

ALCUNE PRECISAZIONI SUI LIMITI DI FUNZIONI

In queste note che riguardano il corso di Matematica per Biotecnologie 2003/04, discuto alcune proprietà dei limiti di funzioni. Precisamente prima scrivo un elenco di limiti notevoli (cioè di particolare importanza), poi mostro alcune applicazioni del principio del cambio di variabile nei limiti, che sul libro non è molto approfondito. Nel seguito MS indicherà il libro adottato ossia, autori: Marcellini, Sbordone, Titolo: Calcolo, Casa Editrice: Liguori, ISBN: 88-207-2218-6.

1. Limiti notevoli

Richiamo quelli che probabilmente sono i principali limiti notevoli

$$a^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad (3)$$

$$\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \quad (4)$$

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{se } a > 1 \quad (5)$$

$$\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{se } \alpha > 0 \quad (6)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} e \quad (7)$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (8)$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (10)$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (11)$$

Altri limiti importanti si possono dedurre da questi mediante un cambio di variabile, cosa che approfondiamo tra poco.

2. Cambio di variabili nei limiti

Ricordo innanzitutto che per quanto riguarda i limiti noi consideriamo funzioni definite su un sottoinsieme non vuoto A di $\mathbf{R}$ e che assumiamo sempre che A è l'unione di un numero finito di intervalli. Gli intervalli possono essere sia aperti sia chiusi sia semiaperti (cioè contenenti uno dei due estremi e non l'altro, ad esempio $[0, 2)$, o $(1, 4]$), e che gli estremi dell'intervallo possono anche essere $+\infty$ o $-\infty$, ovviamente non compresi nell'intervallo in quanto non sono numeri reali. Come caso particolare A può essere $\mathbf{R}$ in quanto $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$. In questa situazione denotiamo con $\overline{A}$ l'insieme dei punti che o stanno in A o sono estremi, *eventualmente anche* $+\infty$, $-\infty$ degli intervalli definenti A . Ad esempio, se $A = (-\infty, 5)$, si ha $\overline{A} = [-\infty, 5]$, se $A = (0, 1] \cup (3, 6) \cup [9, +\infty)$ si ha $\overline{A} = [0, 1] \cup [3, 6] \cup [9, +\infty]$, in pratica $\overline{A}$ si ottiene da A , usando un linguaggio impreciso, sostituendo gli intervalli definenti A di qualunque tipo siano con i rispettivi intervalli chiusi. Se ora in questa situazione abbiamo una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ noi possiamo considerare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ solo se $x_0 \in \overline{A}$. Ad esempio se $A = (-\infty, 5)$ possiamo considerare $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, ma non $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. L'idea è che per studiare il limite della funzione in x_0 dobbiamo studiare la funzione "vicino a x_0 " ma nel caso appena descritto f non è definita vicino a 7 e vicino a $+\infty$. Quando dico che possiamo considerare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ solo se $x_0 \in \overline{A}$, intendo dire che se $x_0 \in \overline{A}$ ha senso pensare se il limite esiste e nel caso calcolarlo ma ovviamente non è detto in alcun modo che il limite deve esistere, poiché questo dipende dalla funzione f , mentre se $x_0 \notin \overline{A}$ allora il discorso su $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non può nemmeno cominciare.

Passiamo ora a descrivere il cambio di variabile nei limiti. Ricordo il seguente risultato (MS sez. 73, pag. 328).

Teorema 1. Supponiamo $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{A}$, $y_0 \in \overline{B}$, $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} v(y) = l \quad (1.1)$$

allora possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(u(x)) = l \quad (1.2)$$

a patto che valga almeno una delle due seguenti ipotesi a), b)

a) Esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap A$ con $x \neq x_0$ si ha $u(x) \neq y_0$

b) $y_0 \in B$ e v è continua in y_0 .

Notiamo che nel risultato dato in MS si parla solo dell'ipotesi a), ma in realtà il risultato vale anche se assumiamo b) quindi l'ho dato in questa forma. Nel Teorema 1 bisogna precisare che cosa si intende per intorno di x_0 . Se $x_0 \in \mathbf{R}$ allora un intorno di x_0 è un insieme della forma $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$ e quindi se $x_0 \in \mathbf{R}$ allora la a) si può riformulare come

Esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ con $x \neq x_0$ si ha $u(x) \neq y_0$.

Se $x_0 = +\infty$ allora un intorno di x_0 è un insieme della forma $(k, +\infty)$ con $k \in \mathbf{R}$. Se $x_0 = -\infty$ allora un intorno di x_0 è un insieme della forma $(-\infty, k)$ con $k \in \mathbf{R}$. Notiamo che come ho detto il Teorema 1 afferma che se vale (1.1) allora vale (1.2) *a patto che valga almeno una delle due ipotesi a) e b)*. A rigore se non vale né a) né b) non possiamo dedurre (1.2) da (1.1), in quanto si trovano dei controesempi. Comunque visto che gli esempi sono piuttosto artificiosi e raramente capitano nella pratica, visto lo spirito del corso, lo studente può per evitare complicazioni, trascurare le ipotesi a) e b), nel senso che non ci saranno mai esercizi negli scritti (o esoneri) del presente corso in cui vale (1.1) ma non (1.2), e quindi fare conto che semplicemente in generale se vale (1.1) vale (1.2), tenendo conto che a rigore ci vogliono delle ipotesi ulteriori (che sarebbero appunto a) o b)). Per maggiore completezza comunque spiego il senso delle ipotesi. L'idea del teorema è che se vale (1.1) allora per x "abbastanza vicino" a x_0 $u(x)$ è "vicino" a y_0 per la prima delle due formule in (1.1), e quindi per la seconda delle formule in (1.1) $v(u(x))$ è "vicino" a l . Il motivo per cui c'è bisogno delle ipotesi a) o b) è che dobbiamo intenderci su che cosa significa la parola vicino. Dire che vale la prima formula di (1.1) vuol dire che, per x "abbastanza vicino" a x_0 $u(x)$ è "vicino" a y_0 , non necessariamente diverso da x_0 , mentre la seconda delle formule in (1.1) ci dice informazioni su che cosa fa $v(y)$ quando y è "vicino" a y_0 ma diverso da y_0 , quindi se non vale a) non possiamo collegare le due informazioni. Anche b) basta per concludere

poiché se v è continua in y_0 allora sappiamo che $v(y)$ è vicino a $v(y_0)$ per y vicino a y_0 ovviamente anche $y = y_0$. Ricordo in altre parole che se vogliamo vedere se $\lim_{y \rightarrow y_0} v(y) = l$ non ha alcun interesse come si comporta v in y_0 , ma se v è continua in y_0 invece è determinante il comportamento proprio in y_0 . Notiamo ancora che il Teorema 1 si può interpretare come una "sostituzione nel limite" cioè (1.2) si ottiene dalla seconda formula di (1.1) sostituendo $u(x)$ a y . Ovviamente le considerazioni qui sopra sono di carattere intuitivo e non rigoroso. Per una dimostrazione di Teorema 1 cf. MS, sez. 73. Comunque accenno a quella che è un'idea più precisa di una dimostrazione che utilizza gli intorno invece delle successioni. Lo studente non è tenuto a sapere tale idea di dimostrazione che io scrivo per chi preferisse approfondire. Dato un intorno W di l , dalla seconda formula in (1.1) esiste V intorno di y_0 tale che se $y \in V \cap B$ e $y \neq y_0$ allora $v(y) \in W$. D'altra parte dalla prima formula in (1.1) esiste U intorno di x_0 tale che se $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$, allora $u(x) \in V$, e se assumiamo a) anche $u(x) \neq y_0$. Quindi se $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$, $v(u(x)) \in W$. Questo basta a provare (1.2).

Vediamo qualche esempio. Sappiamo che $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (limite in (11)). Deduciamo che

$$\frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1.$$

Infatti prendiamo nelle ipotesi del Teorema 1, $u(x) = \cos x$ e si ha

$$\cos x \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(ricordo che il coseno è una funzione continua). Prendiamo $v(y) = \frac{e^y - 1}{y}$ e $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$, $l = 1$. In tale caso vediamo che sono verificate le formule in (1.1), poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} v(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 = l$.

Possiamo concludere che $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} v(\cos x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(u(x)) = l = 1$.

Io qui ho svolto i passaggi nel dettaglio, ma con un po' di pratica questi vengono più automatici ossia verrebbe da dire: poiché $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$

allora, "ponendo $y = \cos x$ " si deduce $\frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1$. Io consiglierei lo studente di svolgere l'esercizio nei dettagli le prime volte poi quando ha familiar-

izzato col teorema farlo piú velocemente. Se invece studiamo $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ possiamo applicare Teorema 1 con $u(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ e $v(y) = \sin y$, e porre $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e poiché $\sin y \xrightarrow{y \rightarrow 1} \sin 1$ in quanto la funzione $\sin$ è continua vale (1.1) di Teorema 1 con $l = \sin 1$. Quindi possiamo dedurre (1.2) di Teorema 1 che nel nostro caso diventa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \sin 1$. Vediamo un terzo esempio, che spiegherò un po' piú rapidamente. Poiché $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ usando (2) si ottiene

$$(\ln x)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Analogamente poiché $\frac{1}{1 - \cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ si ha

$$\left(\frac{1}{1 - \cos x} \right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Notiamo che il Teorema 1 rimane valido se al posto di $x \rightarrow x_0$ si mette $x \rightarrow x_0^+$ sia in (1.1) sia in (1.2), ossia se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} v(y) = l$$

allora possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} v(u(x)) = l$$

a patto che valga o la a) o la seguente analoga della a)

a) Esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A$ si ha $u(x) \neq y_0$.

Ovviamente bisogna assumere che abbia senso fare il limite per $x \rightarrow x_0^+$ e questo significa che A contiene un intervallo della forma (x_0, b) per qualche $b > x_0$.

Considerazioni analoghe valgono se al posto di $x \rightarrow x_0$ si mette $x \rightarrow x_0^-$ sia in (1.1) sia in (1.2), ossia se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} u(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} v(y) = l$$

allora possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} v(u(x)) = l$$

a patto che valga o la b) o la seguente analoga della a)

a) Esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A$ si ha $u(x) \neq y_0$.

Ovviamente bisogna assumere che abbia senso fare il limite per $x \rightarrow x_0^-$ e questo significa che A contiene un intervallo della forma (a, x_0) per qualche $a < x_0$.

Supponiamo invece che il limite per $y \rightarrow y_0$ sia rimpiazzato da limite per $y \rightarrow y_0^+$. Allora Teorema 1 continua a valere ma dobbiamo modificare la a), ossia richiedere che

Esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap A$ con $x \neq x_0$ si ha $u(x) > y_0$.

Intuitivamente si capisce questo poiché se conosciamo il limite per $y \rightarrow y_0^+$, non abbiamo alcuna informazione su come si comporta v in punti minori di y_0 e quindi senza a) non potremmo avere informazioni sul comportamento di $v(u(x))$. Riassumendo si ha:

Supponiamo $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \overline{A}$, $y_0 \in \overline{B}$, $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Supponiamo che B contenga un intervallo della forma (y_0, b) con $b > y_0$ (in modo che abbia senso il seguente limite per $y \rightarrow y_0^+$). Se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0^+} v(y) = l \quad (1.1)$$

allora possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(u(x)) = l \quad (1.2)$$

a patto che valga

a') Esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap A$ con $x \neq x_0$ si ha $u(x) > y_0$.

Qui abbiamo trascurato un'eventuale analoga della b) poiché sarebbe un po' complicato e non la useremo in pratica. Notiamo che mentre nel caso del Teorema 1 avevo detto che le ipotesi ulteriori erano in un certo senso non molto importanti in quanto quasi sempre verificate in pratica, in questo caso a') è

importante in quanto non è affatto detto che sia verificata. Vale un discorso simile se si considera il limite per $y \rightarrow y_0^-$.

Ora vediamo degli esempi generali particolarmente importanti. Non precisiamo le ipotesi sulle funzioni per non appesantire il discorso.

1) Si ha $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$ se e solo se $f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$. Infatti se $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$ possiamo applicare Teorema 1 con $u(x) = -x$, $x_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$, $v = f$ e otteniamo $v(u(x)) = f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$. Viceversa, se $f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ usando Teorema 1 con $u(x) = -x$, $x_0 = -\infty$, $y_0 = +\infty$, $v(y) = f(-y)$ segue $v(u(x)) = f(-(-x)) = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$.

L'importanza di tale risultato deriva dal fatto che per studiare limiti per $x \rightarrow -\infty$ possiamo ricondurli a limiti per $x \rightarrow +\infty$, che spesso sono più conosciuti. Vediamo un esempio: $a^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$ se e solo se $a^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ se e solo se $\frac{1}{a^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$. Ora, usando il limite in (1) deduciamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \quad (12)$$

Un altro esempio è il seguente:

2) Si ha $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} l$ se e solo se $f(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$. Infatti se $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} l$ possiamo applicare Teorema 1 (nella versione a p. 6 con l'ipotesi a') che in questo caso è chiaramente verificata) con $u(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = +\infty$, $y_0 = 0$, $v = f$ e otteniamo $v(u(x)) = f(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$. Viceversa, se $f(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ usando Teorema 1 con $u(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0^+$, $y_0 = +\infty$, $v(y) = f(\frac{1}{y})$ segue $v(u(x)) = f(\frac{1}{\frac{1}{x}}) = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} l$. Come nel caso precedente, questo esempio è importante perché permette di ricondurre i limiti per $x \rightarrow 0^+$ a limiti per $x \rightarrow +\infty$. Vediamo un esempio. Studiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha$. In base a quanto detto sopra tale limite coincide con $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x})^\alpha$ (coincide nel senso che tali limiti o esistono entrambi o non esistono entrambi e se esistono hanno lo stesso valore), ossia con $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha}$, e infine usando il limite in (2), otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Vediamo un altro esempio. Per studiare $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$, sappiamo che questo coincide (nel senso detto prima) con $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$, ossia a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(x)}{x} = 0$, ove l'ultima uguaglianza deriva dal limite in (6) con $\alpha = 1, \beta = 1$.

3) Un altro esempio importante è il seguente: Si ha $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} l$ se e solo se $f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} l$. Non spiego qui in dettaglio come si deduce questo da Teorema 1 (o meglio da una sua variante per limiti destri e sinistri). Ad esempio, vogliamo trovare $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^{-\frac{1}{2}}$. Questo equivale a trovare $\lim_{x \rightarrow 0^+} |-x|^{-\frac{1}{2}}$, che vale $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^{-\frac{1}{2}}$, ossia $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\frac{1}{2}}$ (poiché facendo il limite per $x \rightarrow 0^+$ si considera solo $x > 0$ e per $x > 0$ si ha $|x| = x$), che vale $+\infty$ per (13) con $\alpha = -\frac{1}{2}$. Domanda per lo studente: ho qui considerato $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^{-\frac{1}{2}}$. Che cosa succederebbe se togliessi il modulo, ossia che cosa sarebbe $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-\frac{1}{2}}$?

4) Vediamo come ulteriore esempio di cambio di variabile nei limiti l'equivalenza delle due definizioni di derivata ossia $f'(x_0)$ può essere vista sia come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (14)$$

sia come

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (15)$$

ove, ricordo, tali limiti *devono* essere numeri reali (e non $+\infty$ o $-\infty$). Vediamo come questo si deduce dal Teorema 1. Supponiamo che il limite in (15) valga l . Allora usiamo Teorema 1 con $u(x) = x - x_0$, h al posto di y , $y_0 = 0$, e $v(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Poiché si ha $u(x) = x - x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 = y_0$ e $v(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} l$ per ipotesi, (1.1) di Teorema 1 è verificata e deduciamo (1.2), ossia nel nostro caso $v(u(x)) = v(x - x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$, ossia il limite in (14) vale l . Se invece il limite in (14) vale l allora usiamo Teorema 1 con h al posto di x , $u(h) = x_0 + h$, 0 al posto di x_0 , x_0 al posto di y_0 , $v(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e notiamo che poiché $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ per ipotesi e $u(h) = x_0 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_0$ (1.1) in Teorema 1 è verificata. Quindi vale anche (1.2) e cioè, $v(u(h)) = v(x_0 + h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} l$ e (15) è verificata.