Programma del corso di Analisi I per Ingegneria 2013/14, canale Sb-Z, docente Roberto Peirone

Teoria degli insiemi. Insiemi, elementi, appartenenza, sottoinsiemi, insieme vuoto, inclusioni, unioni e intersezioni finite e infinite, differenza, prodotto cartesiano.

Proprietà dei numeri reali. Definizione assiomatica dei numeri reali. Proprietà della somma, del prodotto, della relazione $\leq$, viste come conseguenze degli assiomi. Insiemi limitati, superiormente limitati, inferiormente limitati. Massimo e minimo di un insieme. Definizione ed esistenza dell'estremo superiore ed estremo inferiore di insiemi non vuoti di numeri reali. Intervalli, intervalli aperti, chiusi, semiaperti, estremo superiore ed inferiore di intervalli. Definizione e proprietà del valore assoluto (in particolare disuguaglianza triangolare). Densità dell'insieme dei numeri razionali e di quello dei numeri irrazionali. Richiami su soluzioni di equazioni e disequazioni (soprattutto a livello di esercizi). Radice n-esima di un numero reale, distinguendo il caso n pari e n dispari. Principio di induzione e semplici conseguenze, principio del buon ordinamento, disuguaglianza di Bernoulli. Numeri naturali, interi e razionali. Parte intera. Sommatorie: definizioni e semplici proprietà, somma dei primi n interi positivi e di una progressione geometrica. Richiami delle definizioni e proprietà delle potenze ad esponente naturale, intero, razionale, reale. Simboli $+\infty$, $-\infty$, numeri reali estesi. Cenno ai numeri primi. Polinomi. Richiamo della divisione tra polinomi (cenno). Relazioni tra radici di un polinomio e divisibilità per monomi di primo grado. Principio di identità dei polinomi, relazioni tra numero di radici di un polinomio e suo grado.

Geometria analitica e trigonometria. Piano cartesiano. Distanza tra due punti del piano. Equazione della circonferenza di centro dato e raggio dato. Richiami (veloci) di trigonometria: angoli in radianti, definizione di seno, coseno e tangente (tangente anche come rapporto tra seno e coseno), loro valore negli angoli fondamentali, intervalli di positività, proprietaà di periodicit à, insieme di definizione della tangente, relazione fondamentale tra seno e coseno e conseguenza che il seno e il coseno sono sempre compresi tra -1 e 1, seno e coseno di angoli collegati. Seno e coseno e tangente della somma e della differenza. Formule di duplicazione e di bisezione.

Numeri complessi. Idea informale e definizione rigorosa dei numeri complessi. Operazioni sui numeri complessi, in particolare somma e prodotto, reciproco e quoziente. Parte reale e parte immaginaria, modulo, argomento e coniugato di un numero complesso. Proprietà del modulo e del coniugato. Forma trigonometrica di un numero complesso non nullo, e prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica. Radici ennesime di un numero complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione) e decomposizione di un polinomio reale in prodotto di polinomi reali di primo e di secondo grado. Ogni polinomio a coefficienti reali, se ha una radice, ha come radice anche la sua complessa coniugata.

Successioni numeriche. Successioni. Definizione di limite (finito o infinito) di una successione. Unicità del limite. Il limite dipende solo dal comportamento della successione per i valori da un certo indice in poi. Relazione tra convergenza o divergenza di una successione e sua limitatezza. Operazioni con i limiti e teoremi di confronto. Teorema della permanenza del segno e conseguenze. Forme indeterminate. Limiti notevoli (in particolare limiti di successioni potenza, esponenziale, fattoriale, e confronto tra di loro). Limiti di successioni monotone. Numero e. Punti di accumulazione, intorno di un punto (finito o infinito) e definizione di limite vista con gli intorni. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Sottosuccessioni (o successioni estratte). Relazione tra limite di una successione e di una sua estratta. Ogni successione ha una sottosuccessione che ha limite, e se limitata ha una sottosuccessione convergente. Successioni di Cauchy. Una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.

Definizioni principali sulle funzioni. Definizione di funzione (tra insiemi). Funzioni invettive, suriettive, biiettive (o corrispondenze biunivoche) tra insiemi. Composizione di funzioni e inversa di una funzione. Immagine di una funzione. Funzioni reali monotone e strettamente monotone, limitate, limitate superiormente, limitate inferiormente, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore di funzioni. Dominio di una funzione. Grafici di funzioni. Grafici delle funzioni fondamentali, in particolare delle funzioni del tipo $ax + b$ e del tipo $x^2 + bx + c$, interpretazione grafica delle equazioni e disequazioni di secondo grado. Grafico x^α e a^x. Grafico della funzione $|x|$, parte intera di x, seno, coseno, tangente, logaritmo, arcotangente Grafici delle funzioni $f(x) + c$, $f(x + c)$, $cf(x)$, $f(cx)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$ una volta noto il grafico di f.

Limiti di funzioni e continuità. Limiti di funzioni in punti di accumulazione del dominio della funzione. Caratterizzazione del limite di funzione mediante limiti di successioni (teorema ponte), unicità del limite, operazioni con i limiti e teoremi di confronto. Forme indeterminate. Teorema della permanenza del segno e conseguenze. Cambio di variabili nei limiti. Limiti destro e sinistro. Limiti notevoli. Limiti di funzioni monotone. Funzioni continue, definizione e caratterizzazione con successioni. Dipendenza del limite e della continuità di una funzione in un punto dai soli valori della funzione in un intorno di quel punto. Continuità di somma, differenza, prodotto, quoziente e composizione di funzioni continue. Esempi di funzioni continue, in particolare continuità dei polinomi, delle funzioni trigonometriche, delle funzioni esponenziali, dei logaritmi, del valore assoluto. Teoremi fondamentali sulle funzioni continue: della permanenza del segno, degli zeri, dei valori intermedi, di Weierstrass. Funzioni uniformemente continue e teorema di Heine-Cantor. Funzione inversa di una funzione continua e strettamente monotona. Stretta monotonia e continuità dell'inversa di una funzione continua e strettamente monotona su un intervallo. Logaritmo (in base qualunque) e arcotangente, arcoseno, arcocoseno. Richiami sulle proprietà fondamentali dei logaritmi.

Calcolo differenziale. Definizione di derivata e sua interpretazione come coefficiente angolare della retta tangente e come velocità. Relazione tra derivabilità e continuità. Rapporto incrementale. Derivazione di somma, prodotto, quoziente, composizione e inversa di funzioni. Derivazione delle funzioni elementari. Definizione di estremo relativo. Relazione tra derivata e monotonia di una funzione, tra derivata nulla e funzione costante, tra annullamento della derivata ed estremi relativi. Teoremi di Rolle, di Lagrange e di Cauchy. Formule di L'Hopital. Derivate successive. Funzioni convesse e concave (e strettamente convesse e strettamente concave), e caratterizzazione mediante la monotonia del rapporto incrementale, mediante la monotonia della derivata prima e mediante il segno della derivata seconda. Studio del grafico di una funzione mediante il calcolo differenziale. Funzioni di classe C^n, $n = 1, 2, 3, ..., \infty$. Formula di Taylor, resto di Peano e suo uso per il calcolo dei limiti. Resto di Lagrange della formula di Taylor. Teorema del binomio. Polinomi di Taylor di funzioni fondamentali (seno, coseno, e^x, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^a$, centrati in 0.)

Calcolo integrale. Concetto di integrale come formalizzazione dell'idea di area. Definizione di integrale (di Rieamnn) e di funzione integrabile; condizione equivalente all'integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, e cenno a quelle continue salvo un numero finito di punti e limitate. L'integrale di una funzione non cambia se la funzione cambia solo in un numero finito di punti. Integrale anche con estremi arbitrari (cioè quando il secondo estremo di integrazione può essere minore del primo). Proprietà dell'integrale (linearità, additività rispetto agli estremi di integrazione, crescenza dell'integrale rispetto alla funzione integranda, relazione tra integrale del modulo e modulo dell'integrale). Teorema fondamentale del calcolo integrale e suo uso per calcolare gli integrali definiti (formula fondamentale del calcolo integrale). Teorema della meda integrale. Primitive e integrale indefinito. Integrali delle funzioni fondamentali. Integrale indefinito della combinazione lineare. Integrazione per parti e per sostituzione. Esempi di calcolo di integrali, integrazione delle funzioni razionali. Seno e coseno iperbolici e funzioni inverse, e loro uso per il calcolo di integrali. Integrali impropri sia al finito, sia a $+\infty$, sia a $-\infty$. Integrabilità a 0^+ e a $+\infty$ delle funzioni x^a. Le funzioni non negative hanno sempre integrale improprio (finito o $+\infty$). Criteri per avere integrale improprio finito: criteri del confronto e del confronto asintotico per funzioni non negative, e criterio della convergenza assoluta.

Funzioni di piú variabili. Insieme $\mathbf{R}^n$; prodotto scalare e norma in $\mathbf{R}^n$. Proprietà della norma, in particolare disuguaglianza triangolare. Palle, insieme aperti, chiusi, chiusura, interno, frontiera di un insieme. Successioni e loro limiti in $\mathbf{R}^n$ e relazione col limite delle loro proiezioni. Caratterizzazione di un insieme chiuso mediante successioni in $\mathbf{R}^n$. Limiti e continuità per funzioni di piú variabili (ossia qui e nel seguito funzioni da sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ a valori in $\mathbf{R}$). Caratterizzazione della chiusura di un insieme e di un insieme chiuso in $\mathbf{R}^n$ mediante limiti di successioni. Algebra dei limiti per funzioni di n variabili a valori in $\mathbf{R}$, e altre generalizzazioni di proprietà dei limiti di funzioni reali. Continuità di somma, prodotto, differenza e quoziente di funzioni continue a valori reali, e delle proiezioni in $\mathbf{R}^n$. Continuità della composizione di funzioni continue e cambio di variabile nei limiti. Esempi di funzioni continue. Successioni di Cauchy, convergenti, limitate; successioni limitate hanno estratta convergente. Insiemi limitati in $\mathbf{R}^n$ e caratterizzazione con la limitatezza delle proiezioni. Insiemi compatti (per successioni) e insiemi chiusi e limitati. Funzioni uniformemente continue. Teoremi sulle funzioni continue sui compatti. Teorema ponte. Insiemi aperti e chiusi in $\mathbf{R}^n$ con esempi. Definizione di derivate parziali. Definizione di derivata direzionale. L'esistenza delle derivate parziali in un punto (e anche di tutte le derivate direzionali in quel punto) non implica la continuità in quel punto. Definizione di funzione differenziabile e di gradiente. Una funzione differenziabile in un punto ha in quel punto le derivate parziali con differenziale uguale al gradiente; ha inoltre tutte le derivate direzionali calcolate in base al gradiente. Una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto. Teorema del differenziale totale e funzioni di classe C^1. Cenno a funzioni di classe C^n con $n = 2, 3, 4, ..., \infty$. NOTA: L'argomento funzioni di piú variabili è stato svolto in poche lezioni, per cui, anche se ci sono tante cose, necessariamente non è stato approfondito molto.

Equazioni differenziali. Equazioni differenziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine (sia omogenee sia non omogenee). Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, sia omogenee, sia non omogenee trattate col metodo della variazione delle costanti.