Proviamo il prodotto di Wallis ossia la formula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots \tag{0}$$

Intanto definiamo

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx.$$

Calcoliamo I_n per induzione. Notiamo

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$I_1 = 1. \tag{2}$$

Notiamo anche che dato che $0 \leq \sin(x) \leq 1$ per ogni $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$I_n \geq I_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Ora calcoliamo I_n induttivamente deducendo I_{n+2} da I_n, cosí per (i) e (2) I_n sarà determinato per tutti gli n naturali. Integrando per parti si ha

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\ \sin(x)\, dx =$$

$$-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n(x)\cos^2(x)\, dx =$$

$$(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2(x)\, dx =$$

$$(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\, dx =$$

$$(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\, dx =$$

$$(n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$

Quindi da $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ si deduce

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n. \tag{4}$$

Da (4) deduciamo man mano, tenuto conto di (1) e (2),

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \\ I_3 &= \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \\ I_4 &= \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \\ I_5 &= \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5}\frac{2}{3}, \\ I_6 &= \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

etc. Tenuto conto di (3), si ha quindi

$$\frac{\pi}{2} \geq 1 \geq \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \geq \frac{2}{3} \geq \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \geq \frac{4}{5}\frac{2}{3} \geq \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \cdots. \tag{5}$$

Dalla penultima disuguaglianza in (5) si deduce

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}.$$

Andando avanti si ha

$$\frac{\pi}{2} \geq b_n \text{ ove } b_n = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}. \tag{6}$$

Analogamente, dall'ultima disuguaglianza in (5) si deduce

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}.$$

Andando avanti si ha

$$\frac{\pi}{2} \leq a_n \text{ ove } a_n = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}. \tag{7}$$

Riassumendo per ogni n si ha

$$b_n \leq \frac{\pi}{2} \leq a_n. \tag{8}$$

Ora notiamo che la successione a_n è decrescente. Infatti $a_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{2n+2}{2n+1} a_n \leq a_n$ dato che $\dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{2n+2}{2n+1} \leq 1$. Essendo decrescente e inferiormente limitata per (8) da $\frac{\pi}{2}$, esiste $l \in \mathbf{R}$ tale che

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \geq \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Similmente b_n è crescente e superiormente limitata da $\frac{\pi}{2}$ e quindi esiste $l' \in \mathbf{R}$ tale che

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l' \leq \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

D'altra parte si ha

$$a_n = b_n \frac{2n+1}{2n} \tag{11}$$

per definizione di a_n e b_n, quindi dato che $\dfrac{2n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, passando al limite in (11), si ha $l = l'$. Da (9) e (10) si ha $l = l' = \frac{\pi}{2}$ e quindi $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, e dalla definizione di a_n e b_n, segue (0).