per infiniti indici n esiste un boreliano A_n in $[0, 5]$ con $m_1(A_n) \geq \eta$ e $|g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ per ogni $x \in A_n$.

3) Diciamo che un sottoinsieme E di $\mathbf{R}^N$ è σ -pieno rispetto a $B \subseteq \mathbf{R}^N$ se esiste un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^N$ finito o numerabile tale che $\bigcup_{c \in C} (E + c) \supseteq B$. Diciamo che E è σ -pieno se è

σ -pieno rispetto a $\mathbf{R}^N$.

a) Provare che se E è un boreliano in $\mathbf{R}^N$ σ -pieno, allora $m_N(E) > 0$.

b) Provare che ogni aperto non vuoto è σ -pieno.

c) Se E è σ -pieno rispetto a F e F è σ -pieno rispetto a G possiamo concludere che E è σ -pieno rispetto a G ?

d) Determinare un insieme σ -pieno in $\mathbf{R}$ che non è della forma $U \setminus H$ con U misurabile con interno non vuoto e H di misura nulla.

e) Ogni insieme di misura strettamente positiva è σ -pieno ? (penso decisamente difficile).

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2019/20

28/01/2020

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a)

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 400\}$, $B_d = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 8x + y^2 + 4y \leq d\}$,
 $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y + x = 1\}$, $C_d = B_d \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbf{Q}} (S + (q, q)) \right)$. Provare che A , B_d e C_d sono

boreliani in $\mathbf{R}^2$ per ogni numero reale $d > 0$.

b) Dire per quali numeri reali $d > 0$ si ha $m_2(A \setminus C_d) = m_2(A) - m_2(C_d)$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty[} f_n(x) dm_1(x)$, ove

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)}{x^2 + 3n} & \text{se } x > n + 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

b) Determinare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, 2[} g_n(x) dm_1(x)$ ove $g_n(x) = \sqrt[n]{x^{4n} + 2^n x^n + n^5}$.

c) Dire se è vera la seguente affermazione:

Per ogni funzione $g : [0, 5] \rightarrow \mathbf{R}$ misurabile esistono $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ tali che per infiniti indici n esiste un boreliano A_n in $[0, 5]$ con $m_1(A_n) \geq \eta$ e $|g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ per ogni $x \in A_n$.

3) Diciamo che un sottoinsieme E di $\mathbf{R}^N$ è σ -pieno rispetto a $B \subseteq \mathbf{R}^N$ se esiste un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^N$ finito o numerabile tale che $\bigcup_{c \in C} (E + c) \supseteq B$. Diciamo che E è σ -pieno se è

σ -pieno rispetto a $\mathbf{R}^N$.

a) Provare che se E è un boreliano in $\mathbf{R}^N$ σ -pieno, allora $m_N(E) > 0$.

b) Provare che ogni aperto non vuoto è σ -pieno.

c) Se E è σ -pieno rispetto a F e F è σ -pieno rispetto a G possiamo concludere che E è σ -pieno rispetto a G ?

d) Determinare un insieme σ -pieno in $\mathbf{R}$ che non è della forma $U \setminus H$ con U misurabile con interno non vuoto e H di misura nulla.

e) Ogni insieme di misura strettamente positiva è σ -pieno ? (penso decisamente difficile).