

**Alcune ulteriori precisazioni sul corso  
di Matematica per Biotecnologie 2005/06**

Scopo di queste brevi note è quello di chiarire alcuni punti importanti che sul libro adottato non sembrano (stranamente) essere esplicite, almeno stando a quanto ho trovato io sul libro. Inoltre chiarirò alcune semplificazioni che io ho usato nel corso rispetto al libro.

**Limiti**

Ricordo che sul libro adottato (indicato nel seguito con **Gi**, abbreviazione del cognome Giusti dell'autore) il limite di funzioni  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  si definisce quando  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ , ove  $A$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbf{R}$  e  $x_0$  è un punto di accumulazione di  $A$ . Poiché noi non abbiamo parlato di punti di accumulazione ci accontentiamo di un caso meno generale ma sufficiente per le nostre applicazioni. Precisamente poniamo  $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ , e sia  $\overline{A}$  l'insieme degli  $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$  tali che  $A$  contiene o un intervallo della forma  $(a, x_0)$  con  $a < x_0$  o un intervallo della forma  $(x_0, b)$  con  $b > x_0$ . Supporremo che  $x_0 \in \overline{A}$ . In tutti gli enunciati sui limiti di funzione  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ , si considererà sottointeso  $x_0 \in \overline{A}$  e se su **Gi** c'è scritto *Sia  $x_0$  punto di accumulazione di  $A$* , tale frase è da sostituire con  $x_0 \in \overline{A}$ .

Ricordo che il limite di funzioni se esiste, è unico. Più precisamente, siano  $x_0, l_1, l_2 \in \overline{\mathbf{R}}$ . Supponiamo che sia data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ , ove  $A$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbf{R}$ , e  $x_0 \in \overline{A}$ . In tali ipotesi possiamo enunciare il teorema sull'unicità del limite nella seguente forma.

**Teorema 1.** *Se si ha simultaneamente*

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l_1, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l_2,$$

*allora  $l_1 = l_2$ .*

Si ha l'analogo teorema sull'unicità del limite di una successione.

**Teorema 2.** *Siano  $l_1, l_2 \in \overline{\mathbf{R}}$ . Sia data una successione  $a_n$ . Se si ha simultaneamente*

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2,$$

*allora  $l_1 = l_2$ .*

Vediamo l'idea della dimostrazione del Teorema 2. Il Teorema 1 si può dimostrare in modo simile (o si riconduce al Teorema 2 usando il Teorema ponte). Se fosse  $l_1 \neq l_2$ , riflettendo un attimo ci si rende conto che esistono un intorno  $U_1$  di  $l_1$  e un intorno  $U_2$  di  $l_2$  tali che  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , ad esempio se fosse  $l_1 < l_2$  e  $l_1$  e  $l_2$  numeri reali, basta prendere  $U_1 = (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ ,  $U_2 = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$  con  $\varepsilon > 0$  così piccolo che  $l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon$ , quindi

$\varepsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}$ . Poiché  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1$  esisterà un indice  $N_1$  tale che  $a_n \in U_1$  se  $n > N_1$ . Poiché  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2$  esisterà un indice  $N_2$  tale che  $a_n \in U_2$  se  $n > N_2$ . Allora, se  $n > \max\{N_1, N_2\}$  si avrebbe  $a_n \in U_1 \cap U_2$ , ma questo è impossibile poiché  $U_1$  e  $U_2$  non hanno punti in comune. ■

Notiamo che la notazione  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$  in luogo di  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$  è autorizzata dal Teorema 2 (se non sapessimo che il limite è unico, se esiste, non potremmo usare una notazione che in sostanza dice *il* limite di  $a_n$  vale  $l$ ). Un discorso analogo vale per i limiti di funzioni.

## Integrali

Ricordo prima di tutto che noi a lezione abbiamo visto gli integrali *solo* per funzioni continue. Cioè su **Gi** si è data una definizione di integrale per funzioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  *non necessariamente continue* e si è detto che in tale caso  $f$  è integrabile se soddisfa la Definizione 9.1 pag. 309 in **Gi** e in tal caso si definisce l'integrale  $\int_a^b f(x) dx$ , e poi si è provato che le funzioni continue su  $[a, b]$  sono integrabili. Invece noi abbiamo detto (in realtà non dimostrato) che se  $f$  è una funzione continua da  $[a, b]$  in  $\mathbf{R}$  allora vale la condizione della Definizione 9.1 (formula 9.7) e quindi possiamo definire  $\int_a^b f(x) dx$  come in Definizione 9.1. Quindi in tutti gli enunciati su **Gi**, si supporrà che la funzione è continua. Ricordo una proprietà degli integrali definiti che su **Gi** non sembra sia stata enunciata in modo esplicito. Se  $f, g$  sono funzioni continue da  $[a, b]$  in  $\mathbf{R}$ , allora dati comunque  $\alpha$  e  $\beta$  numeri reali si ha

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

in particolare, ponendo  $\beta = 0$ , si ha

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

oppure ponendo  $\alpha = 1, \beta = \pm 1$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

e vale la analoga proprietà per gli integrali indefiniti

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

con analoghi casi particolari

$$\int \alpha f(x) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx$$

$$\int \left( f(x) + g(x) \right) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int \left( f(x) - g(x) \right) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx .$$

Un elenco di primitive immediate:

$$\int k \, dx = kx + c \text{ se } k \text{ è una costante}$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c.$$