ALCUNE PRECISAZIONI SUI LIMITI DI SUCCESSIONI E DISEQUAZIONI

In queste note che riguardano il corso di Matematica per Biotecnologie 2004/05, discuto alcune proprietà dei limiti di successioni, e poi un esempio di disequazione contenente il modulo. Visto che ho scritto queste note un po' di fretta potrebbe anche esserci qualche imperfezione ma ritengo che comunque siano utili allo studente.

1. Limiti notevoli

Richiamo alcuni tra i principali limiti notevoli

$$a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \end{cases} \tag{1}$$

mentre non esiste $\lim_{n\to+\infty} a^n$ se $a \le -1$.

$$n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{a^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{se } a > 1 \tag{3}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e \tag{4}$$

$$\frac{a^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall a \in \mathbf{R} \tag{5}$$

Ricordo che $n!$ (che si legge "n fattoriale" o "fattoriale di n") è definito come il prodotto di tutti i numeri interi positivi fino a n, cioè $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, ad esempio $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Le formule (3) e (5) si possono interpretare come confronto tra infiniti; (3) dice, parlando in linguaggio meno formale il seguente fatto: sappiamo che se $a > 1$, allora $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e che se $\alpha > 0$ allora $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La (3) si interpreta dicendo che l'ordine di infinito di a^n è maggiore di quello di n^α. Nota che nella (3) non ho richiesto in realtà, $\alpha > 0$, poiché se $\alpha \le 0$ il risultato è ovvio in quanto se $\alpha = 0$ allora $\frac{a^n}{n^\alpha} = a^n$, mentre se $\alpha < 0$ si ha $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, quindi $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $\frac{a^n}{n^\alpha}$ è del tipo $(+\infty)\cdot(+\infty)$, e quindi tende a $+\infty$ per n che tende a $+\infty$. In sostanza il caso $\alpha \leq 0$ si risolve subito perché non viene una forma indeterminata. La (5) dice (per $a > 1$), usando lo stesso linguaggio, che l'ordine di infinito di $n!$ è maggiore di quello di a^n.

2. Esempi di calcolo dei limiti di successioni

Vediamo alcuni esempi di calcolo del limite di una successione. Nel seguito per brevità sarà spesso sottintesa, quando si parla di un limite o si usa il termine "tende", la frase "per n che tende a $+\infty$".

$$a_n = n^4 + \sin n \tag{6}$$

Chiaramente n^4 tende a $+\infty$. Se noi sapessimo che $\sin n$ tende a un limite finito potremmo subito concludere che a_n tende a $+\infty$. In realtà si può dimostrare (ma è difficile) che la successione $\sin n$ non ha limite. Possiamo comunque lo stesso concludere che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, in quanto $\sin n$ è una successione limitata poiché $-1 \leq \sin n \leq 1$, ed è noto dalla teoria che la somma di una successione limitata e di una che tende a $+\infty$ tende a $+\infty$.

$$b_n = \frac{n^4 + 2n + \sin n}{2n^3 + 3}\ . \tag{7}$$

Si vede facilmente che sia il numeratore sia il denominatore tendono a $+\infty$ (per $n \to +\infty$). Infatti a numeratore abbiamo n^4 e $2n$ che entrambe tendono a $+\infty$, e quindi la loro somma tende a $+\infty$, e a questa somma devo sommare $\sin n$ che è una successione limitata. Quindi il numeratore tende a $+\infty$ in quanto, come e già detto, la somma di una successione limitata e di una che tende a $+\infty$ tende a $+\infty$. Il denominatore tende a $+\infty$ in quanto $2n^3$ tende a $+\infty$ e 3 tende a 3. In conclusione la frazione che definisce b_n è una forma indeterminata. Per sciogliere l'indeterminazione l'idea è che poiché nel numeratore n^4 è l'addendo piú grande, e nel denominatore $2n^3$ è l'addendo piú grande, gli altri termini a numeratore e a denominatore "non contano", e quindi la successione si comporta come

$$\frac{n^4}{2n^3} = \frac{n}{2}$$

che tende a $+\infty$ per n che tende a $+\infty$. Questa però è solo un'idea intuitiva, e a volte l'idea intuitiva può anche condurre a un risultato sbagliato. Troveremo che a_n tende effettivamente a $+\infty$ giustificando il risultato in base ai risultati che conosciamo sui limiti. Nel fare questo ci ispireremo all'idea intuitiva. Dire che a numeratore n^4 prevale sugli altri addendi e quindi il comportamento del numeratore è come quello di n^4 si traduce nel seguente modo. Scriviamo il numeratore come

$$n^4 + 2n + \sin n = n^4\Big(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{\sin n}{n^4}\Big) \tag{8}$$

ove

$$\frac{2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{9}$$

$$\frac{\sin n}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0; \tag{10}$$

(9) vale in quanto $n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e $2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. (10) vale in quanto $\sin n$ è una successione limitata e $\frac{1}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (ricordo che il prodotto di una successione limitata per una successione che tende a 0 tende a 0). Da (9) e (10) segue che mediante (8) abbiamo scritto il numeratore in (7) come n^4 moltiplicato per una successione che tende a 1. Questo esprime in modo piú preciso l'idea che il numeratore in (7) si comporta come n^4. In modo analogo scrivo il denominatore come $n^3\Big(2 + \frac{3}{n^3}\Big)$, che è quindi il prodotto di n^3 per una successione che tende a 2. In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n^4\Big(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{\sin n}{n^4}\Big)}{n^3\Big(2 + \frac{3}{n^3}\Big)} \\ &= \frac{n^4}{n^3}\frac{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{\sin n}{n^4}}{2 + \frac{3}{n^3}}\,. \end{aligned}$$

Ora nell'ultima riga abbiamo $\frac{n^4}{n^3} = n$ che tende a $+\infty$ moltiplicata per una frazione che tende a $\frac{1}{2}$ in quanto il numeratore tende a 1 e il denominatore tende a 2. In conclusione b_n, in quanto prodotto di una succesione che tende a $\frac{1}{2}$ per una che tende a $+\infty$, tende a $+\infty$. In sostanza sia a numeratore sia a denominatore abbiamo evidenziato il termine piú grande che indica "l'andamento della somma". In questo modo abbiamo scritto la frazione come il prodotto di una frazione il cui sia il numeratore sia il denominatore sono fatti di un solo addendo, per una frazione in cui sia il numeratore sia il denominatore tendono a un numero finito diverso da 0 e che quindi non è una forma indeterminata. Che cosa succede se anziché mettere in evidenza l'addendo piú grande mettiamo in evidenza un altro? Questo è un passaggio che è lecito fare, ma non sempre ci da un'informazione sufficiente. Per esempio, se a numeratore avessimo messo in evidenza n avremmo ottenuto

$$n\Big(n^3 + 2 + \frac{\sin n}{n}\Big) \tag{11}$$

che è il prodotto di n per una successione che come è facile verificare tende pure a $+\infty$. Quindi noi vediamo che il denominatore tende a $+\infty$ e in modo "piú veloce di n", ma non sappiamo quanto piú veloce, mentre (8) ci da l'informazione piú precisa che il comportamento è come n^4. E difatti usando (11) avremmo riscritto b_n come

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n\Big(n^3 + 2 + \frac{\sin n}{n}\Big)}{n^3\Big(2 + \frac{3}{n^3}\Big)} \\ &= \frac{n}{n^3}\frac{n^3 + 2 + \frac{\sin n}{n}}{2 + \frac{3}{n^3}} \end{aligned}$$

e la scrittura nell'ultima riga non scioglie l'indeterminazione in quanto la prima frazione tende a 0 e la seconda a $+\infty$. Con questo non voglio dire che l'unico modo possibile sia mettere in evidenza il termine piú grande. Ad esempio, facendo i calcoli si poteva arrivare al risultato anche se nel numeratore di b_n si metteva in evidenza n^3. Comunque mettere in evidenza il termine piú grande è senz'altro il metodo piú naturale e funziona sempre.

3. Una disequazione contenente il modulo.

Studiamo la disequazione

$$x + |2x - 1| < 5 \tag{12}$$

Per risolvere (12) ragioniamo cosí. Dato che $|a|$ è uguale per definizione ad a se $a \geq 0$ e a $-a$ se $a < 0$, si avrà, ponendo $a = 2x - 1$,

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1) & \text{se } 2x - 1 < 0\,. \end{cases}$$

Quindi (12) equivale a

$$x + (2x - 1) < 5 \tag{13}$$

se $2x - 1 \geq 0$ e a

$$x - (2x - 1) < 5 \tag{14}$$

se $2x - 1 < 0$. In sostanza, quindi, le soluzioni di (12) sono tutte le x tali che $2x - 1 \geq 0$ e che risolvono (13) e tutte le x tali che $2x - 1 < 0$ e che risolvono (14). Questo, in termini piú tecnici equivale a studiare i due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3x - 1 < 5 \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 1 - x < 5 \end{cases} \tag{16}$$

e una volta risolti prendere l'unione delle soluzioni dei due sistemi. (15) si trasforma man mano in

$$\begin{cases} 2x \geq 1 \\ 3x < 6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 2, \end{cases}$$

che ha come soluzione l'intervallo $[\frac{1}{2}, 2)$. (16) si trasforma in

$$\begin{cases} 2x < 1 \\ -4 < x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -4, \end{cases}$$

che ha come soluzione l'intervallo $(-4, \frac{1}{2})$. Quindi la soluzione di (12) è data da $[\frac{1}{2}, 2) \cup (-4, \frac{1}{2}) = (-4, 2)$.