Programma del Corso di Calcolo delle Variazioni. Anno 2007/08

1. Esempi di problemi di calcolo delle variazioni Problema della curva di minima lunghezza che congiunge due dati punti, problema della brachistocrona, problema degli isoperimetri.

2. Minimizzazione di un funzionale integrale del tipo $\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$ sotto le condizioni $y(a) = A$, $y(b) = B$.
Il problema viene studiato quando $L = L(x, y, q)$ è una funzione di classe C^1 definita su $[a, b] \times \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$ (*o anche da :* $[a, b] \times U$ *con* U *aperto in* $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$) a valori in $\mathbf{R}$. Equazione di Eulero per estremali di classe C^1 e C^1 a tratti. Risultato che le soluzioni dell'equazione di Eulero sono minimi quando l'integrando L è convesso rispetto alle variabili (y, q). Condizioni del secondo ordine per avere un minimo locale: necessità della condizione di convessità rispetto alla variabile q. Regolarità degli estremali in caso di stretta convessità. Equazione di Eulero quando L non dipende da x.

3. Problemi di tipo isoperimetrico.
Condizione necessaria per un minimo di un integrale del tipo $\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$ sotto le condizioni $y(a) = A$, $y(b) = B$, $\int_a^b G(x, y(x), y'(x))\,dx = L$ e sufficienza della condizione in caso convesso. Soluzione di Hurwitz del classico problema degli isoperimetri.

4. Calcolo delle variazioni per funzioni assolutamente continue. Richiami sulle funzioni assolutamente continue a valori in $\mathbf{R^N}$. Funzioni equiintegrabili e risultati di compattezza, in L^1 per funzioni equiintegrabili (senza dimostrazione), e rispetto alla convergenza uniforme per funzioni AC equilimitate in un punto e con derivate equiintegrabili, a valori in $\mathbf{R^n}$. Teorema di esistenza del minimo AC di funzionali integrali sotto opportune condizioni, in particolare convessità rispetto alla derivata e crescita superlineare rispetto alla derivata. Equazione di Eulero in ambito AC. Regolarità di tipo C^1 di minimi AC di funzionali integrali. Esempi di applicabilità dei precedenti teoremi.

5. Curve di minima lunghezza congiungenti due punti in un sottoinsieme di $\mathbf{R^N}$.
Teorema di Ascoli-Arzelà per successioni di funzioni da uno spazio metrico X a valori in uno spazio metrico compatto Y (o anche a valori in $\mathbf{R^N}$ ma equilimitate). Caso equilipshitziano. Richiami sulla lunghezza di una curva (continua). Continuità della funzione lunghezza d'arco rispetto al secondo estremo. Definizione della inferiore semicontinuità. Estremo superiore di funzioni inferiormente semicontinue. Semicontinuità della lunghezza di una curva rispetto alla convergenza uniforme. Teorema che in un chiuso di $\mathbf{R^N}$ se due punti sono collegati da una curva continua di lunghezza finita, allora sono collegati da una curva continua di lunghezza minima. Caratterizzazione delle geodetiche su una superficie come curve la cui normale principale è parallela alla normale alla superficie. Risultato che afferma che ogni curva si può scrivere in modo "equivalente" a una curva parametrizzata per lunghezza d'arco. Regolarità delle geodetiche su superficie, purché parametrizzate per (un multiplo di) lunghezza d'arco. Formula integrale per la lunghezza di una curva AC (senza dimostrazione).

6. A livello di esercizi, e come tali facoltativi, si sono visti: soluzione del problema di Wirtinger, soluzione del problema della brachistocrona sotto alcune condizioni, studio del problema delle bolle di sapone, geodetiche sulla sfera e sul cilindro. Soluzione del problema di Didone. Disuguaglianza di Jensen. Fenomeno di Lavrentviev.

Si sono svolte 28 ore di lezione e 28 ore di esercitazioni.