Programma del Corso di Calcolo delle Variazioni. Anno 2003/04

1. Esempi di problemi di calcolo delle variazioni Problema della curva di minima lunghezza che congiunge due dati punti, problema della bracristocrona, problema degli isoperimetri, problema delle bolle di sapone.

2. Minimizzazione di un funzionale integrale del tipo $\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$ sotto le condizioni $y(a) = A$, $y(b) = B$.
Il problema viene studiato quando $L = L(x, y, q)$ è una funzione di classe C^1 definita su $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (*o anche da :* $[a, b] \times U$ *con* U *aperto in* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) a valori in $\mathbb{R}$. Equazione di Eulero per estremali di classe C^1 e C^1 a tratti. Risultato che le soluzioni dell'equazione di Eulero sono minimi quando l'integrando L è convesso rispetto alle variabili (y, q). Condizioni del secondo ordine per avere un minimo locale: necessità della condizione di convessità rispetto alla variabile q. Falso teorema di Legendre ed enunciato (senza dimostrazione) del teorema di Jacobi. Regolarità degli estremali in caso di stretta convessità. Equazione di Eulero quando L non dipende da x. Enunciato del teorema di Tonelli sull'esistenza del minimo.

3. Problema di Bolza.
Si intende con questo minimizzazione del funzionale $\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx + \phi(y(b))$ sotto le condizione $y(a) = A$, o $\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx + \phi(y(a))$ sotto le condizione $y(b) = B$. Condizioni di Eulero e di trasversalità per estremali C^1. Caso in cui L dipende solo da q, formula di Hopf.

4. Problemi di tipo isoperimetrico.
Condizione necessaria per un minimo di un integrale del tipo $\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$ sotto le condizioni $y(a) = A$, $y(b) = B$, $\int_a^b G(x, y(x), y'(x))\, dx = L$ e sufficienza della condizione in caso convesso. Soluzione del problema di Didone sotto condizioni tipo che la curva sia di tipo grafico. Soluzione di Hurwitz del classico problema degli isoperimetri.

5. Curve di minima lunghezza congiungenti due punti in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$.
Teorema di Ascoli-Arzelà per successioni di funzioni da uno spazio metrico X a valori in uno spazio metrico compatto Y (o anche a valori in $\mathbb{R}^N$ ma equilimitate). Caso equilipshitziano. Richiami sulla lunghezza di una curva (continua). Continuità della funzione lunghezza d'arco rispetto al secondo estremo. Definizione della inferiore semicontinuità. Estremo superiore di funzioni inferiormente semicontinue. Semicontinuità della lunghezza di una curva rispetto alla convergenza uniforme. Teorema che in un chiuso di $\mathbb{R}^N$ se due punti sono collegati da una curva continua di lunghezza finita, allora sono collegati da una curva continua di lunghezza minima. Caratterizzazione delle geodetiche su una varietà come curve la cui normale principale è parallela alla normale alla curva.

6. A livello di esercizi, e come tali facoltativi, si sono visti: soluzione del problema di Wirtinger, soluzione del problema della brachistocrona sotto alcune condizioni, studio del problema delle bolle di sapone, geodetiche sulla sfera e sul cilindro.