Prova dell'esame di cultura. 09/03/2020

2.1) a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \ln\left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^{9\pi}+1}+1}$.

b) Sia qui e nei punti successivi del 2.1) $a_n > 0$. Provare che se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, allora $\dfrac{a_n}{e^{a_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Provare che se $a_n + \dfrac{1}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, allora $\dfrac{a_n}{e^{a_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) Vale il viceversa del c)?

e) Dire quali implicazioni valgono tra $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_n}}$ converge e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{e^{a_n}}$ converge.

2.2) Risolvere la disequazione $\Big(\ln\big((x-2)(x-5)\big) - 1\Big)(x-2)(x-7) < 0$.

b) Supponiamo data una successione a_n tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e sia $A = \{a_n : n = 1, 2, 3, ...\}$. Dati $f : \mathbf{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbf{R}$ e $l \in \overline{\mathbf{R}}$, diciamo che $f(x) \underset{(A)x\to x_0}{\longrightarrow} l$ se per ogni intorno V di l esiste U intorno di 0 tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in x_0 + (U \setminus A)$ tale che $x \neq x_0$. Provare che se $f(x) \underset{(A)x\to x_0}{\longrightarrow} l$, $f(x) \underset{(A)x\to x_0}{\longrightarrow} l'$ con $l, l' \in \overline{\mathbf{R}}$, allora $l = l'$. Quindi diremo anche $A - \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ al posto di $f(x) \underset{(A)x\to x_0}{\longrightarrow} l$.

c) Data $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diremo che f è A-derivabile in $x_0 \in \mathbf{R}$ se esiste finito $A - \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Provare che se f è A-derivabile in $x_0 \in \mathbf{R}$, f non è necessariamente continua in x_0.

d) Dire se è vero che se $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua e A-derivabile e dati $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$ e $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $A - \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

2.3) Sia $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2, x \le y \le 1\big\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x e^{2x+3y}\, dx\, dy.$$

2.4) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 2a y'(t) + 4y(t) = e^{at}$, al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2.1) a) Dire per quali numeri reali $a \neq -1$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{100^{\sqrt{n}} + 2^n}{a^n + 1}$.

b) Sia (a_n) una successione con $a_n > 0$ che tende a 0 per n che tende a $+\infty$. Data $s : \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$, definiamo $c_{n,s} = \displaystyle\sum_{k=n}^{n+s(n)} a_k$. Supporremo sempre qui e nei punti successivi di 2.1) che s sia crescente e che $s(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Provare che se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora $c_{n,s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ qualunque sia s come sopra.

c) Provare che se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, allora esiste s come sopra tale che $c_{n,s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

d) Esistono successioni (a_n) come sopra per cui la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{n,s}$ diverge qualunque sia s come sopra?

e) Esistono successioni (a_n) come sopra per cui la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{n,s}$ converge qualunque sia s come sopra?

2.2) a) Risolvere la disequazione $\Big(\ln\big(100e^x - 1\big) - 5\Big)(x-2)(x-7) < 0$.

b) Diciamo che una funzione f ha tipo B se $f :]0,1] \to \mathbf{R}$ e l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ è convergente mentre l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$ è divergente. Determinare una funzione f di tipo B.

c) Provare che se f è di tipo B e continua, allora f assume tutti i valori reali infinite volte.

d) Possiamo dire che se f è continua e di tipo B, allora per ogni numero reale a l'equazione $\sqrt{x}f(x) = a$ ha almeno una soluzione in $]0,1]$?

2.3) a) Sia $A = \big\{(x,y) \in [0,8] \times [0,2] : y^2 + (x-3)^2 \geq 1\big\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x\,dx\,dy.$$

2.4) a) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 6y'(t) + 5y(t) = te^t$.

b) Provare che per ogni $k \in \mathbf{R}$ ha un'unica soluzione locale il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^3 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\big(ny^2(t)\big)}{n!} \\ y(1) = k. \end{cases}$$

Prova dell'esame di cultura. 10/10/2019

2.1) a) Dire per quali $a>0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}\sqrt[3]{n}\sqrt[5]{n}}{(3n+1)^a+1}}$.

b) Sia (a_n) una successione di numeri reali strettamente positivi qui e anche in c) e in d). Provare che se $\displaystyle\sqrt[n]{\sum_{k=n}^{n+38} a_k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l<1$, allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

c) Provare che, se $\sqrt[n]{a_n a_{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l<1$ ed esiste $c>0$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq c$ per ogni n, allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

d) Se $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l>0$, possiamo concludere che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge?

2.2) a) Dire per quali $a\in\mathbf{R}$ l'equazione $e^{3x}x^7=a$ non ha soluzioni reali.

b) Sia f una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Provare che se $f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ allora $\displaystyle\frac{f(2x)-f(x)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

c) Sia f di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e supponiamo che esista $M\in\mathbf{R}$ tale che $f(2x)=f(x)$ per ogni $x>M$. Provare che $f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

d) Se f di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ soddisfa $f(2x)-f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ vale necessariamente $f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$?

2.3) a) Sia $A_s=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\leq 1, -(s+1)(y-1)-1\leq x\leq(1-s)(y-1)+1\big\}$. Poniamo $A:=A_{\frac{1}{2}}$ .Calcolare l'integrale doppio

$$\int\limits_A e^{2x}\,dx\,dy.$$

b) Dire se, data una funzione continua $g:\mathbf{R}^2\to[0,+\infty[$ tale che $g(x,y)\underset{(x,y)\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$, la funzione $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da $u(s)=\displaystyle\int\limits_{A_s} g(x,y)\,dx\,dy$ ha necessariamente un minimo assoluto su $\mathbf{R}$.

2.4) a) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) &= \big(y(t)-3\big)^5\\ y(1) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

b) Provare che l'equazione differenziale $y'(t)=P\big(y(t)\big)$ ove $P(x)=x^{18}-x^3-x$ ha delle soluzioni limitate non costanti.

Prova dell'esame di cultura. 11/07/2019

2.1) a) Dire per quali $a>0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)^a a^n}{7^n+1}$.
b) Sia f una funzione limitata da $\mathbf{R}$ in $]0,+\infty[$ e supponiamo che $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Provare che se $l>0$, allora per ogni numero reale a le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^a f(n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^a f\big(n+\sin(n)\big)$ hanno lo stesso carattere.
c) Se invece $l=0$ succede lo stesso?
d) Provare che se (a_n) e (b_n) sono successioni reali e le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(2a_n+3b_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(4a_n+b_n)$ sono entrambi convergenti, allora le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sono entrambe convergenti.
e) Provare che se x, y e z sono numeri reali positivi mentre w è un numero reale negativo, e le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(xa_n+yb_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(za_n+wb_n)$ sono entrambi convergenti, allora le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sono entrambe convergenti.

2.2) a) Risolvere la disequazione

$$\big(e^{\sqrt[3]{x}}-8\big)\big((3x^2+1)^5-7\big)(x-3)<0.$$

b) Sia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione continua e chiamiamo *peso* di g un numero reale positivo u tale che esiste una successione a_n con $a_n>0$ e $a_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ tale che $\dfrac{g(a_n)}{a_n^u}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Provare che se u_1 e u_2 sono pesi di g, e $u_1<u<u_2$, allora u è un peso di g.
c) Una funzione che ha due pesi distinti può essere crescente?
d) Se 1 è l'estremo superiore dei pesi di g, necessariamente si ha che 1 è un peso di g?

2.3) Sia $A=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\le 1, y\le 1, (x-1)^2+(y-1)^2\le 1\big\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A xy\,dx\,dy.$$

2.4) Sia $\phi(u)=u^5-u$.
a) Provare che per ogni $k\in\mathbf{R}$, il problema di Cauchy $\begin{cases}\phi\big(y'(t)\big)=\phi\big(\frac{y^3(t)+3y(t)}{100}\big)\\ y(0)=k\end{cases}$ ha almeno una soluzione in un opportuno intorno di 0.
b) Determinare un $k\in\mathbf{R}$ tale che se y_1 e y_2 sono soluzioni del problema di Cauchy in a) allora si ha $y_1=y_2$ in un opportuno intorno di 0.

Prova dell'esame di cultura. 10/05/2019

2.1) a) Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(3n+1)^a \tan\big(\frac{n}{n^4+1}\big)\cos\big(\frac{1}{n^2+n}\big)$.
b) Sia f qui e nei punti successivi una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^1. Provare che se $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ allora per ogni successione a_n strettamente crescente tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si ha $\dfrac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1}-a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Vale il viceversa? Ossia supponiamo che per ogni successione a_n strettamente crescente tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si ha $\dfrac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1}-a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Segue che $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?
d) Sia u una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $u(0) = 0$. Se $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si ha necessariamente

$$u\big(f(a_{n+1})-f(a_n)\big)\frac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1}-a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

per ogni successione a_n strettamente crescente tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?
e) Stessa domanda che in d) supponendo inoltre che la successione $a_{n+1}-a_n$ sia limitata.

2.2) a) Risolvere la disequazione

$$(e^{3x}-2)\big(\sqrt{1000-x}-\sqrt{2x-1000}\big)(x-7) < 0.$$

b) Sia v una funzione da $[0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ derivabile tale che $v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e sia w la funzione da $[0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ definita da $w(x) = \sin\big(v(x)\big)$. Provare che esiste una funzione h della forma $h(x) = b(x-a)^2$ con $b > 0$ e $a > 0$ tale che $h(x) \geq w(x)$ per ogni $x \geq 0$.
c) Esiste v tale che in b) possiamo prendere a tale che $w(a) = 0$?

2.3) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A |xy|\,dx\,dy$ ove
$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2|x| \leq 2+|y|, 2|y| \leq 2+|x|\big\}$.

2.4) a) Dire quante soluzioni ha il problema di Cauchy $\begin{cases} \sin\big(y'(t)\big) = \sin\Big(\frac{e^{y^2(t)}}{y(t)}\Big) \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ in un opportune intorno di 0.
b) Tovare almeno una delle soluzioni del problema di Cauchy in a).

2.1) a) Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan\big(\sin^4(n^2)+1\big)(n^a+1)}{n^{24}+n+1}$.

b) Diciamo che una successione (a_n) di numeri reali è S-forte se, quando f è una funzione Lipschitziana da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Provare che la successione (n) non è S-forte.

c) Provare che se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora (a_n) è S-forte.

d) Vale il viceversa di c)?

e) Esiste una successione (a_n) di numeri reali tale che quando f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

2.2) a) Risolvere la disequazione $\dfrac{(e^{7x}-2)\big(|x+1|+x^2-7\big)}{x-3} \leq 0$.

b) Diciamo che $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ è di tipo A se g è continua e strettamente positiva e inoltre $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ è divergente. Sia $g_b(t) = \dfrac{1+t^{b^6+1}}{t^{15}+2+\cos(t)}$. Dire per quali $b \in \mathbf{R}$ g_b è di tipo A.

c) Sia g di tipo A. Provare che la funzione G definita da $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ è biiettiva da $[0, +\infty[$ in sé.

d) Esiste g di tipo A tale che la successione c_n definita da $c_n = \displaystyle\int_{2^n}^{2^{n+1}} g(t)\,dt$ tende a 0 per $n \to +\infty$?

e) È vero che se g è di tipo A, allora esiste h di tipo A tale che $h(x) \geq g(x)$ per ogni $x \geq 0$ e inoltre h è decrescente?

2.3) Sia $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, \frac{x}{10} \leq y \leq 6 - \frac{x}{10}\big\}$. Sia $u(x, y) = 20xy - x - 2y$. Determinare, se esistono, $\displaystyle\min_{(x,y)\in A} u(x, y)$ e $\displaystyle\max_{(x,y)\in A} u(x, y)$.

2.4) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(t) - 12y'(t) = \cos(t) - 27y(t)$.

Prova dell'esame di cultura. 03/12/2018

2.1) a) Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^8\big(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\big)}{n^{a^2} + n^{2a}}$.
b) Siano a_n e b_n due successioni reali limitate tali che $b_n > a_n$ per ogni n. Provare che se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n)$ converge, allora anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n^2 - a_n^2)$ converge.
c) Se togliamo l'ipotesi che a_n e b_n sono limitate, vale la tesi di b)?
d) Se $a_n = \frac{1}{n}$ e in b) togliamo l'ipotesi $b_n > a_n$, vale ancora la tesi di b)?

2.2)
a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $u(x) = \big(|3x-1| - 2x\big)e^{x^2}$.
b) Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ continua, tale che

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

e tale che esiste un valore $a \in \mathbf{R}$ tale che l'equazione $f(x) = a$ ha esattamente 4 soluzioni. Quanti punti di estremo relativo ha almeno f in $]0, +\infty[$?
c) Se f è come in b), e $g :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ è uniformemente continua, i limiti di $f + g$ in 0^+ e in $+\infty$ sono determinati ad queste informazioni
d) Se f e g soddisfano b) e c), e inoltre f non è uniformemente continua in $]1, +\infty[$ posso dedurre che $f(x) + g(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$?
e) Date f e g che soddisfano b) e c), esistono sempre $\lambda > 0$ e $b \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione $f(x) + \lambda g(x) = b$ ha almeno 4 soluzioni?

2.3) a) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A x\,dx\,dy$ ove
$A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 5 - (x^2 - 2)^4\big\}$.
b) Provare che per ogni $b \in \mathbf{R}$ esiste $d > 0$ tale che il grafico della funzione h definita da $h(x) = d(x + b)^2$ interseca A.

2.4) Rsolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = e^{2t}$.

Prova dell'esame di cultura. 10/10/2018

2.1) a) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ k intero positivo converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha} n!}{(n+k)! + 3^n}$.

b) Sia data una successione a_n di numeri reali, e sia u_n una successione di interi positivi strettamente crescente. Definiamo $b_n = \displaystyle\sum_{k=u_n}^{u_{n+1}-1} a_k$. Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

c) Provare che se la successione delle somme parziali di a_n è limitata, allora si può trovare u_n in modo tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

d) Supponiamo inoltre $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Può succedere che per ogni $x \in [0,1]$ esiste u_n tale che la successione $u_{n+1} - u_n$ è limitata e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = x$?

2.2) Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $g(x) > 0$ se $2 < x < 7$, $g(x) < 0$ se $x \in]-\infty, 2[\cup]7, +\infty[$. Risolvere la disequazione $\dfrac{(x-3)\big(\ln(x+17) - 2\big)}{g(x)} \leq 0$.

b) Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Diremo che u è *pseudoperiodica* se per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ tale che $u(x+n) = u(x)$. In tal caso definiamo $per_u(x)$ il più piccolo n con tale proprietà. Trovare una funzione che è pseudoperiodica ma non periodica.

c) Esiste u pseudoperiodica, tale che $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

d) Provare che se u è pseudoperiodica, per_u è periodica di periodo 1, e l'insieme $\{per_u(x) : x \in \mathbf{R}\}$ è limitato, allora u è periodica.

e) Provare che se u è pseudoperiodica e derivabile e inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ non è vero che $per_u(y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} +\infty$, allora anche u' è pseudoperiodica.

2.3) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_{A_6} xy \, dx \, dy$ ove

$A_b = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq x^2, y \leq (x-b)^2\big\}$.

Dire inoltre se tutti gli insiemi A_b con $b > 0$ sono limitati.

2.4) Risolvere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = y^2(t) + 6y(t) + 9 \\ y(0) = k \end{cases}$.

2.1) a) Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $2 \leq u(x) \leq 4$. Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(u(n) + \sin(n)\big) n^a}{(n^2+n)^{3e} \sin\left(\frac{1}{n}\right)}$.

b) Diciamo che una successione (a_n) di numeri reali è curiosa se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n - \frac{1}{n}\big)$ converge. Provare che se (a_n) e (b_n) sono curiose allora $\big(\dfrac{a_n + b_n}{2}\big)$ è curiosa.

c) Provare che se (a_n) è curiosa e g è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^∞ tale che $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, allora $\big(a_n g\big(\frac{1}{n}\big)\big)$ è curiosa.

d) Se (a_n) e (b_n) sono strettamente positive e curiose è vero che $\dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$?

2.2) a) Determinare i numeri reali x tali che $\big((x^3-2)^4 - 3\big)\big(|\ln(x+15)| - 7\big) < 0$.

b) Diciamo che una funzione f da un intervallo I a valori in $\mathbf{R}$ soddisfa TVI se per ogni $a, b \in I$ con $a < b$ e $y \in \mathbf{R}$ tale che $\min\{f(a), f(b)\} < y < \max\{f(a), f(b)\}$ esiste c con $a < c < b$ tale che $f(c) = y$. Determinare una funzione discontinua da un intervallo I in $\mathbf{R}$ che soddisfa TVI.

c) Provare che se f da un intervallo I a valori reali soddisfa TVI ed è crescente allora è continua.

d) Se f e g da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ soddisfano TVI, è vero che $f \circ g$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ soddisfa TVI?

e) Provare che se $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ soddisfa TVI allora per ogni $c \in]a,b[$ esiste $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$ con $c_n \neq c$ per ogni n tale che $f(c_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$.

2.3) a) Sia $A = [0,3] \times [0,3] \setminus \big([1,2] \times [1,2]\big)$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A xy\, dx\, dy$.

b) Determinare $f_n : A \to \mathbf{R}$ continue e $\bar{f} : A \to \mathbf{R}$, discontinua in $(3,3)$ tale che $f_n(x,y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{f}(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$.

2.4) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 6y'(t) + ay(t) = e^{at}$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

Prova dell'esame di cultura. 08/05/2018

2.1) a) Sia a_n una successione di numeri reali tale che $a_1 = 1$, $a_{n+1} = na_n$. Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{7^n + (n^2+1)^e}.$$

b) Sia data, per $r > 0$, una successione $a(r)_n$ con questa proprietà:

$$a(r)_1 = r, \quad a(r)_{n+1} = n\big(a(r)_n\big)^3, \quad \text{se } n \geq 1.$$

Determinare $r > 0$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a(r)_n$ diverge.
c) Provare che se esiste $n \geq 1$ tale che $a(r)_n < \frac{1}{n+1}$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a(r)_n$ converge.
d) Provare che l'insieme $\big\{r > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} a(r)_n \text{ diverge } \big\}$ ha un minimo.

2.2) a) Sia f una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che

$$f'(x) = \big(|2x-3| - 5\big)(e^{2x} - 7)\big(\ln(x+100) - 2\big).$$

Determinare gli intervalli di decrescenza di f.
b) Sia data una funzione continua g da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e diciamo che g è H-finita se per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'insieme

$$H_a(g) := \big\{x \in \mathbf{R} : g(x) = a\big\}$$

è finito (eventualmente vuoto), e chiamiamo $n_a(g)$ il numero di elementi di $H_a(g)$. Determinare, per ogni intero positivo n, una funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ H-finita tale che $\max\limits_{a \in \mathbf{R}} n_a(g) = n$.
c) Provare che se g è H-finita e di classe C^1 e per qualche $\bar{a} \in \mathbf{R}$ $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in H_{\bar{a}}(g)$ e inoltre $g(x)$ non tende a $\bar{a}$ né per $x \to +\infty$ né per $x \to -\infty$, allora $a \mapsto n_a(g)$ è localmente costante in $\bar{a}$.
d) Provare che se g è H-finita e $\bar{x}$ non è un punto di estremo relativo per g, allora esiste $\delta > 0$ tale che se x_1 e x_2 sono tali che $\bar{x} - \delta < x_1 < \bar{x} < x_2 < \bar{x} + \delta$ si ha
$\big(g(x_1) - g(x)\big)\big(g(x_2) - g(x)\big) < 0$.

2.3) a) Sia $A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 1, 1 - x^2 \leq y \leq 1\big\}$.
Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A xe^y \, dx \, dy.$$

b) Sia $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $u(x,y) = (x^4 + xy, y^4 + xy)$. Provare che u è invertibile localmente in $(1,1)$ ma non in $(0,0)$.

2.4) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) + ay'(t) + 3y(t) = e^t$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

Prova dell'esame di cultura. 01/03/2018

2.1) a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{na}}{n^2 2^n + n^{1000} + \pi}$ converge.
b) Diciamo che f ha la proprietà T se esiste $B \in \mathbf{R}$ tale che f è una funzione da $[B, +\infty[$ in $\mathbf{R}$ continua, strettamente positiva, e inoltre $f(x) \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$.
Provare che se f ha la proprietà T, allora esiste una successione a_n tale che $a_n \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge.
c) Provare che se f ha la proprietà T e (a_n) è una successione strettamente crescente, $a_n \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$, e inoltre la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge, allora esiste una successione (b_n) tale che $a_n < b_n < a_{n+1}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ converge.
d) Se f e (a_n) sono come in c), possiamo concludere che $\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ converge *comunque presa una successione* (b_n) tale che $a_n < b_n < a_{n+1}$?
e) Esiste f che ha la proprietà T tale che esiste $B' \in \mathbf{R}$ e per ogni successione (a_n) con $a_n > B'$, a_n strettamente crescente, $a_n \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge?

2.2) a) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $g'(x) = (\sqrt[5]{x} - 3)(4^{3x+1} - 5)(|2x+1| - 3)$. Determinare gli intervalli ove g è decrescente.
b) Provare ches se g è come in a) allora esiste $x > 0$ tale che $g(x) > x$.
c) Sia u una funzione continua, strettamente crescente da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Sia v la funzione definita da $v = \sin \circ u$. Provare che la funzione v assume tutti valori in $[0, 1]$ un numero infinito, ma numerabile di volte.
d) Una funzione v definita come in c) può essere integrabile in senso improprio su $\mathbf{R}$?

2.3) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, e^x - 2 \leq y \leq e^{\frac{x}{2}}\}$. Calcolare l'area di A.

2.4) a) Risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = u\left(e^{5y(t)}\right)(t^2 - 1)$ quando u è la funzione identica ossia $u(x) = x$.
b) Provare che se u è la funzione definita da $u(x) = (x-7)(x-8)$ allora la precedente equazione differenziale ha soluzioni globali non costanti.

2.1) (punti 8) a) Dire per quali numeri reali x la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(x)(x^2+1)^n - 4}{5^n\ \sqrt{n}(n+1)^{\frac{\pi}{4}}}$ converge.
b) Diciamo che una successione (a_n), $n = 1, 2, 3, ...$, di numeri reali ha la proprietà S se $a_n > 0$ per ogni $n = 1, 2, 3, ...$ e inoltre $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^u$ converge per ogni $u > 0$. Determinare una successione con la proprietà S.
c) Provare che se (a_n) e (b_n) hanno la proprietà S, allora $(a_n + b_n)$ ha la proprietà S.
d) Esiste una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^∞ tale che la successione $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ha la proprietà S?

2.2) (punti 10) a) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza della funzione u definita da $u(x) := (x^2-1)^5 - (x^2-1)^3$.
b) Provare che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non è derivabile in 0 e $f(0) = 0$ e f Lipschitziana, allora esistono due successioni (a_n) e (b_n) di numeri reali diversi da 0 tali che $\frac{f(a_n)}{a_n} - \frac{f(b_n)}{b_n}$ non tende a 0 per n che tende a $+\infty$.
c) Trovare una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua tale che f è derivabile in $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ e non è derivabile in alcun punto di $\mathbf{Z}$.
d) Trovare una funzione come in c) con l'ulteriore proprietà che è strettamente crescente.
e) Esiste una funzione continua e strettamente crescente da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che è derivabile in x se e solo se x non è un punto della forma $\frac{1}{n}$, n intero positivo?

2.3) (punti 4) a) Sia $A_b = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y \geq bx^2\}$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_{A_b} e^x\, dx\, dy$ al variare di $b > 0$.
b) Sia $C_d = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x, y = \arctan(x), y \leq d\}$, con $d > 0$. Dire per quali $d > 0$ esiste una funzione continua da C_d in $\mathbf{R}$ che assume tutti i valori reali.

2.4) (punti 2) Determinare, al variare di $b \in \mathbf{R}$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) + by'(t) + 5by(t) = 0.$$

2.1) a) Sia (a_n) una successione di numeri reali tale che $a_n > 0$ e $a_{n+1} = (n^2+1)a_n$. Dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{2^n}+1}$.
b) Provare che se (a_n) è una successione tale che a_n *non* tende a 0 per $n \to \infty$, allora esiste una sottosuccesione $(a_{\sigma(n)})$ di (a_n) e un numero $\delta > 0$ tale che $|a_{\sigma(n)}| > \delta$ per ogni n intero positivo.
c) Provare che se (a_n) è una successione tale che a_n *non* tende a 0 per $n \to \infty$, ma tale che ogni sottosuccessione di (a_n) convergente tende a 0 per $n \to +\infty$, allora la successione (a_n) è illimitata.
d) Provare che se (a_n) è una successione ed esistono $H > 0$ e s intero positivo tale che $|a_{n+ks} - a_n| \le H$ per tutti i numeri interi non negativi n e k, allora la successione (a_n) è limitata.
e) Supponiamo data una successione (a_n) con questa proprietà: esistono due interi positivi s ed r primi tra loro ed una successione (b_n) tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge e inoltre

$$|a_{n+ks} - a_n| \le b_n, \quad |a_{n+kr} - a_n| \le b_n \quad \forall\, n, k = 1, 2, 3, ...$$

Possiamo dedurre che la successione (a_n) converge?

2.2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza della funzione u_n definita da $u_n(x) := x(3x-1)^n$ al variare di n intero positivo.
b) Provare che se una funzione continua $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ soddisfa $f(x+1, y) = f(x, y+1) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, allora f è limitata.
c) Sia data una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e limitata. Poniamo $\phi(x) := \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.
Provare che se la successione $\phi(n)$ tende a $l \in \mathbf{R}$ per $n \to \infty$, allora $\phi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$.
d) Sia f una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che, per qualche $T > 0$ si ha

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_b^{b+T} f(x)\, dx$$

per ogni copia di numeri reali a e b. Provare che f è periodica di periodo T.

2.3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, y^2 \ge x^2\}$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A |x||y|\, dx\, dy$.
b) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1, y = x\}$. Calcolare, al variare di $a > 0$, la minima distanza di un punto di B dal punto $(a, 0)$.

2.4) Determinare, al variare di $b \in \mathbf{R}$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 3y'(t) + (b+1)y(t) = 0.$$

2.1) a) Dire per quali numeri reali x la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,10^n}\Big(\frac{3^{2x^2}-4}{2-3^{x^2}}\Big)^n$ converge.
b) Provare che se u è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua, periodica di periodo 1 e non costante, allora esiste un intero positivo k tale che la successione a_n definita da $a_n = u\big(\frac{n}{k}\big)$ non ha limite per $n \to +\infty$.
c) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1 e tale che $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in]0, +\infty[$. Provare che se $1 < c < d$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(c^n)}{f(d^n)}$ converge.
d) Vale la tesi di c) se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è di classe C^1 e $f'(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$?

2.2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione β definita da $\beta(x) = x\sqrt{7-(3x+1)^2}$.
b) Diciamo che una funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è superconvessa se g è di classe C^2 e $g''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Provare che se g è superconvessa ed esistono numeri reali a e $\bar{x}$ tale che $g(\bar{x}) = \bar{x} + a$, e $g'(\bar{x}) = 1$, allora $g(x) > x + a$ per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{\bar{x}\}$.
c) Provare che se g è superconvessa e $g'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $g'(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, allora esistono a e $\bar{x}$ come in b).
d) Se g è superconvessa, esistono necessariamente a e $\bar{x}$ come in b)?

2.3) a) Sia $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, 1 - x^2 \leq y \leq 0\big\}$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A |x|y\,dx\,dy$.
b) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 8\}$. Provare che una funzione che ha derivate parziali continue e limitate su B è limitata su B.
c) Vale la tesi di b) se poniamo invece $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{77}{10} < x^2 + y^2 < 8\}$?

2.4) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) + (5 - d)y'(t) + d^2y(t) = 0$, al variare di $d \in \mathbf{R}$.

2.1) (punti 7) a) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^3}}{3^{n^2}(2n)!+n}$ converge.

b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{3^{n^a}}{(2n)!+n}$ converge.

c) Diciamo che una successione (a_n) tende a $l \in \mathbf{R}$ in modo esponenziale se esistono $\lambda \in]0,1[$ e ν tali che $|a_n - l| < \lambda^n$ per ogni $n > \nu$.
Provare che se (a_n), $n = 1, 2, 3...$, è una successione tale che, posto $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, s_n tende a $l \in \mathbf{R}$ in modo esponenziale, allora a_n tende a 0 in modo esponenziale.

2.2) (punti 8.5) a) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che

$$f'(x) = \big(3(2x-1)^6 - 2\big)(x-1)\big(e^{|2x+1|-3} - 10^7\big),$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$. Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza di f.
b) Diciamo che una funzione $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ha la proprietà S se esistono due funzioni continue v e w da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che v è periodica di periodo 1 e non costante, $\int_0^1 v = 0$, $w(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $u = vw$.
Provare che se u ha la proprietà S, allora esiste un numero reale $\bar{x}$ tale che $u(\bar{x}+n) = 0$ per ogni n intero positivo.
c) Provare che se u ha la proprietà S, allora non esiste il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)$.
d) Esiste una funzione u con la proprietà S, che si annulla in esattamente un punto dell'intervallo $]0,1[$ e tale che $\int_n^{n+1} u = 0$ per ogni n intero positivo?

2.3) (punti 5) a) Sia $A = \big\{(x,y) \in [-1,1] \times [0,5] : y \geq e^x - \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}\big\}$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_C y\,dx\,dy$.
b) Sia $C_a = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, ax \leq y \leq \ln(e^x + 7)\big\}$. Dire per quali $a > 0$ la funzione β_a definita da $\beta_a(x,y) = y - ax$ ha massimo assoluto su C_a.

2.4) (punti 3.5) Risolvere l'equazione differenziale $(y'y)' = (y'y)^2$. Si consiglia di porre $z = y'y$.

2.1) (punti 8.5) a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^n+1)^2}{n^{2n-a}(n^a+2)^a}$ converge.

b) Sia c_n una successione di numeri reali positivi tale che $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ma la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ diverge. Provare che per ogni $M \in \mathbf{R}$ esiste $A \subseteq \mathbf{N} \setminus \{0\}$, A finito, tale che $\sum_{n\in A} c_n > M$.

c) Sotto l'ipotesi di b), provare che l'insieme dei numeri reali positivi ottenuti come $\sum_{n\in A} c_n$ al variare di $A \subseteq \mathbf{N} \setminus \{0\}$, A finito, è denso in $]0,+\infty[$.

d) Dire se esiste una successione $d_n > 0$ tale che, posto

$$S(B) = \sup\Big\{ \sum_{n\in A} d_n,\ A \text{ finito } A \subseteq B \Big\},$$

l'applicazione $B \mapsto S(B)$ dall'insieme delle parti di $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ in $\mathbf{R}$ è biiettiva a valori in un intervallo di $\mathbf{R}$.

2.2) (punti 8.5) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione α definita da $\alpha(x) = e^{-2x}(x^3 - x^2)^6$.

b) Diciamo che f è una funzione di tipo W se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che assume 1 come valore massimo su $\mathbf{R}$ e -1 come valore minimo su $\mathbf{R}$ e definiamo

$$L_f := \Big\{ l \in \mathbf{R} : \exists\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, x_{n+1} \geq x_n, x_{n+1} - x_n \text{ limitata}, f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \Big\}.$$

Provare che se f è di tipo W e periodica (di periodo positivo), allora $L_f = [-1,1]$.

c) Provare che se f è di tipo W, allora L_f è un intervallo (ossia se $l_1 < l < l_2$ e $l_1, l_2 \in L_f$ allora $l \in L_f$).

d) Esiste una funzione f di tipo W tale che L_f è l'insieme vuoto?

2.3) (punti 4.5)

a) Sia $B = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq y \leq 2x\big\}$, sia $C = \big\{(x,y) \in B : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\big\}$. calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_C x^2 + y^2 \, dx\, dy$.

b) Determinare una funzione continua g da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che $g|_B(x,y) \underset{(x,y)\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ma NON VALE $g|_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y) \underset{(x,y)\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ricordo che $u(x,y) \underset{(x,y)\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ significa

$$\forall\, M \in \mathbf{R}\ \exists\, K > 0 : u(x,y) > M\ \forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 : ||(x,y)|| > K.$$

2.4) (punti 2.5) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(t) = e^{2t}(4y(t)+1)^6.$$

Prova dell'esame di cultura. 10/10/2016

2.1) (punti 12) a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{a^2}}{n\big(n^3+n+1\big)^a}$ converge.
b) Sia f_n una successione di funzioni continue da $[0,2]$ in $\mathbf{R}$, e sia f una funzione da $[0,2]$ in $\mathbf{R}$. Provare che se per ogni $\bar{x} \in [0,2]$ esiste $\delta > 0$ tale che $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, uniformemente in $[0,2] \cap]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$, allora $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, uniformemente in $[0,2]$.
c) Si può dedurre che $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, uniformemente in $[0,2]$ sapendo solo che per ogni $\bar{x} \in [0,2[$ esiste $\delta > 0$ tale che $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, uniformemente in $[0,2] \cap [\bar{x}, \bar{x}+\delta[$ e che esiste $\eta > 0$ tale che $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$, uniformemente in $[2-\eta, 2]$?
d) Sia f_n una successione di funzioni continue da $[0,2]$ in $\mathbf{R}$, e sia f una funzione da $[0,2]$ in $\mathbf{R}$. Supponiamo che valga la seguente proprietà:
Se $x_n \in [0,2]$ e $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$, allora $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\bar{x})$. Provare che allora se $x_n \in [0,2]$ e $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$, si ha $f_n(x_n) - f_n(\bar{x}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
e)Provare che sotto l'ipotesi di d)

$$\forall\, \bar{x} \in [0,2]\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \bar{n}, \exists \delta > 0 : \Big(|x-\bar{x}| < \delta,\ n > \bar{n}\Big) \Rightarrow \big|f_n(x) - f_n(\bar{x})\big| < \varepsilon$$

e) Se vale l'ipotesi di d) possiamo dedurre che $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente?

2.2) (punti 7) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione α definita da $\alpha(x) = |x^2-2| + \ln(20-x^2)$.
b) Sia v una funzione di classe C^∞ e periodica di periodo 1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $v(0)=0$, $v \geq 0$ e v non costante. Provare che esiste un numero intero positivo n ed esistono $x, x' \in]0,1]$ tali che $v(nx) < x$, $v(nx') > x'$.
c) Dedurre che esiste un numero intero positivo n tale che l'equazione $v(nx) = x$ ha almeno una soluzione in $]0,1]$.
d) Detto k_n il numero delle soluzioni dell'equazione $v(nx) = x$ in $]0,1]$, provare che $k_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2.3) (punti 3) Sia $B = [2,3] \times [1,+\infty[$. Sia $A_b = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 5 - b|x|\}$. Calcolare, al variare di $b > 0$ l'integrale doppio $\displaystyle\int_{B\cap A_b} y\,dx\,dy$.

2.4) (punti 2) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - ay'(t) + 7y(t) = 0$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2.1) (punti 8) a) Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\sin(n)+1\big)a^n}{5^n+n}$.
b) Data una successione (a_n) con $a_n > 0$, provare che a_n tende a un numero reale strettamente positivo se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbf{N} : 1-\varepsilon < \frac{a_n}{a_m} < 1+\varepsilon \; \forall n > \nu, m > \nu.$$

c) Diciamo che una serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ è superconvergente se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che se $\nu < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, allora $\left|\displaystyle\sum_{s=1}^{k} a_{n_s}\right| < \varepsilon$. Provare che una serie assolutamente convergente è superconvergente.
d) Ogni serie superconvergente è assolutamente convergente?

2.2) (punti 10) a) Sia $g(x) = 9^x - |3^x - 10|$. Dire in che intervalli g è decrescente.
b) Provare che per ogni $a > 0$ e per ogni funzione u continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ esistono infinite funzioni f da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili tali che la funzione g definita da $g(x) = f(x)e^{ax}$ ha derivata g' tale che $g'(x) = u(x)e^{ax}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
c) Diciamo che una funzione f da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ è 0-*oscillante* se è continua e inoltre per ogni $A > 0$ esistono $x_1 > A$ e $x_2 > A$ tali che $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$. Provare che se f è 0-oscillante allora si annulla in infiniti punti.
d) Provare che se per qualche $a > 0$ la funzione w_a definita da $w_a(x) = f(x) - ax$ è 0-oscillante e Lipschitziana, allora f non è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty[$.
e) Se f è solo continua (non necessariamente Lipschitziana), e per ogni $a \in \mathbf{R}$ la funzione w_a definita in d) è 0-oscillante, possiamo concludere che f non è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty[$?

2.3) (punti 4) a) Sia $A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x, x \le 2y \le 6\big\}$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A x \, dx \, dy$.
b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ l'insieme $\big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : xy \ge 1, x > 0, y + ax \le 100\big\}$ è limitato.

2.4) (punti 2) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) = 3y'(t) - 2y(t) + 8e^{6t}$.

Prova dell'esame di cultura. 11/07/2016

2.1) (punti 8) a) Sia u una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\frac{1}{2} < u(x) < 5$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u(n^2)n^2}{n^a + 1}$.
b) Provare che se a_n è una successione densa in $\mathbf{R}$, allora esiste una sottosuccessione a_{n_k} tale che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n_k}$ converge.
c) Sia data una funzione w da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Diciamo che w è *chiusa* se

$$\Big(x_n, x, y \in \mathbf{R},\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x, w(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y\Big) \Rightarrow w(x) = y.$$

Provare che se w è continua allora è chiusa, ma non vale il viceversa.
d) Se w è limitata, possiamo concludere che se w è chiusa, allora w è continua?

2.2) (punti 9) a) Sia $g(x) = (x^2 - x)^7 - 3(x^2 - x)^4$. Dire in che intervalli g è decrescente.
b) Sia f una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua e che non è costante su nessun intervallo aperto non vuoto. Sia $Bis(f) = \{y \in \mathbf{R} : \exists\, x_1, x_2 \in \mathbf{R} : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2) = y\}$.
Provare che se $f(x) = x + 2\sin(x)$, allora $0 \notin Bis(f)$ ma esistono $y_1 < 0 < y_2$ tali che $y_1, y_2 \in Bis(f)$.
c) Provare che nella situazione di b) se $y \in Bis(f)$ allora $Bis(f)$ contiene un intervallo della forma $]y_0, y[$ con $y_0 < y$ o un intervallo della forma $]y, y_0[$ con $y_0 > y$.
d) Nella situazione di b) possiamo dire che se $Bis(f)$ è denso in $\mathbf{R}$ allora $Bis(f) = \mathbf{R}$?

2.3) (punti 4.5) Sia $A_b = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x-2)^2 \leq y \leq x^b, x \geq 0\big\}$.
a) Calcolare l'area di A_1.
b) Dire per quali $b > 0$ A_b è limitato.

2.4) (punti 2.5) Risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = t^3 e^{-2y(t)}$.

Prova dell'esame di cultura. 08/03/2016

2.1) (punti 8) Diciamo che una successione (a_n), $n = 1, 2, 3, ...$ è di tipo $(Q(d))$ se $|a_n| \leq \frac{1}{n^d}$ per ogni $n = 1, 2, 3, ...$

a) Provare che se esiste $d > 0$ tale che se (a_n) è di tipo $(Q(d))$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Provare che se P è un polinomio tale che $P(0) = 0$, e

se esiste $d > 0$ tale che se $P(a_n)$ è di tipo $(Q(d))$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge,

allora $P(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$.

c) Se P è un polinomio tale che $P(0) = 0$ e $P(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$, posso concludere che esiste $d > 0$ tale che se $P(a_n)$ è di tipo $(Q(d))$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge?

d) Che cosa succede se in c) P è rimpiazzato da $\tilde{P}$ ove $\tilde{P} = T \cdot P$? Si intende che qui P è un polinomio tale che $P(0) = 0$ e $P(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$, mentre T è una funzione della forma $T(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, e T non si annulla mai.

2.2) (punti 8) a) Studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione v definita da $v(x) = \big|x^3 - |x^2 - 3x|\big|$.

b) Diciamo che una funzione f da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ è strettamente crescente in $\bar{x}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) < f(\bar{x})$ per ogni $x \in]\bar{x} - \delta, \bar{x}[$, e $f(x) > f(\bar{x})$ per ogni $x \in]\bar{x}, \bar{x} + \delta[$; diciamo che f è strettamente decrescente in $\bar{x}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > f(\bar{x})$ per ogni $x \in]\bar{x} - \delta, \bar{x}[$, e $f(x) < f(\bar{x})$ per ogni $x \in]\bar{x}, \bar{x} + \delta[$. Diciamo che f è strettamente monotona in $\bar{x}$ se f è o strettamente crescente in $\bar{x}$ o strettamente decrescente in $\bar{x}$. Provare che una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, strettamente crescente in tutti i punti, è strettamente crescente in $\mathbf{R}$.

c) Provare che se P è un polinomio, allora per ogni $\bar{x} \in \mathbf{R}$, o $\bar{x}$ è un estremo relativo di P, oppure P è strettamente monotona in $\bar{x}$.

d) La tesi di c) è vera se P invece che essere un polinomio è una funzione C^∞?

2.3) (punti 6) a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A y\,dx\,dy$, ove

$A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x, y) \in [-2, 2] \times [0, 4] : y \geq x\big\}$.

b) Calcolare l'integrale doppio $\int_{B_a} y\,dx\,dy$, ove

$B_a = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x, y) \in [-2, 2] \times [0, 4] : y \geq 1 - ax^2\big\}$, al variare di $a > 0$.

c) Provare che se $\overline{B_1(v)}$ denota la palla chiusa in $\mathbf{R}^2$ di centro v e raggio 1, e $||v_n|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, allora esiste una funzione continua e limitata u da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che la successione $\int_{\overline{B_1(v_n)}} u(x, y)\,dx\,dy$ non ha limite, per $n \to +\infty$.

2.4) (punti 2) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 12y'(t) + 8y(t) = t^2$.

Prova dell'esame di cultura. 04/12/2015

2.1) (punti 8)
Sia a_n una successione di numeri reali positivi (definita per $n = 1, 2, 3, ...$) tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Sia $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
a) Sia $a_n = \frac{1}{n}$. Per ogni m intero positivo sia $k(m)$ tale che $s_{k(m)-1} \leq m < s_{k(m)}$. Perché tale $k(m)$ esiste?
b) Sia $a_n = \frac{1}{n}$ e usiamo le notazioni di a). Provare che $s_{k(m)} - m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Sia $a_n = \frac{1}{n}$ e usiamo le notazioni di a). La serie $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(s_{k(m)} - m\big)$ è convergente?
d) Se facciamo la stessa costruzione che in a) per una qualunque successione a_n di numeri reali positivi (definita per $n = 1, 2, 3, ...$), tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e per cui esiste $k(m)$ come in a), il risultato di c) viene sempre lo stesso?

2.2) (punti 8) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = |\ln(x + x^2)| + 3x$.
b) Sia C il dominio della f definita in a), e sia $C' = C \cap]0, 13[$. Dire se esiste g di classe C^1 in $\mathbf{R}$ tale che $f + g$ è limitata in C'.
c) Dire se esiste g di classe C^1 in $\mathbf{R}$ tale che $g(x) > 0$ per ogni $x \in C'$, e $f \cdot g$ è limitata in C'.
d) Sia v una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua e periodica, e sia $w = v \circ f$, ove f è definita come in a). Dire se è sempre vero che, per ogni numero reale b l'equazione $w(x) = b$ o non ha soluzioni in C' o ha infinite soluzioni in C'.

2.3) (punti 6)
a) Determinare l'area dell'insieme A definito da $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \sqrt[4]{|x|}, |y| \leq 3\big\}$.
b) Sia $B = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \leq \sqrt[4]{x}\big\}$. Provare che per ogni $a > 0$, l'insieme $\big\{(x, y) \in B : y \geq ax\big\}$ è compatto.
c) Provare che se β è una funzione continua e periodica da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, allora l'insieme $\big\{(x, y) \in B : y \geq \beta(x)\big\}$ o è vuoto o non è compatto.

2.4) (punti 2) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 10y'(t) = 11y(t) + 1$.

Prova dell'esame di cultura. 12/10/2015

2.1) punti 6) a) Provare che se (a_n) è una successione limitata allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$ converge

b) Provare che se abbiamo una successione (a_n) tale che $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge.

c) Sotto l'ipotesi b), possiamo dire che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge?

2.2) (punti 8)
Sia g una funzione periodica continua non costante da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$.
a) Provare che se g è periodica di periodo 3 e g_2 è una funzione periodica di periodo 4, allora la funzione g_3 definita da $g_3(x) = g(x)g_2(x)$ è periodica.
b) Provare che se g è di classe C^1 e $g(0) = 0$, allora esiste $a > 0$ tale che l'equazione $g(x) = ax$ non è mai verificata per $x > 0$.
c) Provare che se h è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\frac{h(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $g(x) = \sin(x)$, allora la funzione $g \circ h$ non è periodica.
d) La tesi di c) rimane vera se g è una qualunque funzione periodica continua non costante da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$?

2.3) (punti 8) a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A xy\,dx\,dy$, ove
$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0, 1-x \leq y \leq 1 - \frac{1}{2}x\big\}$.
b) Sia $A_n = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0, 1-2^{n+1}x \leq y \leq 1-2^n x\big\}$. Dire se ogni A_n è compatto.
c) Provare che l'insieme $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è limitato.
d) Se α è una funzione continua da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$, allora è vero che $\int_{A_n} \alpha(x,y)\,dx\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

2.4) punti 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \Big(y''(t) - 12y'(t) + 20y(t)\Big)^2 = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$.

2.1) (punti 8)

a) Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a (3a)^n}{(a+2)^n + n}$ converge.

b) Provare che per una successione (a_n) non vale l'implicazione $a_{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow a_{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Provare che se α e β sono interi positivi l'implicazione $a_{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow a_{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ vale se e solo se β è un multiplo intero di α.

d) Sia $E = \{(a_n) : \exists \alpha \in \mathbf{N} \setminus \{0\} : a_{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Provare che se $(a_n) \in E$, $(b_n) \in E$, allora $(a_n + b_n) \in E$.

2.2) (punti 9) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza in $\mathbf{R}$ della funzione f definita da $f(x) = |x^2 - 1|e^{-x}$.

b) Diciamo che una funzione $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ è di tipo (U) se g è di classe $C^{(1)}$, e inoltre

i) $g'(x) < 0$ se $x \in]2n, 2n+1[$, $g'(x) > 0$ se $x \in]2n+1, 2n+2[$ per ogni $n \in \mathbf{N} (= \{0, 1, 2, ...\})$,

ii) Posto $b_n = |g(n+1) - g(n)|$, per ogni $n \in \mathbf{N}$, la successione b_n è decrescente.

Provare che se g è di tipo (U), allora per ogni $x \in [0, +\infty[$ si ha $g(x) \in [g(1), g(0)]$.

c) Provare che se g \`di tipo (U) allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che l'equazione $g(x) = c$ ha infinite soluzioni.

d) Provare che se g è di tipo (U) e inoltre $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ove b_n è definita come in ii), allora esiste $l \in \mathbf{R}$ tale che $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

2.3) (punti 4)

a) Siano $A_1 = [0,1] \times [0,3]$, $A_2 = [2,3] \times [0,3]$, $A_3 = [0,3] \times [0,1]$, $A_1 = [0,3] \times [2,3]$. Sia $B = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_B xy\,dx\,dy$.

b) Determinare, se esistono, $\max\limits_{A_1 \cup A_3} x(1-y)$, $\min\limits_{A_1 \cup A_3} x(1-y)$.

2.4) (punti 3) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 10y'(t) + 16y(t) = e^{-at}$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2.1) (punti 9)

a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3(a^2-2)^n}{5^n + (\sin(a)+1)n!}$ converge

b) Qui e anche nei punti c) e d) successivi, supponiamo che (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ sia una successione tale che la successione s_n delle somme parziali definita da $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ sia limitata. Chiamiamo L l'insieme degli $l \in \mathbf{R}$ tale che esiste un'estratta (s_{n_k}) di (s_n) per cui $s_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Determinare una successione (a_n) tale che l'insieme L abbia esattamente tre punti.

c) Provare che se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ allora L è un intervallo.

d) Esiste una successione (a_n) tale che $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a > 0$ e inoltre L è un intervallo?

2.2) (punti 6)

a) Dire quante soluzioni ha l'equazione $e^{2x} + e^{-2x} + x = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) Provare che se f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^2 e $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$, allora per ogni numero reale b la funzione f_b definita da $f_b(x) = f(x) + bx^4$ ha un minimo relativo in 0.

c) Data una funzione g da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabile tale che $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, esiste sempre una funzione f da un intervallo $]a_1, a_2[$ in $\mathbf{R}$ con $a_1 < 0 < a_2$, f derivabile in 0, tale che per ogni numero reale b la funzione $f_{b,g}$ definita da $f_{b,g}(x) = f(x) + bg(x)$ ha un minimo relativo in 0?

2.3) (punti 6)

a) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A x\,dx\,dy$, ove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [0,2], x^2 - 1 \leq y \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}.$$

b) Sia u una funzione continua da $]0,1] \times [0,1]$ in $\mathbf{R}$. Supponiamo che $u(x,y) \underset{(x,y)\to(0,\bar{y})}{\longrightarrow} v(\bar{y})$ per ogni $\bar{y} \in [0,1]$ e che v sia una funzione continua da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$. Provare che u è limitata.

c) Sia u una funzione continua da $]0,1] \times [0,1]$ in $\mathbf{R}$. Supponiamo che $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,\bar{y})} u(x,y) = v(\bar{y})$ per ogni $\bar{y} \in [0,1]$ e che v sia una funzione limitata da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$. Si può concludere che u è superiormente limitata?

2.4) (punti 3) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(t^3+1)y'(t) + 3t^2 y(t) = \Big((t^3+1)y(t)\Big)^4.$$

2.1) (Punti 9) Sia a_n definita da $a_n = \dfrac{(n^2+7)b^n}{6^n + n^{48}}$. Dire per quali $b \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.
b) Sia f una funzione crescente e continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Sia inoltre (a_n) una successione di numeri reali positivi tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Provare che l'insieme

$$E = \left\{ t > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} f(ta_n) \ \text{ converge} \right\}$$

è un intervallo (eventualmente vuoto), ossia se $t_1, t_2 \in E$ e $t_1 < t_2$, allora $t \in E$ per ogni $t \in]t_1, t_2[$.
c) Provare che se per qualche n intero positivo si ha $f^{(n)}(0) > 0$, ove $f^{(n)}(0)$ denota la derivata ennesima di f in 0, allora E o è vuoto o coincide con $]0, +\infty[$. Qui si assume f di classe $C^{(\infty)}$.
d) Togliendo l'ipotesi che per qualche n intero positivo si ha $f^{(n)}(0) > 0$, la tesi di c) è ancora vera? Anche qui si assume f di classe $C^{(\infty)}$

2.2) (Punti 7) Diciamo che una funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è di tipo (H) se g è di classe $C^{(1)}$, e inoltre esistono numeri a_n, b_n tali che $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < \cdots$, e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $g'(x) > 0$ per ogni $x \in]a_n, b_n[$, $g'(x) < 0$ per ogni $x \in]b_n, a_{n+1}[$, e infine g' è limitata.
a) Dare un esempio di una funzione di tipo (H).
b) Provare che se esiste $k > 0$ ed esistono c_n, d_n tali che $a_n < c_n < d_n < b_n$ e $g'(x) \geq k$ per ogni $x \in [c_n, d_n]$, ed esiste finito $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, allora $d_n - c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Dire per quali $a > 0$, ogni funzione g di tipo (H) che soddisfa $a_{n+1} - b_n = \frac{1}{n^a}$ tende a un limite (non necessariamente finito) per $x \to +\infty$.

2.3) (Punti 4) a) Sia $A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 3 - |x-1|\big\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A y\, dx\, dy.$$

b) Sia v una funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che l'insieme $\big\{x \in \mathbf{R}^2 : ||x|| < \delta, |v(x) - v(0)| \geq \varepsilon\big\}$ è finito (eventualmente vuoto). Provare che v è continua in 0.

2.4) (Punti 4) a) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 8y'(t) + 7y(t) = \cos(t)$.
b) Provare che Il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = tl\big(y(t)\big) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ove $l(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+\frac{1}{n})^n}{n!}$ ha un'unica soluzione in un opportuno intorno di 0.

Prova dell'esame di cultura. 05/03/2015

2.1) (Punti 6) a) Sia a_n definita da $\alpha_n = \dfrac{b^n n^a}{(n^4+1)^{\sqrt{2}}+1}$. Dire per quali $a, b \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ è convergente.
b) Provare che se b_n è una successione e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{n+1} - b_n|$ converge, allora la successione b_n converge.
c) Se la successione b_n converge, allora segue necessariamente che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{n+1} - b_n|$ converge?

2.2) (Punti 8) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione s definita da $s(x) = x^3 8^{ax^2}$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.
b) Provare che se v è una funzione continua e positiva da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che l'integrale improprio $\int\limits_1^{+\infty} v(t)\,dt$ converge, allora esiste una successione c_n tale che $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $v(c_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Diciamo che $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ha la proprietà (F) (con c_n) se v è di classe C^1, e inoltre esiste una successione c_n strettamente crescente e tendente a $+\infty$ di numeri reali positivi tale che $c_{n+1} - c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $v(c_n) = (-1)^n$, e $|v(x)| < 1$ per ogni $x \in]c_n, c_{n+1}[$. Provare che se v ha la proprietà (F), allora v' è illimitata.
d) Provare che fissata la successione c_n in b) esiste v con la proprietà (F) con tale successione c_n tale che l'integrale improprio $\int\limits_1^{+\infty} v(t)\,dt$ converge.

2.3) (Punti 8). a) Calcolare $\max\limits_A g$ e $\min\limits_A g$ ove $g(x,y) = x(10y^2 - y)$ e

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \leq 1, y \geq \sqrt{x}\right\}.$$

b) Provare che se P è un polinomio di grado almeno 2 in una variabile reale senza radici multiple, allora la funzione α definita da $\alpha(x,y) = P(x)P(y)$ ha al massimo un numero finito di punti di massimo interni ad A, ove A è definito come in a).
c) Diciamo che una funzione f da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ è supercontinua se f è continua e inoltre vale la seguente proprietà:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \left(v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \tfrac{||v_1 - v_2||}{||v_1||} < \delta\right) \Rightarrow |f(v_1) - f(v_2)| < \varepsilon\,.$$

Provare che se f è supercontinua, allora f è uniformemente continua.
d) È vero che se f è supercontinua e inoltre per ogni $v \in \mathbf{R}^n$ esiste $\lim_{t\to+\infty} f(tv) \in \mathbf{R}$, allora f è limitata?

2.4) (Punti 2) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - y'(t) + 6y(t) = 0$.

2.1) (Punti 8). a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n+1}{5^n+(n+1)^2}$.
Nei successivi punti b) e c) u e v sono numeri reali tali che $u < v$, e f è una funzione da $]u,v[$ in $]0,+\infty[$. Inoltre a_n e b_n sono due successioni a valori in $]u,v[$ tali che le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ sono entrambi convergenti.

b) Provare che se f è convessa e $\alpha_n \in [0,1]$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\big(\alpha_n a_n + (1-\alpha_n)b_n\big)$ è convergente.
c) La conclusione in b) continua a valere se f è crescente invece che convessa?
d) Provare che se f è una funzione da $]0,1[$ in $]0,+\infty[$ e $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$, allora per ogni $t \in]0,1[$ esistono $a_n, b_n \in]0,1[$ tali che le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ sono entrambi convergenti, ma la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\big(ta_n + (1-t)b_n\big)$ diverge.

2.2) (Punti 6). a) Determinare un numero reale a tale che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} & \text{se } x \le 1 \\ x+a & \text{altrimenti} \end{cases}$, sia continua su $\mathbf{R}$, e per tale a determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.
b) Sia P un polinomio di grado $n > 0$ e avente coefficiente direttivo uguale a 1. Provare che esiste un numero reale $b > 0$ tale che la funzione α definita da $\alpha(x) = e^{-x}P(x)$ è decrescente in $]b,+\infty[$.
c) Sia Q una funzione da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ di classe C^1 tale che $Q(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Provare che esistono numeri reali b_1, b_2 con $b_2 > b_1 > 10^{1000}$ tali che la funzione $\overline{\alpha}$ definita da $\overline{\alpha}(x) = e^{-x}Q(x)$ è decrescente in $]b_1, b_2[$.

2.3) (Punti 5.5). a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A xy\,dx\,dy$, ove

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x+y \ge \frac{1}{2}, x^2+y^2 \le 1\big\}.$$

b) Provare che la funzione h definita da $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^3}$ è continua su $\mathbf{R}$.
c) Siano f_n funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ limitate e discontinue. Provare che esistono numeri reali positivi δ_n per $n > 1$ tali che se $b_1 = 1$ e $b_n > \delta_n$ per ogni $n > 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(x)}{b_n}$ è convergente per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la sua somma è una funzione discontinua.

2.4) (Punti 4.5). a) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(t) = \dfrac{t}{2e^{2y(t)} - e^{y(t)}}$.
b) Provare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $y'(t) = \dfrac{1}{e^{5y(t)} + e^{y(t)}}$ su un intervallo della forma $]a,+\infty[$ è illimitata.

Prova dell'esame di cultura. 13/10/2014

2.1) (Punti 9) a) Sia a_n definita da $\alpha_n = \dfrac{b^n}{(n!)^c(1+\frac{1}{n})}$. Dire per quali $b \in \mathbf{R}$ e $c \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ è convergente.
b) Diciamo che una funzione $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ è di tipo (S) se f è strettamente crescente e continua e $f(0) = 0$. Provare che se f è di tipo (S), a_n è una successione di numeri reali positivi e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, si ha $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Provare che se f è di tipo (S), a_n è una successione di numeri reali positivi e $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge, si ha $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
d) Dire se è vero che se a_n è una successione di numeri reali positivi e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora esiste f di tipo (S) tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge.

2.2) (Punti 8.5) Diciamo che una funzione f da $]0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ è di tipo (P) se f è di classe C^1, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e f ha minimo assoluto nel punto 1.
a) Provare che se f è di tipo (P) e $y > f(1)$, allora l'equazione $f(x) = y$ ha almeno due soluzioni distinte.
b) Provare che se f è di tipo (P) esistono due numeri reali positivi distinti x_1 e x_2 tali che $f'(x_1) = -f'(x_2)$.
c) Provare che se f è di tipo (P) per ogni $y < 0$ esiste $x > 0$ tale che $f'(x) = y$.
d) Dire se è vero che per ogni f di tipo (P) e per ogni $y > 0$ esiste $x > 0$ tale che $f'(x) = y$.

2.3) (Punti 4.5) a) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A \frac{x}{y^2+1}\,dx\,dy$, ove

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le y \le 2x, x \le 3\big\}.$$

b) Provare che se g è una funzione continua da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ periodica di periodo $(1,0)$ (ossia tale che $g(x+1,y) = g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$), e inoltre vale

$$\forall M \in \mathbf{R}\ \exists K > 0 : (|y| > k) \Rightarrow (g(x,y) > M),$$

allora g ha minimo assoluto in $\mathbf{R}^2$.

2.4) (Punti 2) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$.

Prova dell'esame di cultura. 14/07/2014

2.1) (Punti 7) a) Sia a_n definita da $a_n = \dfrac{b^n}{(\sqrt[3]{5} + \frac{1}{n})^n + n}$. Dire per quali $b \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.
b) Sia f una funzione convessa da $[0,1]$ in $[0,+\infty[$ tale che $f(0) = 0$. Provare che se $a_n \in [0,1]$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge.
c) Sia α da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(n) = 0$ e $\alpha\big(n + \frac{1}{2}\big) = 1$ per ogni $n \in \mathbf{Z}$, e α concava su ogni intervallo della forma $[n, n+1]$ con $n \in \mathbf{Z}$. Provare che se $a_n \in \mathbf{R}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(a_n)$ converge, allora si ha $d(a_n, \mathbf{Z}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.2) (Punti 9) Sia g una funzione continua e periodica di periodo 1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Sia u_c la funzione definita da $u_c(x) = x + cg(x)$, con $c \in \mathbf{R}$.
a) Provare che la funzione β definita da $\beta(x) = e^{6x^2} - 5e^{3x^2} + 8$ non è monotona in $[0, +\infty[$.
b) Provare che, se g è di classe C^1, allora esiste $c > 0$ tale che u_c è una biiezione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$.
c) L'enunciato in b) vale ancora se non si suppone g di classe C^1?
d) Esiste una g come sopra tale che per ogni $c > 0$ la funzione u_c assume almeno un valore infinite volte?

2.3) (Punti 6) Sia

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R} : x^2 \le y \le x^2 + 2, y \le 7\big\}.$$

a) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A y\,dx\,dy$.
b) Sia B il segmento chiuso (ossia inclusi gli estremi) che congiunge $(0,0)$ e $(2,1)$. Calcolare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione v definita da $v(x,y) = y - x^2$ su $A \cup B$.
c) Fissato un punto Q di A, provare che ogni funzione uniformemente continua da $A \setminus \{Q\}$ in $\mathbf{R}$ ha o un massimo o un minimo (eventualmente sia massimo sia minimo) su $A \setminus \{Q\}$.

2.4) (Punti 2) Risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = \cos(t)y(t)$.

2.1) (Punti 8) a) Sia a_n definita da $a_n = \dfrac{n^\alpha}{\left(\sqrt{n+2}+5\right)^7}$. Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

b) Diciamo che una successione (a_n) è sin-regolare se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n)$ è convergente; diciamo che (a_n) è assolutamente sin-regolare se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n)$ è assolutamente convergente.
Provare che se (a_n) e (b_n) sono assolutamente sin-regolari, allora anche $(a_n + b_n)$ è assolutamente sin-regolare.
c) È vero che se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e (a_n) non è assolutamente sin-regolare, allora esistono $k_n \in \mathbf{N}$ tali che $k_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $(a_n + k_n\pi)$ non è sin-regolare?
d) Se (a_n) e (b_n) sono sin-regolari e per ogni n si ha $\sin(a_n) \neq 0$ e $\sin(b_n) \neq 0$, allora anche $(a_n + b_n)$ è sempre sin-regolare?

2.2) (Punti 6) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = |\ln(x+1)| - x^2$.
b) Siano g e h funzioni di classe C^1 su $\mathbf{R}$ a valori in $\mathbf{R}$ e supponiamo $g'(0) > 0$. Provare che esiste $a > 0$ tale che la funzione l definita da $l(x) := g(x) - ah(x)$ è crescente in un opportuno intorno di 0.
c) Se h è supposta non necessariamente di classe C^1, ma lipshitziana, continua a valere la tesi in b)?

2.3) (Punti 7) a) Calcolare Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_B y\,dx\,dy$, ove

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq y \leq 6 - |x+1|\right\}.$$

b) Sia $A := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -\dfrac{1}{1+x^2} \leq y \leq \dfrac{1}{1+x^2}\right\}$. Dire se A è compatto.
c) Provare che se u è una funzione lipshitziana da A in $[0,+\infty[$ tale che

$$u(x,0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ u(x,0) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0,$$

allora u ha massimo assoluto su A.
d) La tesi di c) vale se supponiamo u *continua* in A, ma non necessariamente lipshitziana?

2.3) (Punti 3) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - ay'(t) + ay(t) = 0$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2.1) (Punti 8) a) Sia a_n definita da $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ multiplo di } 4 \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente, divergente o indeterminata.
b) Provare che se a_n è una successione periodica di periodo intero positivo k, ossia $a_{n+k} = a_n$ per ogni $n = 1, 2, 3, ...$ e a_n assume solo i valori 1 e -1, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è sempre divergente se k è dispari, mentre se k è pari questo non è vero per tutte le successioni a_n come sopra.
c) Sia $b_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3....$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente. Provare che se a_n è una successione tale che $a_n \geq -b_n$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è o convergente o divergente.
d) Esiste $b_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3....$ per cui $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente tale che, se a_n è una successione per cui $a_n \geq -b_n$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è o convergente o divergente?

2.2) (Punti 8) Diremo che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è pseudocrescente in un punto $\bar{x} \in \mathbf{R}$ se per ogni $y > \bar{x}$ esiste $z \in]\bar{x}, y[$ tale che $f(z) > f(\bar{x})$.
a) Provare che la funzione f definita da $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se x} \neq 0 \\ 0 & \text{se x} = 0 \end{cases}$. Provare che f è pseudocrescente in 0, ma non è crescente in nessun intervallo della forma $[0, a]$ con $a > 0$.
b) Provare che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua in $\mathbf{R}$, e pseudocrescente in $\bar{x}$ ma non è crescente in un intervallo della forma $I := [\bar{x}, b]$ con $b > \bar{x}$, allora f ha nell'interno di I almeno un punto di estremo relativo.
c) Provare che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua e pseudocrescente in tutti i punti, allora è crescente in $\mathbf{R}$.
d) Dire se la tesi di c) continua a valere senza l'assunzione che f è continua.

2.3) (Punti 4.5) a) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_{[2,3]\times[1,2]} \ln(x + y)\, dx\, dy$.

b) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_{A_b} y\, dx\, dy$ ove $A_b = \{(x, y \in \mathbf{R}^2 : bx \leq y \leq 2bx, -1 \leq y \leq 1\}$ al variare di $b \in \mathbf{R}$.

2.4) (Punti 3.5) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 7y'(t) + 6y(t) = t + t^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

2.1) (Punti 6) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2}}{4^{n^2}+8}$ converge.

b) Provare che se le serie di numeri reali $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono, e $a_n > 0$ (NOTA *non necessariamente* $b_n > 0$), $b_n \neq -1$, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n+1}$ converge.

c) Siano f e g funzioni continue da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che $g(0) > 0$, $f(0) = 0$, ed esiste $f'(0) > 0$. Provare che se le serie di numeri reali $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergono, $a_n > 0$ e $g(b_n) \neq 0$, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(a_n)}{g(b_n)}$ converge.

2.2) (Punti 8) a) Provare che esiste $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$, $\frac{f|_{\mathbf{Q}}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, ma f non è derivabile in 0.

b) Se nelle ipotesi di a) assumiamo inoltre che f è continua, possiamo concludere che f è derivabile in 0?

c) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ se x è il reciproco di un intero positivo dispari, $f(x) = x$ se x è il reciproco di un intero positivo pari. Provare che f non ha derivata destra in 0.

d) Provare che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è Lipshitziana, $f(0) = 0$, e inoltre per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = ax$ ha al massimo un numero finito di soluzioni in $]0, +\infty[$ allora f ha derivata destra in 0.

2.3) (Punti 5)

a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sin(x) \le y \le \sin(2x), 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\}$. Calcolare $\int_A x\,dx\,dy$.

b) Provare che per ogni $\alpha > 1$ l'insieme

$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^\alpha < y < \sin(x), 0 \le x \le \frac{\pi}{15}\}$$

è non vuoto, ma per qualche $\alpha > 0$ tale insieme è vuoto.

2.4) (Punti 5) a) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - y(t) = t^2$.

b) Provare che se P è un polinomio reale di grado positivo, che non si annulla mai (in $\mathbf{R}$), allora le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{t}{P\big(y(t)\big)}$$

sono definite in tutto $\mathbf{R}$.

2.1) (Punti 8) a) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a}{(n^2+1)^{\sqrt{2}} - n^{2\sqrt{2}}}$ converge.

b) Fare vedere con un esempio che esistono successioni (a_n) tali che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, ma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ non converge.

c) Provare che se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora anche $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ converge quando ϕ è una funzione strettamente crescente dall'insieme degli interi positivi in sé.

d) Dire se è vero che, se P è un polinomio di grado almeno 2 tale che $P(x) > 1$ se $x > 0$, e $\phi(n) = [P(n)]$, data una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente a termini positivi, anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ è convergente.

2.2) (Punti 8) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int (x^3 + x)\sin(x^2+1)\,dx$.

b) Premessa: Dato $a \in \mathbf{R}$, diciamo che una funzione $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ ha la proprietà (B) se f è continua e crescente in $[a, +\infty[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e inoltre vale $\dfrac{f(x^3)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Dare un esempio di una funzione con la proprietà (B).

c) Provare che se f ha la proprietà (B), allora $\dfrac{f(x^2)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

d) La tesi in c) rimane vera se non assumiamo che f sia crescente?

2.3) (Punti 6) a) Determinare massimo e minimo della funzione α definita da $\alpha(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ sull'insieme $D_a := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le a, x \le y \le 2x\}$, al variare di $a > 0$.

b) Provare che, se f_n è una successione di funzioni derivabili da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che $|f_n'(x)| \le 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e f_n converge puntualmente ad una funzione f derivabile su $\mathbf{R}$, allora $|f'(x)| \le 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

c) È vero che se f_n è una successione di funzioni di classe C^1 da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ tali che $||\mathrm{grad} f_n(x)|| \le 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$, e f_n converge puntualmente ad una funzione f di classe C^1 su $\mathbf{R}^n$, allora $||\mathrm{grad} f(x)|| \le 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$?

2.4) (Punti 2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

2.1) (Punti 6) Sia $f : [2, +\infty[\to]0, +\infty[$ una funzione continua e decrescente.

a) Provare che se a_n è una successione limitata in $[2, +\infty]$, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ diverge.

b) Provare che se a_n e b_n sono due successioni in $[2, +\infty[$ tali che $a_n < b_n < a_{n+1}$, allora le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ hanno lo stesso carattere.

c) Fissata una successione u_n, diciamo che una successione a_n a valori in $[2, +\infty[$ è di tipo u_n se $a_n + 1 \leq a_{n+1} \leq a_n + 1 + u_n$ per ogni n. Provare che se a_n e b_n sono di tipo $\frac{1}{n^2}$ allora le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ hanno lo stesso carattere.

2.2) (Punti 9) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \ln(x+1)\sqrt[3]{2x+2}\,dx$.

b) Diciamo che una funzione $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ è B-stabile se è continua, ed inoltre esiste una successione v_n, $n = 1, 2, 3, ...$, strettamente crescente tale che $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\int\limits_0^{v_n} g(t)\,dt = 0$ per ogni $n = 1, 2, 3....$ Determinare una funzione B-stabile non periodica.

c) Provare che se g è B-stabile, e inoltre $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e la successione v_n nella definizione di B-stabile soddisfa la condizione seguente: *la successione* $v_{n+1} - v_n$ *è limitata*, allora esiste finito l'integrale improprio $\int\limits_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

d) Dire se esiste una funzione $h : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ tale che per ogni $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e periodica e con integrale nullo sul periodo, la funzione $h + g$ è B-stabile.

2.3) (Punti 6) a) Sia data la funzione α definita da $\alpha(x, y) = x^2 + y^2 - x$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di α sull'insieme $C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

b) Dire se comunque dati vettori w_n in $\mathbf{R}^2$ tali che $||w_n|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la funzione α ha minimo su $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (C + w_n)$.

2.4) (Punti 3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^4}{y(t)} \\ y(0) = -2 \end{cases} .$$

Prova dell'esame di cultura. 13/05/2013

2.1) (Punti 8) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^\pi 3^n}{5^n + n^7}$ converge.

Sia data una successione di numeri reali $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, ..., +$ e poniamo $b_n = \frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

b) Provare che se a_n è decrescente, e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

c) Dire se la tesi in a) vale senza assumere che a_n sia decrescente.

d) Dire per quali numeri interi positivi $h_0, h_1, ..., h_s$, $k_1, ...k_s$ con $s \geq 2$, se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e la successione a_n è decrescente, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+h_0} \cdot a_{n+h_1} \cdots a_{n+h_s}}{a_{n+k_1} \cdots a_{n+k_s}}$ converge.

2.2) (Punti 8-9) Diciamo che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ha la proprietà (A) se f è continua in $\mathbf{R}$, e inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ esistono x_1 e x_2 con $x_1 < x < x_2$ tali che $f(x_1) < f(x)$ e $f(x_2) < f(x)$.

a) Determinare f con la proprietà (A) che ammette massimo assoluto su $\mathbf{R}$.

b) Provare che se ogni f con la proprietà (A) ammette almeno un massimo relativo su $\mathbf{R}$.

c) Provare che se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ con la proprietà (variante della (A)) che per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono x_1 e x_2 con $x - \varepsilon < x_1 < x < x_2 < x + \varepsilon$ tali che $f(x_1) \leq f(x)$ e $f(x_2) \leq f(x)$, allora f è costante in $\mathbf{R}$.

d) Dire se esiste f con la proprietà (A) che non ammette massimo assoluto su $\mathbf{R}$.

2.3) (Punti 4-5) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A x\,dx\,dy$.

b) Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $F(x, y) = (xy^2, xy^3)$. Dire in quali punti F ha determinante dello jacobiano uguale a 0, e in quali punti tra quelli F è localmente iniettiva.

2.4) (Punti 3) Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) = 3y'(t) - 2y(t) + t.$$

2.1) (Punti 6) Data una successione (a_n) con $a_n > 0$, poniamo $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$ converge, se $a_n = \frac{1}{2^n}$.

b) Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora esiste un'estratta r_{n_k} di r_n tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} r_{n_k}$ converge.

c) Dire se, nel caso la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converga, è sempre vero che anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} r_n$ converge.

2.2) (Punti 7) a) Provare che se f è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora dato un intervallo $]a, b[$ con $a < b$ esistono c, d con $a < c < d < b$ tale che f è monotona in $]c, d[$.
b) Provare che, comunque data una successione a_n di numeri reali, la funzione f definita da $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(a_n x)}{2^n}$ esiste (nel senso che la serie data converge per ogni numero reale x) ed è una funzione continua.
c) Provare che nella f definita in b), si possono scegliere i numeri a_n in modo tale che f non è monotona in alcun intervallo aperto (non vuoto).

2.3) (Punti 6) Sia $A = \{(x, y) \in [-4, 4] \times [0, 4] : x^2 + (y + 2)^2 \leq 9\}$.
a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A y\, dx\, dy$.
b) Calcolare, se esistono, il massimo e il minimo su A della funzione g definita da $g(x, y) = x - y$.
c) Dire quanti valori può al massimo assumere un numero finito non vuoto di volte una funzione continua da A in $\mathbf{R}$.

2.4) (Punti 5) Sia u_α la funzione definita da $u_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
a) Provare che u_α è di classe C^1 su $\mathbf{R}$ se $\alpha > 1$.
b) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = u_2\big(y(t)\big) \\ y(0) = B \end{cases}$ al variare di $B \in \mathbf{R}$.

2.1) (Punti 6)

a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2}}{n^{2n}+n}$ converge

b) Data una successione (a_n), dire se la condizione $\left(a_{kn} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ per ogni } k=2,3,4,....\right)$ implica $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Dire per quali numeri reali $\lambda > 0$ la condizione $\left(a_n \text{ limitata, } \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n) \text{ converge, } \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\lambda a_n) \text{ converge}\right)$ implica $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.2) (Punti 8) Sia f una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Diciamo che una f è *strettamente crescente in* $\bar{x} \in \mathbf{R}$ se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > f(\bar{x})$ se $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$. Diciamo che f è *strettamente crescente puntualmente* se è strettamente crescente in tutti i punti.
a) Provare che se f è derivabile in un punto $\bar{x}$ con $f'(\bar{x}) > 0$, allora f è strettamente crescente in $\bar{x}$.
b) Provare che la funzione f definita da $f(x) = \begin{cases} x\big(2+\sin(\frac{1}{x})\big) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è strettamente crescente in 0 ma non è strettamente crescente in alcun intorno destro di 0.
c) Dire se una funzione puntualmente strettamente crescente è sempre strettamente crescente.
d) Dire se, data comunque una funzione f strettamente crescente in 0 ma non strettamente crescente in alcun intorno destro di 0, allora esiste sempre un a tale che l'equazione $f(x) = a$ ha almeno tre soluzioni.

2.3) (Punti 6) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, x+y \leq 5\}$.
a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A y\,dx\,dy$.
b) Dire per quali $r > 0$ la palla aperta di centro $(-2,-2)$ e raggio r contiene A.
c) Provare che tra tutti i rettangoli della forma $[a, a+1] \times [0,2]$ ne esiste uno su cui l'integrale doppio di $e^{(x+y)^2}$ (in $dx\,dy$) assume valore minimo.

2.4) (Punti 4) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(t) - 9y'(t) + 14y(t) = t$ che soddisfano le condizioni $y(0) = y'(0)$, $\big(y(0)\big)^2 + \big(y'(0)\big)^2 = 1$.

Prova dell'esame di cultura. 7/12/2012

2.1) (Punti 6) a) Dire per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^\alpha}{n^{9\alpha} + 3}$ converge.

b) Data una funzione $u :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ continua e crescente rispetto a x (ossia tale che per ogni $y > 0$ la funzione $x \mapsto u(x, y)$ è crescente in $]0, +\infty[$), e tale che $u(x, y) = 1 \iff x = y$, provare che se (a_n) è una successione di numeri reali positivi tale che $u(a_{n+1}, a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l > 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

c) Data u come in b), dire se è sempre vero che se $u(a_{n+1}, a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l < 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

2.2) (Punti 8/9) Sia $f(x) = \ln\Big(\frac{x^2 + 1}{x}\Big)$.

a) Calcolare l'integrale indefinito $\int f(t)\, dt$.

b) Provare che per ogni $a > 0$ l'equazione $f(x) = a$ ha al massimo due soluzioni in $]0, +\infty[$.

c) Provare che per ogni $\alpha > 1$ esiste $b > 1$ tale che $\int_b^{b+1} \ln\Big(\frac{t^\alpha + 1}{t}\Big)\, dt = \alpha \ln(b)$.

d) Provare che se g è una funzione di classe C^1 da $]0, +\infty[$ in $]0, +\infty[$ tale che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} g(t)\, dt$ converge, e tale inoltre che valga

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \Big(x \in]0, +\infty[\ , g(x) > \varepsilon\Big) \Rightarrow g'(x) < \delta$$

allora $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.3) (Punti 6/7) a) Sia $A =: \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\big\}$, sia $v(x, y) = x(y + 1)$. Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} v(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} v(x, y)$.

b) Provare che se r è una funzione continua da $[0, 1] \times [0, 1]$ in $\mathbf{R}$, allora la successione $d_n := \max_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \times [0,1]} r$ è convergente.

c) Dire se con le notazioni di b) si può concludere che la successione d_n ha limite (anche eventualmente $+\infty$ o $-\infty$) *se* r *è una funzione continua da* $\Big([0, 1] \times [0, 1]\Big) \setminus \{(0, 0)\}$ *in* $\mathbf{R}$.

2.4) (Punti 3) Determinare le soluzioni y dell'equazione differenziale $y''(t) = ay(t)$ tali che $y(0) = 1$, $y(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, al variare di $a > 0$.

Prova dell'esame di cultura. 5/10/2012

2.1) (Punti 6) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{\alpha_n + 1}$ è convergente, ove α_n è definita da $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{n+1} = 3n\alpha_n$.
b) Definiamo $\mathcal{S} = \left\{(a_n), n = 1, 2, 3, ... : a_n > 0 \ \ \forall n = 1, 2, 3, ..., \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1\right\}$. Provare che, se $(a_n) \in \mathcal{S}$, $(b_n) \in \mathcal{S}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n < 1$.
c) Provare che, se $(a_n) \in \mathcal{S}$ allora esiste $L < 1$ tale che per ogni $(b_n) \in \mathcal{S}$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq L$, ove $\mathcal{S}$ è definita come in b).

2.2) (Punti 7/8) Diciamo che f ha la proprietà (P) se f è una funzione continua da $[0, 1]$ in $\mathbf{R}$ tale che f è strettamente decrescente, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.
a) Dare un esempio di f con la proprietà (P).
b) Provare che se f ha la proprietà (P), allora per ogni $\alpha > 0$ esiste un unico $x \in [0, 1]$ (che denoteremo nel seguito con $\phi_f(\alpha)$) tale che $f(x) = x^\alpha$.
c) Provare che se f ha la proprietà (P), allora la funzione $\phi_f :]0, +\infty[\to [0, 1]$ è strettamente crescente.
d) Dire se, data comunque una funzione $\psi :]0, +\infty[\to [0, 1]$ strettamente crescente e continua tale che $\psi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, $\psi(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$ esiste f con la proprietà (P) tale che $\phi_f = \psi$.

2.3) (Punti 5+) Sia $f_n(x) = \left|\frac{1}{2} - x^n\right|$.
a) Dire se, per $n \to +\infty$, f_n converge puntualmente su $[0, 1]$ e se f_n converge uniformemente su $[0, 1]$.
b) Calcolare l'integrale doppio $\int_{[0,1]\times[0,1]} y f_n(x)\, dx\, dy$, al variare di $n = 1, 2, 3, ...$
c) Calcolare l'integrale doppio $\int_{[0,1]\times[0,1]} f_1(xy)\, dx\, dy$.

2.4) (Punti 5+) a) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(t^2 + 1)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = (t^2 + 1)y(t) + t.$$

Si suggerisce di calcolare la derivata seconda della funzione $(t^2 + 1)y(t)$.
b) Sia $\bar{y}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \arctan\left(y(t)^2\right) \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Calcolare, se esiste, $\lim_{t\to +\infty} \bar{y}(t)$.

Prova dell'esame di cultura. 11/07/2012

2.1) (Punti 8) Diciamo che una successione a_n, $n = 1, 2, 3, ...$ di numeri reali è A-crescente se $a_n > 0$ e $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n = 1, 2, 3...$ e inoltre $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) Dare un esempio di una successione A-crescente.

b) Provare che se a_n è A-crescente, allora $\frac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Che cosa si può dire del carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ se a_n è A-crescente?

d) Provare che se a_n è A-crescente allora l'insieme $\{a_n - a_m : n, m = 1, 2, 3, ...\}$ è denso in $\mathbf{R}$.

2.2) (Punti 6) a) Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = \ln(x^2 - 1) + x$.

b) Provare che se f è una funzione continua, periodica di periodo 1, non costante e positiva da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora la funzione g definita da $g(x) = xf(x)$ non è crescente su $\mathbf{R}$.

c) Se f e g sono come in b), g può essere uniformemente continua su $\mathbf{R}$?

2.3) (Punti 4) a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A x\cos(y)\, dx\, dy$ ove

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \le 1, -x \le y \le x\right\}.$$

b) Provare che, se α è una funzione continua da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ e $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, allora esiste una successione ρ_n di numeri positivi tale che, posto B_n la palla chiusa di centro $(\bar{x}, \bar{y})$ e raggio ρ_n, posto A_n l'area di B_n, posto $C_n = \int_{B_n} \alpha(x, y)\, dx\, dy$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{A_n}$ è convergente.

2.4) (Punti 6) a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(t) = (y(t))^6 \sin t$.

b) Data l'equazione differenziale $y'(t) = (y(t))^5 - 5(y(t))^3 + 4y(t)$, determinarne le soluzioni costanti;

inoltre provare che esistono soluzioni di tale equazione non costanti limitate nel loro intervallo massimale e che esistono soluzioni di tale equazione non costanti illimitate nel loro intervallo massimale.

2.1) (Punti 7) a) Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n + (3n+1)^4}{n^a + 3}$.
b) Sia f una funzione continua da $[0, 2]$ in $[0, +\infty[$. Provare che esistono $c_n > 0$ per ogni $n = 1, 2, 3, ...$ tali che, se $a_n \in [0, 1]$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge e $a_n < b_n < a_n + c_n$, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ converge.
c) Dire se, data una funzione f continua da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ esistono $c_n > 0$ tali che, se $a_n \in [0, +\infty[$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ converge e $a_n < b_n < a_n + c_n$, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} f(b_n)$ converge.

2.2) (Punti 6/7) a) Determinare gli estremi relativi su $\mathbf{R}$ delle funzioni α e β definite da $\alpha(x) = x^3 - x$ e $\beta(x) = |x^3 - x|$.
b) Provare che esistono due numeri reali b_1 e b_2 tali che l'equazione $x^9 - \sin x = b_1$ ha un'unica soluzione reale, mentre l'equazione $x^9 - \sin x = b_2$ ha almeno due soluzioni reali.
c) Provare che, se f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che soddisfa la seguente condizione

se $x_1 < x_2$, *dato* y *tale che* $\min\{f(x_1), f(x_2)\} \leq y \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ *allora l'equazione (in* x*)* $f(x) = y$ *ha un'unica soluzione nell'intervallo* $[x_1, x_2]$,

allora f è continua e strettamente monotona.

2.3) (Punti 6) Sia $A := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\right\}$.
a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A e^x \, dx \, dy$.
b) Posto

$$u(x, y) = (e^{xy}, -x^2 + y^4)$$

provare che il determinante jacobiano di u non si annulla mai su A.
c) Provare che, dato u come in b) e posto $v(x, y) = (x^3 - xy + 1, y \sin x)$, esiste $\bar{\eta} > 0$ tale che, se $|\eta| < \bar{\eta}$, allora per ogni $b \in \mathbf{R}^2$ l'equazione

$$u(x, y) + \eta v(x, y) = b$$

ha al massimo un numero finito di soluzioni su A.

2.4) (Punti 4/5) a) Risolvere il problema

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) + y'(0) = 2 \\ y(0) - y'(0) = 1. \end{cases}$$

b) Provare che l'equazione $y'\big(\sin(t)\big)\cos(t) = y\big(\sin(t)\big)$ ha come unica soluzione su $\mathbf{R}$ $y(t) = 0$.

2.1) (Punti 6) Sia $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua, strettamente crescente rispetto a entrambe le variabili, e tale che $g(x,x) = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
a) Provare che $\min\{x,y\} \leq g(x,y) \leq \max\{x,y\}$ per tutti i numeri reali x e y.
b) Provare che se a_n è una successione reale tale che $a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2})$ per ogni $n \geq 3$, allora a_n è limitata.
c) Dire se una successione a_n come in b) è sempre convergente.

2.2) (Punti 6) Dato n intero positivo, diciamo che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è n-nulla se è di classe C^1, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, 1, 2, ...n$.
a) Provare che esistono f n-nulla, e $a > 0$ tali che l'equazione $f(x) = ax$ ha solo una soluzione.
b) Dato n intero positivo, determinare il massimo k (che denoteremo con k_n) tale che per ogni f n-nulla esiste $a > 0$ tale che l'equazione $f(x) = ax$ ha almeno k soluzioni.
c) Dire se per ogni f 37-nulla esiste $a > 0$ tale che l'equazione $f(x) = ax$ ha esattamente $k_{37} - 1$ soluzioni.

2.3) (Punti 6) a) Sia $A = \big\{(x,y) : \mathbf{R}^2 : x \leq y \leq 2x, y \leq 7\big\}$. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A (x + 3y)\, dx\, dy$.
b) Siano $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \big\{(x,y) : y = nx, x \geq 0\big\}$, $C = \{(0,y); y \geq 0\}$. Provare che se h è una funzione della forma $h(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha(x,y)$ con α continua e ≥ 0 in $\mathbf{R}^2$ allora h ha minimo assoluto su $B \cup C$.
c) Provare per ogni D sottoinsieme proprio di $B \cup C$ contenente B, esiste h come in b) che non ha minimo assoluto su D.

2.4) (Punti 6) a) Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - 26y'(t) + 3y(t) = e^{at}\,.$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.
b) Dire se l'equazione differenziale

$$y'(t) = \cos^{20}\big(y(t) + 3t\big)$$

ha soluzioni limitate in $[800, +\infty[$.

2.1) (Punti 6) Diciamo che una successione a_n è di tipo Y se $a_n > 0$ per ogni n e $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

a) Trovare tre successioni a_n, b_n e c_n, tutte di tipo Y, tali che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Provare che se a_n è di tipo Y, e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbf{R}}$, allora $l \in \{0, 1, +\infty\}$.

c) Esistono successioni di tipo Y che non hanno limite né finito, né infinito?

2.2) (Punti 6) Data una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $x \in \mathbf{R}$, definiamo

$$\big(O(f)\big)(x) = \lim_{d\to 0^+} \sup_{x_1,x_2\in[x-d,x+d],x_1\neq x_2} \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|.$$

a) Determinare $\big(O(f)\big)(x)$ nel caso $f(x) = |x|$, al variare di $x \in \mathbf{R}$.

b) Provare che se f è derivabile su $\mathbf{R}$, allora $\big(O(f)\big)(x) = \limsup_{t\to x} |f'(t)|$.

c) Provare che se $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ allora esiste $x \in [a, b]$ tale che $\big(O(f)\big)(x) \geq \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

2.3) (Punti 7) Sia $f(x, y) = \frac{\big(|x| + |y|\big)^3}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Poniamo $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Calcolare l'integrale doppio $\int_B f(x, y)\, dxdy$.

b) Calcolare, se esiste, $\max_B f$

c) Sia s una funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ continua e omogenea di grado 1 nel senso che $s(tv) = |t|s(v)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$ e per ogni $v \in \mathbf{R}^2$. Supponiamo inoltre $s(v) > 0$ se $v \neq (0, 0)$. Posto $B_n = B + v_n$, ove $v_n \in \mathbf{R}^2$ e $||v_n|| = n$, dire se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\max_{B_n} v}$$

ha sempre lo stesso carattere indipendentemente dalla funzione s e dalla successione di vettori v_n con tali proprietà e nel caso che carattere ha.

2.4) (Punti 5) a) Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - 10y'(t) + 16y(t) = \sin(4t)\,.$$

b) Provare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $y'(t) = \frac{1}{\big(y(t)\big)^2 + t^8 + 6}$ è limitata su $\mathbf{R}$.

Prova dell'esame di cultura. 06/10/2011

2.1) (Punti 6) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2+1)^\pi}{6^n - 13}$ converge

b) dire per quali $\alpha > 0$ esiste una successione a_n, $n = 1, 2, \ldots$, tale che $a_n > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge.

c) Dire per quali $a > 0$ esiste una funzione f periodica di periodo a (*non necessariamente continua*) tale che $f > 0$, e $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ma $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverge.

2.2) (Punti 6) a) Provare che se P è un polinomio di grado dispari, allora la funzione g definita da $g(x) = e^x P(x)$ non è crescente su $\mathbf{R}$.

b) Vale lo stesso enunciato che in a) per qualunque polinomio P di grado pari?

c) Provare che se Q è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che esiste n intero positivo dispari per cui $\frac{Q(x)}{x^n} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$, allora la funzione $\widetilde{g}$ definita da $\widetilde{g}(x) = e^x Q(x)$ non è crescente su $\mathbf{R}$.

2.3) (Punti 7) a) Siano β e γ le funzioni di due variabili reali definite da definite da $\beta(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\gamma(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Siano $A_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : n \leq x^2 + y^2 \leq n+1, \}$, $A'_n = \{(x,y) \in A_n : x \geq 0, y \geq 0\}$, $S_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = n\}$ per ogni intero positivo n.

a) Calcolare, al variare di $n = 1, 2, 3, \ldots$, l'integrale doppio

$$\int_{A'_n} \beta(x,y)\, dxdy\,.$$

b) Provare che se v è una funzione continua su $\mathbf{R}^2$ a valori in $\mathbf{R}$ tale che $\frac{v(x,y)}{\gamma(x,y)} \underset{(x,y)\to\infty}{\longrightarrow} 1$, allora non è vero che per ogni intero positivo n il massimo di v su A_n è raggiunto su S_{n+1}, (in altri termini, non è vero che per ogni intero positivo n esiste $P_n \in S_{n+1}$ tale che $v(P_n) = \max\{v(x,y) : (x,y) \in A_n\}$.

c) Provare che esiste $M \subseteq \mathbf{N}$ tale che $\mathbf{N} \setminus M$ è un insieme infinito con la seguente proprietà: se v è una funzione continua su $\mathbf{R}^2$ a valori in $\mathbf{R}$ tale che $\frac{v(x,y)}{\gamma(x,y)} \underset{(x,y)\to\infty}{\longrightarrow} 1$, allora non è vero che per ogni $n \in M$ il massimo di v su A_n è raggiunto su S_{n+1}.

2.4) (Punti 5) a) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = t$.

b) Sia dato il problema di Cauchy P_a

$$\begin{cases} (y'(t))^2 + 2y'(t) = y(t) \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Provare che per $a = -10$ tale problema non ha alcuna soluzione in un opportuno intorno di 0. Inoltre determinare $c, d \in \mathbf{R}$ tale che $c < d$ per cui, se a è tale che $c < a < d$, allora P_a ha almeno una soluzione in un opportuno intorno di 0.

Prova dell'esame di cultura. 06/07/2011

2.1) (Punti 6) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 8^n}{(2n+1)!}$ converge

b) Provare che se $a_n > 0$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora $a_n^{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

c) Dire se esiste una successione a_n di numeri reali non nulli tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{a_n^2} - 1}{a_n^2}$ converge.

2.2) (Punti 8) a) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 5x)e^{x+\sin(x)}$.

b) Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin(te^t)(e^t + te^t)\, dt$.

c) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che esiste $T > 0$ per cui per ogni $y, y' \in \mathbf{R}$ si ha

$$g(y) = g(y') \iff \exists\, n \in \mathbf{Z} : y - y' = nT$$

(in tal modo g è periodica con minimo periodo positivo T). Provare che se ϕ è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g \circ \phi$ è periodica, allora ϕ' è periodica.

d) Provare che se ϕ è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che ϕ' è periodica, allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $\frac{\phi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} c$.

2.3) (Punti 4) a) Calcolare, se esistono,

$$\min_{(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]} (x^2-1)(y^2-1), \qquad \max_{(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]} (x^2-1)(y^2-1).$$

b) Dire per quali numeri reali $a > 0$ l'insieme

$$\left\{(x,y)\mathbf{R}^2 : 0 \le x \le a, y \ge 0, y\cos(x) \le \sin(x)\right\}$$

è compatto.

2.4) (Punti 6) a) Trovare tutte le soluzioni delle equazioni differenziali

$$y''(t) + y(t) = t^2, \qquad y''(t) - y(t) = t^2 e^t\,.$$

b) Provare che per ogni intero positivo n l'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = t^n \sin(t)$$

non ha soluzioni limitate su $\mathbf{R}$.

c) Provare che per ogni numero reale positivo a l'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = t^a \sin(t)$$

non ha soluzioni limitate su $]0, +\infty[$.

2.1) (Punti 7) a) Dire se, data una successione a_n di numeri reali tale che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n$ è convergente, si ha $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Sia b_n una succesione strettamenta crescente tale che $b_n > 0$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e sia $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ continua e decrescente e tale che $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, Provare che se l'integrale improprio $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge allora converge anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(b_n)(b_n - b_{n-1})$.
c) Provare che se $2 \le b_{n+1} - b_n \le 7$, vale anche il viceversa.

2.2) (Punti 6) a) Determinare $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3(e^x-1)}{x^\alpha \cos(x)}$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.
b) Sia f una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ la cui derivata ha solo un numero finito di zeri, tale che $f(0) = f(3) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x \in]0,3[$ e inoltre f che ha un unico punto di massimo relativo in $]0,3[$. Provare che per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = a$ ha al massimo due soluzioni in $]0,3[$.
c) Dire se lo stesso è vero se f è solo continua, ossia se data una funzione f continua su $\mathbf{R}$ tale che $f(0) = f(3) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x \in]0,3[$ e inoltre f che ha un unico punto di massimo relativo in $]0,3[$, allora per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = a$ ha al massimo due soluzioni in $]0,3[$.

2.3) (Punti 6) a) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A \cos(\pi x)\,dx\,dy\,, \qquad A := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le x^2 \le 16\right\}.$$

b) Sia g definita da $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + e^{x+y}$. Dire quali valori reali assume g su $\mathbf{R}^2$.
c) Dire quali valori reali assume g su $\mathbf{R}^2$ infinite volte.

2.4) (Punti 5) a) Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 0\,.$$

b) Determinare infinite soluzioni dell'equazione differenziale

$$\big(y''(t) - 7y'(t) + 10y(t)\big)\big(y'''(t) - 7y''(t) + 10y'(t)\big) = t\,.$$

2.1) (Punti 6) a) Dire per quali numeri reali a la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{\frac{1}{n^2}}-a)$ è convergente.

Sia data una successione di numeri reali positivi a_n, $n=1,2,3,...$, con la proprietà che $a_n \neq a_m$ se $n,m=1,2,3,...$, $n\neq m$, e tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Sia $\phi:\mathcal{B}\to\mathbf{R}$ definita da $\phi(B)=\sum_{n\in B} a_n$, ove $\mathcal{B}$ indica l'insieme dei sottoinsiemi di $\{1,2,3,...\}$.
b) Provare che ci sono successioni a_n con le proprietà dette per cui la ϕ definita sopra non è iniettiva.
c) Provare che ci sono successioni a_n con le proprietà dette per cui la ϕ definita sopra è iniettiva.

2.2) (Punti 7) a) Calcolare l'integrale $\int x\arctan(x^2)\,dx$.
b) Provare che se $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è una funzione continua che assume sia valori positivi sia valori negativi, allora esistono numeri reali a e b con $a<b$ tali che $\int_a^b f(x)\,dx=0$.
c) Dire se esiste una funzione continua $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tale che, per ogni numero reale a l'equazione

$$\int_0^x g(t)\,dt=a$$

ha un numero di soluzioni finito, ma maggiore di 400.

2.3) (Punti 7+) a) Sia $C:=(\mathbf{Z}\times\mathbf{R})\cup(\mathbf{R}\times\mathbf{Z})$ e sia $f:C\to\mathbf{R}$ definita da $f(x,y)=(x-\pi)^2+(y-\sqrt{3})^2$. Calcolare, se esiste, $\min_C f$.
b) Determinare una funzione continua $g:C\to\mathbf{R}$ tale che

$$g(x,n)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\ \forall n\in\mathbf{Z},\quad g(x,n)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty\ \forall n\in\mathbf{Z},$$
$$g(n,y)\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\ \forall n\in\mathbf{Z},\quad g(n,y)\underset{y\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty\ \forall n\in\mathbf{Z},$$

ma g non ha minimo assoluto su C.
c) Supponiamo che $A\subseteq\mathbf{R}^2$, e $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\{Q\}$, ove Q è un punto di $\mathbf{R}^2$, e i sottoinsiemi A_1, A_2, A_3, $\{Q\}$ sono non vuoti e a due a due disgiunti, e inoltre $A_i\cup\{Q\}$ è un insieme connesso per ogni $i=1,2,3$. Provare che ogni funzione continua da A in $\mathbf{R}$ non è iniettiva.

2.4) (Punti 4-) Sia data l'equazione differenziale

$$y^{iv}(t)-9y''(t)+ay(t)=0 \qquad (E_a)$$

a) Trovare tutte le soluzioni di (E_a) per $a=0$.
b) Provare che se $a<0$, allora (E_a) ha almeno una soluzione limitata non costante.

Prova dell'esame di cultura. 06/12/2010

2.1) (Punti 6) Sia (a_n) una successione di numeri reali, e poniamo
$$b_n = \max\{|a_k - a_n| : n \leq k \leq 2n\},\ c_n = b_{2^n}.$$
a) Provare che se a_n è convergente, allora $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Provare che *se* a_n *è crescente*, allora la successione a_n è convergente se e solo se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ è convergente.

c) Determinare a_n tale che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ è divergente, ma la successione a_n è convergente.

2.2) (Punti 6) Diciamo che una funzione f da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ è di tipo Osc se è di classe C^1 e inoltre $f'(x)f'(x+1) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e inoltre, se $f'(x_1) = 0$ e $x_1 < x_2 < x_1 + 1$, allora $f'(x_2) \neq 0$, e $f'(x \pm 1) = 0$.

a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f definita da $f(x) = \sin(ax)$ è di tipo Osc

b) Provare che se f è di tipo Osc, allora esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che $f'(x) \geq 0$ se $[x - \bar{x}]$ è pari, e $f'(x) \leq 0$ se $[x - \bar{x}]$ è dispari. Qui, come usuale, indico con $[a]$ la parte intera di un numero reale a.

c) Provare che se f è di tipo Osc, e $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $|f'(x+1)| \leq |f'(x)|$, allora esiste un numero reale l tale che $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

2.3) (Punti 7) Siano
$$A := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -8 \leq x \leq \ln(8), 1 \leq y \leq e^x\right\}, \quad B_n := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : [nx] \ \text{ dispari}\right\},$$
per n intero positivo.

a) Calcolare l'area di A.

b) Provare che se f è una funzione continua da A in $\mathbf{R}$, allora esiste $\min\limits_A f$, e inoltre $\inf\limits_{A\cap B_n} f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \min\limits_A f$.

c) Provare che, se Y_n è l'area di $A \cap B_n$, e Y è l'area di A, allora $Y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}Y$.

2.4) (Punti 5) a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y^{\mathrm{iv}}(t) = 16y(t).$$
b) Data l'equazione differenziale
$$y'(t) = a + \arctan(y(t)), \tag{E_a}$$
al variare di $a \in \mathbf{R}$, provare che tutte le soluzioni y di (E_a) soddisfano $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, se e solo se $a \geq \frac{\pi}{2}$.

2.1) (Punti 7)
a) Sia $\alpha : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione che soddisfa $\alpha(x) \leq x \leq 5\alpha(x)$ per ogni $x \geq 0$. Provare che le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(a_n)$ hanno lo stesso carattere se $a_n \geq 0$.
b) Provare che esistono a_n e b_n tali che

$$|a_n| \leq |b_n|^{10\pi}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ non converge.}$$

c) Provare che se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f pari, $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, allora esistono a_n e b_n tali che

$$|a_n| \leq f(b_n), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ non converge.}$$

2.2) (Punti 6/7)
a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int e^x \ln(e^{2x} + 1)\, dx$.
b) Dire per quali interi positivi n la funzione β definita da $\beta(x) = x^n + e^x$ è crescente su tutto $\mathbf{R}$.
c) Sia f una funzione crescente, convessa e di classe C^2 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Provare che la funzione g definita da $g(x) = x + \cos\big(f(x)\big)$ è crescente su $\mathbf{R}$ se e solo se $\exists \lim_{x \to +\infty} f'(x) \leq 1$.

2.3) (Punti 5/6) Sia f la funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = \big(x^2 + y^2 - 3\big)^2$. Per $v \in \mathbf{R}^2$ poniamo $A_v = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ||(x, y)|| \leq 10, ||(x, y) - v|| > 1\big\}$.
a) Dire per quali $v \in \mathbf{R}^2$ con $||v|| \leq 5$ l'insieme A_v è compatto.
b) Dire per quali $v \in \mathbf{R}^2$ con $||v|| \leq 5$ esiste $\max_{A_v} f$ e per quali $v \in \mathbf{R}^2$ con $||v|| \leq 5$ esiste $\min_{A_v} f$.

2.4) (Punti 5)
a) Risolvere l' equazione differenziale

$$\sqrt{y'(t) + y(t)} = e^{2t} - 6e^t + a \tag{E}$$

quando $a = 0$.
b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ l'equazione (E) ha soluzioni definite su tutto $\mathbf{R}$.

2.1) (Punti 7) Sia $a_n > 0$ e definiamo

$$A = \left\{ \alpha \in \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} \text{ converge} \right\}, \quad B = \left\{ \alpha \in \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} \text{ diverge} \right\},$$

e supponiamo A e B non vuoti. In tale caso diciamo che la successione (a_n) è *bilanciata*.
a) Provare che, se $\alpha \in A$ e $\beta > \alpha$, allora $\beta \in A$.
b) Provare che $\sup B = \inf A$. Chiamiamo $c\big((a_n)\big)$ tale numero $\sup B = \inf A$.
c) Sia f una funzione di classe C^∞ su $\mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x > 0$. Quali valori può assumere il valore $c\big(f(a_n)\big)$ al variare di f con tali proprietà, e con (a_n) bilanciata con $c\big((a_n)\big) = -1$, $\big(f(a_n)\big)$ bilanciata?

2.2) (Punti 6) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua con $f(0) = 1$ e definiamo $g(x) = f(x) + f(-x)$. Diciamo che f è di tipo K se g è strettamente crescente in $[0, +\infty[$ e inoltre $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
a) Provare che g non può essere strettamente crescente su $\mathbf{R}$.
b) Provare che, se f è di tipo K, allora per ogni $a > 1$ esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = a$.
c) Determinare f di tipo K tale che, per ogni intero positivo n, f è derivabile in n e $(-1)^n f'(n) > 0$.

2.3) (Punti 7) Siano $A_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq a - |x|\}$ e $B = \{(x, y) \in A_1 : ||(x, y) - (0, 1)|| \geq \frac{1}{5}\}$.
a) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_{A_1} x^8 \, dxdy$.
b) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_{B} y \, dxdy$.
c) Determinare una funzione continua f su $\mathbf{R}^2$ tale che

$$\int_{A_a} f(x, y) \, dxdy = a(e^a - 1) \quad \forall \, a > 0 \, .$$

2.4) (Punti 4)
a) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 0$.
b) Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) + ay(t) = e^{3t} + e^{-t}$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2.1) (Punti 7) a) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n^2+1)^3}{n!}$.

b) Siano f_n funzioni continue e strettamente crescenti da $[0. + \infty[$ in $[0. + \infty[$ tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(x) \begin{cases} \text{converge se } & x < 1 \\ \text{diverge se } & x > 1 \end{cases}$. Supponiamo $a_n > 0$. Provare che, se $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, mentre se $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) > 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

c) Provare che se f_n sono come in b) allora esiste almeno una successione $a_n > 0$ tale che $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = 1$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, ed esiste almeno una successione $a_n > 0$ tale che $\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = 1$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

2.2) (Punti 6) Diciamo che una funzione g da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ ha la proprietà D se è continua, $g''(x) > 0$ per ogni $x > 0$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

a) Determinare una funzione con la proprietà D

b) Provare che se g ha la proprietà D allora $g(x) \leq x$ se $x \in [0,1]$ e $g(x) \geq x$ se $x \geq 1$.

c) Provare che per ogni $a > 1$ esiste g con la proprietà D tale che $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} < a$.

2.3) (Punti 6) Sia $A_n = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 : ||x - (0, \frac{1}{n})|| = \frac{1}{n} \right\}$, e sia $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

a) Provare che A è compatto.

b) Determinare il minimo della funzione α definita da $\alpha(x, y) = x^2$ su A.

c) Determinare il minimo della funzione β definita da $\beta(x, y) = x - y$ su A.

2.4) (Punti 5) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y'(t)y(t)}{y(t)^2+1} = t^2 \\ y(0) = c \end{cases}$$

al variare di c in un opportuno intorno di 0.

Prova dell'esame di cultura. 12/03/2010

2.1) (Punti 4) a) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + n^{100}}{4^n + n^9}$.
b) Dire per quali numeri interi h e k, maggiori di 1 converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(kn)!}{(n!)^h}\,.$$

2.2) (Punti 8) Sia f una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Dato $x_0 \in \mathbf{R}$ chiamiamo pseudoderivata di f in x_0 il limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ se tale limite esiste finito, e in tal caso denotiamo tale limite con $\hat{f}(x_0)$.
a) Provare che se esiste $f'(x_0)$ allora esiste anche $\hat{f}(x_0)$, ma non vale il viceversa.
b) Dire se è vero che se f ha pseudoderivata in tutti i punti di $\mathbf{R}$ e $f(0) = f(1)$, allora esiste $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $\hat{f}(x_0) = 0$.
c) Provare che se α è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e $\alpha(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, allora l'equivalenza

$$f'(x_0) = l \iff \frac{f(x_0 + \alpha(h)) - f(x_0)}{\alpha(h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} l$$

vale se e solo se $\alpha(1)\,\alpha(-1) < 0$.

2.3) (Punti 7) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g(x) = x^2$ se $x \in [-1, 1]$, e g periodica di periodo 2. Sia $A = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le g(x)\Big\}$.
a) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_B y\,dx\,dy \qquad B = \{(x, y) \in A : x \in [-1, 1]\}.$$

b) Posto $C_t = \Big\{(x, y) \in A : x \in [1, 51], y \le t\Big\}$, poniamo $r(t) = (t-1)^2 + \int_{C_t} y\,dx\,dy\,$.
Calcolare $r(t)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$, e dire se r ha minimo assoluto.
c) Posto $D_u = \{(x, y) \in A : x \in [1, u]\}$, dire se esiste finito il limite

$$\lim_{u\to+\infty} \int_{D_u} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}\,dx\,dy\,.$$

2.4) (Punti 5) a) Risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = 3^t y(t)$.
b) Risolvere l'equazione differenziale

$$7y'(t) + 2\sin(y'(t)) = 7\Big(3^t y(t)\Big) + 2\sin\Big(3^t y(t)\Big).$$

Prova dell'esame di cultura. 17/02/2010

2.1) (Punti 7)

a) Trovare una successione a_n tale che $a_n > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

b) Provare che se $b_n \geq 0$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, allora esiste a_n reale, tale che $a_n > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ diverge.

c) Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge ma non converge assolutamente, allora esiste b_n tale che $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ non converge.

2.2) (Punti 6) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua, e sia $g :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x) = \max_{t\in[0,x]} f(t)$.
a) Provare che g è continua.
b) Dire se g è (sempre) strettamente crescente.
c) Dire se, quando f è derivabile, anche g è derivabile.

2.3) (Punti 6) Sia A la palla chiusa in $\mathbf{R}^2$ di centro $(0,0)$ e raggio 1 e sia

$$C = \left\{(x,y) \in A : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

a) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A (x+7)\, dx\, dy\,.$$

b) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_C (x+7)\, dx\, dy\,.$$

c) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A \arctan(x)\, dx\, dy\,.$$

2.4) (Punti 5) a) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale
$y'(x) = \Big(y(x) + x^3\Big)^4 - 3x^2$. Si suggerisce di porre $z(x) = y(x) + x^3$.
b) Provare che la soluzione y del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sin\left(y(t)^3\right) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

soddisfa $y(100) < 102$.

Prova dell'esame di cultura. 10/12/2009

2.1) (Punti 8) Data una successione a_n reale, positiva e decrescente, e $\phi : \mathbf{N}\setminus\{0\} \to \mathbf{N}\setminus\{0\}$ strettamente crescente,

a) Provare che, se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ converge.

b) Provare che se $\phi(n) = n^2$, allora esiste a_n reale, positiva e decrescente tale che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

c) Provare che se $\phi(n+1) - \phi(n)$ è una successione limitata, allora se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ converge, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

d) Provare che esiste $\phi : \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{N} \setminus \{0\}$ strettamente crescente, tale che la successione $\phi(n+1) - \phi(n)$ è illimitata, e se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ converge, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

2.2) (Punti 6) a) Provare che la funzione f definita da $f(x) = e^x \sin x$ non è strettamente crescente su $]0, +\infty[$.

b) Provare che, se g è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ periodica e di classe C^1, allora esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che la funzione f definita da $f(x) = e^x(g(x) + a)$ è strettamente crescente su $]0, +\infty[$.

c) Dire se quanto in b) vale se g è solo continua e periodica.

2.3) (Punti 6) Sia $u(x, y) = \max\big\{2 - (x^2 + y^2), 0\big\}$. Sia E la palla aperta in $\mathbf{R}^2$ di centro $(0, 0)$ e raggio 10.

a) Calcolare l'integrale doppio

$$\int_E u(x, y)\, dx\, dy\,.$$

b) Provare che esistono $b_n \in \mathbf{R^2}$ tali che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} u\big((x, y) - b_n\big)$ converge puntualmente su $\mathbf{R^2}$.

c) Provare che, nel caso descritto in b), la successione b_n è illimitata.

2.4) (Punti 4) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{1}{(y(t))^2 e^{(y(t))^3}}$$

in un opportuno intervallo. Non si pretende di determinare tale intervallo. Dire invece se ci sono soluzioni della data equazione differenziale definite su $\mathbf{R}$.

Prova dell'esame di cultura. 13/10/2009

2.1) Sia $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty[$ continua e non identicamente nulla.
a) Provare che esistono numeri reali a e b con $a < b$ tali che $f(x) > 0$ se $x \in]a, b[$.
b) Provare che se α è una applicazione bigettiva da $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ in $\mathbf{Q}$, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f\big(\alpha(n)\big)$ diverge.

2.2)
a) Provare che la funzione g definita da $g(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ è limitata su $]0, +\infty[$.
b) Dire se esiste finito l'integrale $\int_0^1 g(x)\, dx$.
c) Dire per quali $\alpha > 0$ esiste finito l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^\alpha}\, dx$
d) Dire per quali $\alpha > 0$ vale la disuguaglianza

$$x - \sin x \le x^\alpha (1 - \cos x) \quad \forall x \in]0, 1] \,.$$

2.3) Sia $u(x, y) = y - \ln(1 + x^2)$.
a) Dato $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ln(1 + x^2) \le y \le 5\big\}$, calcolare, se esistono,

$$\min_{(x,y)\in A} u(x, y), \qquad \max_{(x,y)\in A} u(x, y) \,.$$

b) Data la funzione β definita da $\beta(t) = t^3 - t$, dire per quali $k > -5$, ogni funzione continua v da A in $\mathbf{R}$ tale che $\min_{(x,y)\in A} v(x, y) = -5$, $\max_{(x,y)\in A} v(x, y) = k$, soddisfa $\max_{(x,y)\in A} \beta\big(v(x, y)\big) = \beta(k)$.

2.4) Sia dato il problema differenziale P_d

$$\begin{cases} y''(t) = \big|3y'(t) + 5(y(t))^d\big| \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

a) Determinare, nel caso $d = 1$, le soluzioni di P_d in un opportuno intorno di 0.
b) Provare che comunque dato $d > 0$ ogni soluzione di P_d in un intervallo della forma $]a, b[$ con $a < 0 < b$ è crescente in $[0, b[$.

2.1) a) Provare che se a_n è una successione tale che $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 1$ per ogni numero naturale n, allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge.
b) Provare che esiste una successione a_n illimitata tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $m \in \mathbf{N}$ tale che $n \le m$ e $\sum\limits_{i=n}^{m} a_i = 0$.

2.2) Diciamo che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ha la proprietà S se è di classe C^1, e inoltre
i) $f(x) = 0$ se x è un intero pari
ii) $f'(x) > 0$ se $x \in]n, n+1[$ con n intero pari
iii) $f'(x) < 0$ se $x \in]n, n+1[$ con n intero dispari.
a) Provare che se f ha la proprietà S, allora per ogni $a > 0$ l'equazione $f(x) = a$ ha al massimo un numero finito di soluzioni su un fissato intervallo limitato.
b) Provare che se f ha la proprietà S, allora esiste $a > 0$ tale che l'equazione $f(x) = a$ ha almeno 12 soluzioni.
c) Provare che esiste f con la proprietà S tale che per ogni $a > 0$ l'equazione $f(x) = a$ ha al massimo un numero finito di soluzioni in $\mathbf{R}$.

2.3) Sia $g(x, y) = x^2 + y^2$.
a) Dato $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \le y \le x + 1, 1 \le x \le 2\big\}$, calcolare l'integrale doppio

$$\int_A g(x, y)\, dx\, dy\,.$$

b) Sia α una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, di classe C^1 su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ e tale che $0 \le \alpha(x) \le x^2$. Definiamo $v_n(x) = \frac{\alpha(x)}{g(x,n)}$. Provare che per ogni x la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ converge.
c) Posto $v(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$, provare che v è derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
d) Si può affermare che v è sempre derivabile in 0?

2.4) Risolvere, al variare di $a \in \mathbf{R}$, l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{ax}\,.$$

2.1) a) Dire se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left[n\sqrt{2}\right]}$ converge e se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left[\sqrt{2n^3}\right]}$ converge.
b) Provare che se $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ è una funzione con la proprietà che $|f(x) - x| \leq 7$ per ogni $x \in [1, +\infty[$, allora, per ogni successione a_n con $a_n \in]0, 1]$, le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f\left(\frac{1}{a_n}\right)}$$

hanno lo stesso carattere.

2.2) a) Provare che se $u(t) = \sin^3(2\pi t)\cos(2\pi t)$, allora

$$\int_x^{x+1} u(t)\, dt = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

b) Provare che se una funzione $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua soddisfa $\int\limits_x^{x+1} u(t)\, dt = 0$ per ogni numero reale x, allora u è periodica di periodo 1.
c) Provare che se v_1 e v_2 sono funzioni continue da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e le equazioni

$$\int_x^{x+1} u(t)\, dt = v_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}. \tag{E_i}$$

per $i = 1, 2$ ammettono almeno una soluzione, allora esiste una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni di (E_1) e le soluzioni di (E_2). Per soluzione di (E_i) si intende ovviamente una funzione continua u che soddisfa (E_i).

2.3) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1, x + 2y \geq 1\}$,

$$g_1(x, y) = xy, \quad g_2(x, y) = 7x + \cos(x) + x\sin(y) + y^2$$

a) Calcolare, se esistono,

$$\min_{(x,y)\in A} g_1(x, y), \quad \max_{(x,y)\in A} g_1(x, y)$$

b) Provare che se g_1 assume un valore nell'interno di A almeno una volta, allora assume tale valore in infiniti punti nell'interno di A.
c) Provare che se g_2 assume un valore nell'interno di A almeno una volta, allora assume tale valore in infiniti punti nell'interno di A.

2.4) Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 3^a y'(x) + 7 \cdot 2^a y(x) = 0$$

Prova dell'esame di cultura. 17/03/2008

2.1) Sia f la funzione definita da $f(x) = 5^x - 40 \cdot 3^x$.
a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.
b) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\big(f(x)+39\big)}{x+\sin x}$.
c) Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che esiste finito $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\Big(f\big(\frac{1}{x}\big)+39-a\frac{1}{x}\Big)$.

2.2) Sia data una funzione $g : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ continua e tale che $g(x) > 0$ per ogni $x \in [0,+\infty[$. Supponiamo inoltre che l'integrale improprio di g su $[0,+\infty[$ sia convergente, ossia esiste finito

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b g(x)\,dx\,.$$

a) Provare che la successione $a_n = \int\limits_0^{+\infty} g(x)\,dx - \int\limits_0^n g(x)\,dx$ è convergente.
b) Provare che la successione $b_n = \int\limits_{n^2}^{2n^2} g(x)\,dx$ è convergente.
c) Provare che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{n^2}^{n^2+n} g(x)\,dx$ è convergente.

2.3) Sia $A_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 100\sqrt{|x|} \le y \le 1+ax\}$ e poniamo $A = A_0$; sia $u(x,y) = x+y$.
a) Calcolare, se esistono, $\max\limits_{x,y\in A} u(x,y)$, $\min\limits_{x,y\in A} u(x,y)$.
b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $\max\limits_{x,y\in A_a} u(x,y)$.

2.4) Sia data l'equazione differenziale

$$y''(x) + b^2 y(x) = 7y(x)\,. \tag{E_b}$$

a) Dire per quali $b \in \mathbf{R}$ tutte le soluzioni di E_b sono limitate.
b) Provare che se y è una soluzione non limitata di E_b, allora y non può assumere piú di due volte lo stesso valore, ossia per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $y(x) = a$ ha al massimo due soluzioni.

Prova dell'esame di cultura. 17/02/2009

2.1) In questo esercizio sia f una funzione da $]0,+\infty[$ in $]0,+\infty[$ e la successione a_n sia *sempre positiva* (cioè $a_n > 0$ per ogni n) e tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) Provare che se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(a_n + \frac{1}{2^n}\right)$ diverge.

b) Provare che se $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} l > 0$, allora $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(a_n)$ diverge.

c) Provare che $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(a_n) \text{ diverge }\right)$ se e solo se $\left(\liminf\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} > 0\right)$.
Ricordo che per definizione

$$\liminf_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \sup_{a>0} \left(\inf_{x\in]0,a[} \frac{f(x)}{x} \right).$$

2.2) Sia g_a la funzione da $]0,+\infty[$ in $]0,+\infty[$ definita da $g_a(x) = x^a + 2^x$.
a) Provare che per ogni $a > 0$ l'equazione $g_a(x) = 5$ ha un'unica soluzione che denotiamo con $h(a)$.
b) Provare che la funzione $h :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definita sopra è continua.
c) Dire se h è anche derivabile.

2.3) a) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \cos(x) \le y \le 1 - \cos(x), 0 \le x \le 10\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x \, dx \, dy \, .$$

b) Provare che se α e β sono funzioni continue da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che β è limitata e $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\alpha(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, allora l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

è compatto.

2.4) a) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = 5y(x)$.
b) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $\frac{d}{dx}\left(y'(x)y(x)^2\right) = 5y'(x)y(x)^2$.