**Programma (dettagliato) del corso di Analisi Matematica II per
Ingegneria Medica e delle Tecnologie di Internet. Anno Accad. 2012/13**

NOTA IMPORTANTE: per gli studenti di Ingegneri medica quello qui sotto è il programma completo del corso, mentre gli studenti di Tecnologie di Internet e di TLC avranno in programma solo i **PRIMI 6 PUNTI** qui sotto (fino a 6. Integrali doppi e formula di Green, incluso) e non gli altri 2, ma dovranno portare in programma anche il programma del minicorso che hanno seguito a gennaio sulla variabile complessa.

1. Spazi metrici. Spazi metrici ed esempi di metrica. Metrica euclidea. Norma (euclidea) in $\mathbf{R}^n$ e relazione con la metrica. Basi e prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$. Disuguaglianza di Schwarz. Palle, sfere, insiemi aperti e insiemi chiusi. Interno, parte esterna, frontiera e chiusura di un insieme, insiemi limitati, e relative proprietà. Punti di accumulazione e isolati. Successioni e loro limiti in spazi metrici. Caratterizzazione della chiusura di un insieme e di un insieme chiuso mediante successioni in spazi metrici. Limiti di successioni in $\mathbf{R}^n$ in relazione al limite delle loro proiezioni. Limiti di funzioni e funzioni continue in spazi metrici. Continuità di somma, prodotto, differenza e quoziente di funzioni continue a valori reali, della composizione di funzioni continue e delle funzioni costanti, e delle proiezioni e delle funzioni lineari in $\mathbf{R}^n$. Elemento infinito in $\mathbf{R}^n$. Limiti e continuità di funzioni a valori in $\mathbf{R}^n$ si riducono alla proprietà analoghe delle componenti. Successioni di Cauchy, convergenti, limitate; le successioni convergenti sono limitate, e le successioni limitate hanno un'estratta convergente. Insiemi compatti (per successioni) e caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di $\mathbf{R}^n$ come insiemi chiusi e limitati. Funzioni uniformemente continue. Teoremi sulle funzioni continue sui compatti. Teorema ponte. Cambio di variabile nei limiti, proprietà dei limiti. Limiti in coordinate polari. Insiemi connessi e (senza dimostrazione) caratterizzazioni degli aperti connessi mediante poligoni o curve continue.

2. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^n$. Derivate parziali e direzionali e differenziabilità e relazione di tali nozioni con la continuità. Differenziabilità implica derivate direzionali, e scrittura di queste in base al gradiente. Teorema del differenziale totale (senza dimostrazione), funzioni C^1 . Piano tangente. Insiemi convessi, teorema di Lagrange sul segmento. Derivate di ordine superiore e funzioni C^k . Matrice hessiana, Teorema di Schwarz. Derivate direzionali di secondo ordine e relazione con matrice hessiana. Polinomio di Taylor del secondo ordine, e (senza dimostrazione) resto di Peano e di Lagrange. Punti di massimo e di minimo (assoluto e relativo); condizioni del primo ordine e punti stazionari, punti di sella; condizioni necessarie e condizioni sufficienti del secondo ordine in termini della matrice hessiana. Metodo per la ricerca di estremi assoluti per funzioni di più variabili. Calcolo differenziale e continuità per funzioni a valori vettoriali, in particolare derivate parziali e direzionali, differenziale. Matrice Jacobiana e suo uso per scrivere il differenziale, relazioni tra differenziabilità e continuità, e tra derivate prime continue e dif-

ferenziabilità (teorema del differenziale totale, senza dimostrazione). Regola della catena e applicazioni. Funzioni di classe C^k .

3. Sommatorie e serie numeriche. Sommatorie: definizione e semplici proprietà. Esempi notevoli di sommatorie, in particolare somma dei primi n numeri interi positivi e somma di una progressione geometrica. Serie: somma di una serie, somme parziali, serie convergenti, divergenti e indeterminate. Serie a termini non negativi, e loro proprietà di essere convergenti o divergenti. Serie geometrica, serie armonica e serie armonica generalizzata. Relazione tra convergenza di una serie e convergenza a 0 del termine generale della serie. Effetto del cambiamento dei primi termini su una serie. Spezzamento di una serie in una somma di un numero finito di termini e di un'altra serie. Linearità della somma di una serie. Criteri del confronto, del confronto asintotico, del rapporto, della radice, di condensazione e integrale, per serie a termini non negativi o positivi. Criterio di Cauchy per le serie. Serie a termini di segno variabile. Relazione tra convergenza assoluta di una serie e convergenza (semplice) della serie stessa. Criterio di Leibniz. Criteri del rapporto e della radice per serie a termini di segno variabile. Serie telescopiche. Cenno a relazione tra serie e sviluppo decimale di un numero. Cenno ai riordinamenti di una serie.

4. Successioni e serie di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme di successioni e serie di funzioni, e loro relazione con continuità, derivata e integrale. Criterio di Cauchy uniforme. Convergenza totale e relazione tra convergenza uniforme di una serie di funzioni e convergenza uniforme a 0 della successione associata. Serie di potenze: insieme di convergenza, raggio di convergenza, integrazione termine a termine e derivazione termine a termine. Il raggio di convergenza di una serie di potenze è lo stesso di quello della serie delle derivate, convergenza uniforme in intervalli chiusi dentro il cerchio di convergenza. Serie di Taylor. Condizioni perché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor. Serie di Taylor delle principali funzioni. Esempio di una funzione la cui serie di Taylor converge ma non alla funzione stessa (cenno). Ogni serie di potenze è una serie di Taylor; concetto di funzione analitica. Serie di Fourier: coefficienti di Fourier, teorema della convergenza puntuale (senza dimostrazione), serie di Fourier di funzioni pari e di funzioni dispari.

5. Curve e integrali curvilinei, forme differenziali. Curve, curve semplici, piane, chiuse, di Jordan. Teorema delle curve di Jordan (enunciato), orientazione di una curva di Jordan. Curve C^1 , regolari, C^1 a tratti, regolari a tratti. Vettore tangente a una curva, vettore velocità. Cambiamento di parametro in una curva. Integrali di funzioni a valori vettoriali, semplici proprietà, in particolare la norma dell'integrale è minore o uguale dell'integrale della norma. Lunghezza di una curva e formula per la lunghezza di una curva con integrale della norma della derivata. Curve rettificabili. Integrale curvilineo di prima specie, e invarianza della lunghezza e dell'integrale curvilineo per cambio di parametrizzazione. Parametrizzazione per lunghezza d'arco. Integrale curvilineo di seconda specie e sua formulazione in termini di integrale di una forma differenziale. Invarianza (a meno del segno) di tale integrale per cambio di parametrizzazione. Forme differenziali esatte (o campi conservativi) e formulazione equivalenti: esistenza di una primitiva, integrali lungo cammini; costruzione di una primitiva (o potenziale). Forme differenziali chiuse (o campi

irrotazionali), definizione di rotore per funzioni da R^3 in R^3 . Ogni forma esatta è chiusa, ma non vale il viceversa. Definizione di curve omotope e di insieme semplicemente connesso. I convessi sono semplicemente connessi. L'integrale di una forma chiusa è invariante per omotopia (senza dimostrazione), in particolare sui semplicemente connessi ogni forma chiusa è esatta.

6. Integrali doppi e formula di Green. Integrali doppi: definizione di integrale e di integrabilità su un rettangolo, ogni funzione continua su un rettangolo è integrabile, integrale delle funzioni costanti. Principali proprietà delle funzioni Riemann-integrabili e degli integrali di Riemann su un rettangolo. Formula di riduzione per integrali di Riemann su un rettangolo. Definizione di integrale di Riemann di funzioni su un insieme limitato. Insiemi misurabili e insiemi di misura nulla e loro proprietà, in particolare un insieme è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla (dimostrazione facoltativa). Proprietà delle funzioni integrabili su insiemi limitati. Domini normali e formula di riduzione degli integrali doppi su domini normali. Integrali su unioni quasi disgiunte di domini semplici. Formula del cambio di variabile in integrali doppi (senza dimostrazione). Coordinate polari. Integrali (in una variabile) dipendenti da un parametro: continuità e derivata della funzione integrale. Formule di Green nel piano: dimostrazione per domini normali rispetto ad entrambi gli assi, e spiegazione in casi concreti di come la formula si estende in domini più generali. Teorema della divergenza nel piano.

7. Integrali tripli e superficiali e collegamenti tra di loro. Integrali tripli, visti in analogia con gli integrali doppi: Definizioni e principali proprietà analoghe a quelle degli integrali doppi, incluse definizioni e proprietà di insiemi misurabili, di misura di un insieme e di insiemi di misura nulla. Formule di riduzione per integrali tripli sia su prodotti di intervalli, sia su domini normali, integrazione per fili e per strati, volumi di insiemi. Area dell'immagine di un insieme tramite omotopia. Formula di cambio di variabile negli integrali tripli (senza dimostrazione), coordinate cilindriche e coordinate sferiche. Superfici e parametrizzazione di superfici, superfici regolari, punti interni e punti di bordo di una superficie. Piano tangente e normale ad una superficie regolare in un punto. Area di una superficie. Integrali superficiali. Versori normali ad una superficie regolare. Orientazioni di superfici e superfici orientabili, orientazione del bordo di una superficie. Superfici "composte" e loro orientazione. Flusso lungo una superficie e teorema della divergenza nello spazio. Teorema di Stokes e considerazioni collegate.

8. Teoremi dell'inversione locale e delle funzioni implicite e conseguenze. Teoremi dell'inversione locale e delle funzioni implicite con casi particolari (senza dimostrazione). Curve nel piano e superfici nello spazio in forma implicita. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Nota: in genere non è considerato importante *ricordare* le dimostrazioni ma avere afferrato i concetti, per cui le dimostrazioni più semplici vengono spontanee, e non è importante ricordare quelle più complicate.

Per gli argomenti si può fare riferimento al libro adottato che, ricordo, è
Autori: Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli;
Titolo: ANALISI MATEMATICA;
Casa Editrice McGraw-Hill.; ISBN 978-88-336-6281-2.