Programma del corso di Teoria della Misura (CAM1) del 2010/11

1. Cardinalità. Concetti generali sulla cardinalitaà. Insiemi di cardinalità minore, minore o uguale, uguale. Proprietà generali. Insiemi numerabili e cardinalità del numerabile come la piú piccola cardinalità infinita. Teorema di Cantor-Bernstein. Cardinalità del continuo. Esempi.

2. Teoria generale della misura. Algebre e σ-algebre. Funzioni additive e σ-additive di insieme. Misure, misure finite e σ-finite, misure complete. Spazi misurabili e spazi di misura. Limite superiore e limite inferiore di insiemi, e relazione con la misura. Classi monotone e teorema di estensione di Halmos. Misure esterne, estensione a una σ-algebra di funzioni σ-additive su un'algebra, teorema di Carathéodory. Misure di Borel e di Radon. Misura di Lebesgue in $\mathbf{R}$ e in $\mathbf{R}^N$. Insiemi boreliani e insiemi Lebesgue-misurabili. Invarianza per traslazione e per rotazione. Cubi diadici e aperti visti come unione di cubi diadici. Insieme di Cantor (a livello di esercizi). Proprietà di regolarità delle misure di Borel e di Radon. Misure di Radon invarianti per traslazione in $\mathbf{R}^N$.

3. Funzioni misurabili. Funzioni misurabili e funzioni di Borel. Caratterizzazioni delle funzioni misurabili a valori reali o a valori reali estesi. Relazione tra misurabilità e continuità. Lo spazio delle funzioni misurabili è chiuso rispetto a somma, prodotto, massimo, minimo, sup e inf numerabili, massimo e minimo limite. Funzioni semplici. Ogni funzione misurabile nonnegativa è limite crescente di funzioni semplici. Convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura, e relazioni tra di loro. Teorema di Lusin.

4. Integrazione. Integrale di funzioni semplici nonnegative. Integrale di funzioni misurabili nonnegative. Integrali di funzioni misurabili. Funzioni integrabili e sommabili. Le funzioni sommabili sono finite quasi ovunque. Principali proprietà dell'integrale: linearità, integrale del modulo e modulo dell'integrale, crescenza dell'integrale rispetto alla funzione integranda, integrali di funzioni coincidenti quasi ovunque, una funzione misurabile nonnegativa ha integrale 0 se e solo se è nulla quasi ovunque. Assoluta continuità dell'integrale. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: Teorema di Beppo Levi, Lemma di Fatou, Teorema della convergenza dominata, e conseguenze. Continuità e derivata della funzione integrale, dipendente da un parametro. Esempi.

5. Spazi L^p. Spazi $\mathcal{L}^p$ e L^p per $1 \leq p < \infty$ e per $p = \infty$. Loro completezza. Teorema di Riesz-Fischer. Disuguaglianze di Holder e Minkowski e conseguenze. Relazione tra norma L^p e norma L^∞ (senza dimostrazione). La convergenza in L^p implica la convergenza in misura. Separabilità degli spazi L^p e densità delle funzioni continue a supporto compatto in L^p quando $p < \infty$.

6. Misure prodotto. σ-algebra prodotto. Misure prodotto. Misure prodotto e σ-algebre prodotto in $\mathbf{R}^n$. Teoremi di Tonelli e di Fubini.

7. Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata. Le funzioni monotone sono misurabili. Le funzioni monotone hanno al massimo un insieme numerabile di punti di discontinuità. Una funzione monotona è derivabile quasi ovunque (dimostrazione facoltativa). Variazione totale di funzioni a valori reali e funzioni a variazione limitata. Principali proprietà della variazione totale e delle funzioni a variazione limitata. Le funzioni a variazione limitata costituiscono uno spazio vettoriale e sono esattamente le funzioni differenza di due funzioni crescenti. Funzioni assolutamente continue. Le funzioni assolutamente continue sono a variazione limitata, ma non vale il viceversa. Le funzioni assolutamente continue costituiscono uno spazio vettoriale. Relazione tra funzioni assolutamente continue e funzioni integrali di funzioni L^1. Una funzione assolutamente continua con derivata nulla quasi ovunque è costante (senza dimostrazione). Teorema fondamentale e formula fondamentale del calcolo integrale per funzioni assolutamente continue e versione corrispondente per funzioni a variazione limitata.

Libro di testo consigliato (indicato con CD):

Piermarco Cannarsa, Teresa D'Aprile, *Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale*, Springer 2008.
Si intende che faccio riferimento all'edizione del 2008 per la numerazione; non so se esistano altre edizioni.

A livello indicativo, fare riferimento per il programma a CD, nei seguenti capitoli:

Capitolo 1: tutto tranne lemma 1.28 (lemma di Borel-Cantelli) e il teorema 1.71, dove abbiamo visto solo il caso particolare in cui T è una rotazione.

Capitolo 2: Tutto tranne il paragrafo 2.5.2 (sommabilità uniforme). Inoltre, per quanto riguarda la definizione di integrale per funzioni misurabili nonnegative e il teorema di Beppo Levi, invece che su CD, mi sono basato sulle dispense messe in rete sulla pagina web del corso cliccando su *Dispense sulla definizione di integrale e sul teorema di Beppo Levi*. Se qualcuno vuole studiare tali argomenti su CD (e precisamente paragrafi 2.4.2, 2.4.3, e quella parte di 2.4.4 fino al teorema di Beppo Levi incluso) può, ma secondo me sulle dispense sembra piú semplice. Detto in modo esplicito, si intende che nel programma si possono saltare paragrafi 2.4.2, 2.4.3, e quella parte di 2.4.4 fino al teorema di Beppo Levi incluso, studiando tali parti invece sulle dispense relative.

Capitolo 3: Dimostrazioni di Proposizione 3.28 e 3.29 facoltative. Proposizioni 3.36 e 3.39 facoltative, Corollari 3.40, 3.42, 3.43 non sono in programma. Proposizione 3.47 dimostrata solo se $A = \mathbf{R}^N$, Proposizione 3.49 non è in programma. IL resto del capitolo è in programma.

Capitolo 4: Il paragrafo 4.1 è in programma, quelli successivi no.

Capitolo 7: Tutto tranne dimostrazione di Teorema 7.6 (tale dimostrazione è facoltativa), Proposizione 7.19, dimostrazione di Lemma 7.33, Corollario 7.37.

Nei capitoli di CD diversi da 1,2,3,4,7 non ci sono parti del programma. NOTA: Nei capitoli detti non ho segnalato quali esempi, esercizi e osservazioni sono state fatte. La parte di cardinalità non è su CD, e si può trovare sulle dispense messe in rete sulla pagina web del corso, cliccando su *Dispense sulla cardinalità*. Notiamo che in tali dispense c'è qualcosa in piú del programma, ma è bene leggerle per avere confidenza. La dimostrazione del teorema 1.6 di tali dispense NON è parte del programma.