Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2018/19 17/09/2019

NOME: COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Sia $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > x - 7, x^2 + y^3 \leq 2\right\}$. Provare che A è un boreliano.
b) Sia $\bar{B}_r(x,y)$ la palla chiusa di centro (x,y) e raggio $r > 0$ in $\mathbf{R}^2$. Provare che, dati $w_n \in \mathbf{R}^2$ e $r_n > 0$, l'insieme $B := \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{r_n}(w_n)$ è un boreliano, precisando se B può essere aperto, e se B è sempre aperto o sempre chiuso.
c) Sia $u : [0, 2\pi[\to]0, +\infty[$ una funzione e chiamiamo E_u l'insieme

$$E_u := \bigcup_{\theta \in [0,2\pi[} \left\{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : 0 \leq \rho \leq 1 + u(\theta)\right\}.$$

Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se E_u è un boreliano e $u(\theta) < \delta$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$ allora $m_2(E_u) < \pi + \varepsilon$.
d) Provare che se A è un compatto in $\mathbf{R}^2$, $B \subseteq A$ e per ogni $b \in B$ s_b è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ avente diametro $v(b) > 0$ con $b \in s_b$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $C_s := A \cup \left(\bigcup_{b \in B} s_b \right)$ è un boreliano e $v(b) < \delta$ per ogni $b \in B$, allora $m_2(C_s) < m_2(A) + \varepsilon$.
e) Dire se l'insieme E_u definito in c) è un boreliano comunque prendiamo la funzione u.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[0,1]\times[0,1]} \cos\left(2^{\frac{xy}{n}}\right) dm_2(x,y)$.

b) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[n,n+1]\times[5,12+\sin(n)]} \dfrac{1}{x^8 + y^8}\, dm_2(x,y)$.

c) Provare che se $a_n \geq 1$ e $b_n \geq 1$ sono successioni reali, allora se esse sono anche convergenti esiste il limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[a_n,a_n+1]\times[b_n,b_n+1]} \dfrac{1}{x^8 + y^8}\, dm_2(x,y)$.

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2018/19 03/09/2019

NOME: COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Siano $A_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 y \leq c\}$,
$B_c = \{(x, y) \in A_c : x \leq 20\}$.
Provare che per ogni $c > 0$, A_c e B_c sono boreliani.
b) Dire per quali $c > 0$ B_c ha misura di Lebesgue finita.
c) Provare che se $c > 0$ e f è una funzione crescente e continua da $\mathbf{R}$ in $[0, +\infty[$, non identicamente nulla, allora l'insieme $D_c := \big\{(x, y) \in A_c : y < f(x)\big\}$ è un boreliano di misura di Lebesgue finita.
d) Determinare un aperto di misura di Lebesgue finita contenente l'insieme $A_1 \setminus \big(\bigcup_{d<1} A_d\big)$.
e) Provare che se A è un sottoinsieme Lebesgue misurabile di $\mathbf{R}^2$ e $m_2(A) > 0$, allora per ogni $c \in \mathbf{R}$ tale che $0 < c < m_2(A)$ esiste un sottoinsieme B di A Lebesgue misurabile tale che $m_2(B) = c$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \cos\big(\frac{x^3}{x+n}\big)\, dm_1(x)$.
b) Determinare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_{n+1}\setminus B_n} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+\sin^2(x)}\, dm_2(x, y)$$

ove B_n è la palla chiusa in $\mathbf{R}^2$ di centro $(0, 0)$ e raggio n.
c) Determinare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[n+1,n+1+2^n]\times[0,1]} \frac{y}{x^2+y}\, dm_2(x, y).$$

d) Provare che la funzione u definita da

$$u(x) := \int_0^1 \big|\sin(xy)\big|^\pi\, dy$$

è continua su $\mathbf{R}$.

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2018/19 16/07/2019

NOME: COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Siano $A_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + n \leq y < x^2 + n + 1\}$,
$B_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + n < y \leq x^2 + n + 1\}$. Provare che, per ogni $n \in \mathbf{Z}$, A_n e B_n sono boreliani.
b) Provare che se μ è una misura definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ e $\mu(A) = 0$ per ogni A boreliano di $\mathbf{R}^2$ tale che $m_2(A) = 0$, allora $\mu(A_n) = \mu(B_n)$ per ogni $n \in \mathbf{Z}$.
c) Provare che se μ è una misura *finita* definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbf{Z}$ tale che $\mu(A_n) < \varepsilon$.
d) Dire se esiste una misura σ-finita μ definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ tale che
$\mu\big([n.n+1] \times [m, m+1]\big) = +\infty$ per ogni $n \in \mathbf{Z}$ ed ogni $m \in \mathbf{Z}$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^2 \dfrac{t^{2\pi} + n^{-2+\sin(n)}}{t^2 + n^{-2}}\, dm_1(t)$.

b) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{n^2}^{n^2+\frac{1}{n}} \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+2}\, dm_1(t)$.

c) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[n,n^2]\times[n,n^2]} \dfrac{1}{x^2y^2+n}\, dm_2(x,y)$.

3) Sia $f \in L^2([0,+\infty[)$.

a) Provare che $\int\limits_n^{2n} f^2 dm_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Dire se è vero che se inoltre $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ per ogni $x > 0$, si ha necessariamente $f \in L^1([0,+\infty[)$.

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2018/19 24/06/2019

NOME: COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y > 0, 1 < x+y \leq 2.\}$. Provare che A è un boreliano, e dire per quali $b \in \mathbf{R}$ si ha $m_2\Big(\{(x,y) \in A : y < x+b\}\Big) > 0$.
b) Provare che se μ è una misura definita sui boreliani di $[0,1] \times [0.1]$, $\mu\big([0,1] \times [0.1]\big) > 0$ e $\mu(A) \in \mathbf{N}$ per ogni A boreliano di $[0,1] \times [0.1]$, allora esiste $x \in [0,1] \times [0.1]$ tale che $\mu(\{x\}) > 0$.
c) Provare che se μ è una misura definita sui boreliani di $[0,1] \times [0.1]$, allora l'insieme dei valori che assume μ non può essere un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che ha 0 come unico punto di accumulazione.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{1}{1+nt^e}\, dm_1(t)$.
b) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{,+\infty} \dfrac{1}{(t^e+\sqrt{t})(1+nt^e)}\, dm_1(t)$.
c) Provare che, se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ allora esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f\big(\frac{t}{n}\big)\, dm_1(t)$.
d) Provare che se f è una funzione limitata da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e inoltre esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, allora esiste il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t+n)}{t^a}\, dm_1(t)$ per ogni $a < 1$.

3) a) Sia f una funzione limitata da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e sia $g(x) = \inf\{f(t) : t > x\}$. Provare che g è B.V. su $[0,1]$
b) Provare con un esempio che g non è necessariamente A.C. su $[0,1]$.
c) Provare che $g \in L^1(D)$ ove $D = \displaystyle\bigcup_{n=5}^{+\infty} \big[n, n+\frac{1}{3^n}\big]$.

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2018/19 11/02/2019

NOME: COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 < y < x^2\}$, $B = \{(x, y) \in A : y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$. Provare che A e B sono boreliani e calcolare la misura di Lebesgue di A e di B.
b) Dire se esiste una misura μ definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ tale che $\mu(A) = 1$, $\mu(B) = 0$, e inoltre $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^2$.

2) a) Determinare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1[} \arctan(nx)\, dm_1(x)$.
b) Determinare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \int_{[n,n^2[} \arctan(nx)\, dm_1(x)$.
c) Determinare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,2]} \arctan(x^n)\, dm_1(x)$.
d) Determinare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \int_{[-2,1]} \arctan(x^n)\, dm_1(x)$.

3) a) Dire se la funzione b definita da $b(x) = [x^{-1}]^{-1} + x^2$ è B.V. su $[a, 1]$ per ogni $a > 0$ e se è A.C. su $[a, 1]$ per ogni $a > 0$.
b) Data una misura di Radon μ su $\mathbf{R}^2$, sia g la funzione definita da $g(x) = \mu\big([-x, x] \times [-x, x]\big)$. Provare che g è B.V. su $[0, 1]$.
c) Provare che la funzione g definita in b) non è necessariamente continua su $[0, 1]$.
d) Se aggiungiamo l'ipotesi che $\mu(A) = 0$ per ogni boreliano di $\mathbf{R}^2$ tale che $m_2(A) = 0$, possiamo concludere che g definita in b) è A.C. su $[0, 1]$?

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2018/19 24/01/2019

NOME: COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Siano $A_n = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x+y \geq 1 + \frac{1}{n}, x^2+y^2 < 1\big\}$.

a) Provare che per ogni n intero positivo A_n è un boreliano.

b) Trovare $\lim\limits_{n\to+\infty} m_2(A_n)$.

c) Determinare una funzione f da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che $f \in L^2(A_n)$ per ogni n ma $\int\limits_{A_n} f^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Siano f_n e $g_n^{(a)}$ da $[0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{nx^8+e^x+2} & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad g_n^{(a)}(x) = \begin{cases} n^a & \text{se } x \leq \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{nx^8+e^x+2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,+\infty[} f_n \, dm_1$

b) Per $a=0$ determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,+\infty[} g_n^{(a)} \, dm_1$

c) determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,+\infty[} g_n^{(a)} \, dm_1$, la variare di $a > 0$.

3) Sia N un intero positivo fissato. Denotiamo con $B_r(x)$ la palla aperta di centro $x \in \mathbf{R}^N$ e raggio $r > 0$ in $\mathbf{R}^N$.

a) Provare che per ogni $x, y \in \mathbf{R}^N$ si ha $B_r(y) \subseteq B_{r+||y-x||}(x)$.

b) Provare che per ogni $r > 0$ si ha

$$m_N\Big(\big(B_r(x) \setminus B_r(y)\big) \cup \big(B_r(y) \setminus B_r(x)\big)\Big) \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0.$$

c) Sia F un boreliano di $\mathbf{R}^N$ e supponiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ esista

$$D_F(x) := \lim_{r\to 0} \frac{m_N\big(F \cap B_r(x)\big)}{m_N\big(B_r(x)\big)}.$$

Provare che la funzione D_F è misurabile.

d) Determinare un insieme boreliano F per cui in qualche punto la funzione D_F non è definita (ossia in qualche punto non esiste il limite definente D_F).

e)** Esiste F boreliano per cui D_F è definita in tutti i punti e D_F assume solo i valori 0 e 1 (e li assume entrambi in qualche punto)? (estremamente difficile- almeno penso)

Scritto di CAM1 per Matematica

Anno Accademico 2018/19 24/01/2019

NOME: COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Siano $A_n = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 1 + \frac{1}{n}, x^2 + y^2 < 2\big\}$.
a) Provare che per ogni n intero positivo A_n è un boreliano.
b) Trovare $\lim\limits_{n\to+\infty} m_2(A_n)$.
c) Determinare una funzione f da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che $f \in L^2(A_n)$ per ogni n ma $\int\limits_{A_n} f^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Siano f_n e $g_n^{(a)}$ da $[0, +\infty[$ in $\mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{nx^6 + \cos(x) + 13} & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad g_n^{(a)}(x) = \begin{cases} n^a & \text{se } x \leq \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{nx^6 + \cos(x) + 13} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,+\infty[} f_n \, dm_1$

b) Per $a = 0$ determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,+\infty[} g_n^{(a)} \, dm_1$

c) determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,+\infty[} g_n^{(a)} \, dm_1$, la variare di $a > 0$.

3) Sia N un intero positivo fissato. Denotiamo con $B_r(x)$ la palla aperta di centro $x \in \mathbf{R}^N$ e raggio $r > 0$ in $\mathbf{R}^N$.
a) Provare che per ogni $x, y \in \mathbf{R}^N$ si ha $B_r(y) \subseteq B_{r+||y-x||}(x)$.
b) Provare che per ogni $r > 0$ si ha

$$m_N\Big(\big(B_r(x) \setminus B_r(y)\big) \cup \big(B_r(y) \setminus B_r(x)\big)\Big) \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0.$$

c) Sia F un boreliano di $\mathbf{R}^N$ e supponiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ esista

$$D_F(x) := \lim_{r\to 0} \frac{m_N\big(F \cap B_r(x)\big)}{m_N\big(B_r(x)\big)}.$$

Provare che la funzione D_F è misurabile.
d) Determinare un insieme boreliano F per cui in qualche punto la funzione D_F non è definita (ossia in qualche punto non esiste il limite definente D_F).
e)** Esiste F boreliano per cui D_F è definita in tutti i punti e D_F assume solo i valori 0 e 1 (e li assume entrambi in qualche punto)? (estremamente difficile- almeno penso).