Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   07/09/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n + 1}(a^n + 1)}{(2^n + 1)(3^n + 1)}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1} 2^n x^n$ converge precisando per quali $a > 0$ tale serie converge uniformemente in $[0, a)$.

2) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 1\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} 10(x^2 + y^2) - 21(x + y)$, $\min_{(x,y) \in A} 10(x^2 + y^2) - 21(x + y)$.

3) Sia ω la forma differenziale definita da $\omega(x, y) = \frac{x}{(x^2 - y^2)^4} dx - \frac{y}{(x^2 - y^2)^4} dy$.

a) Determinare l'insieme di definizione di ω .

b) Determinare un sottoinsieme aperto, convesso e illimitato di $\mathbf{R}^2$ ove ω è esatta.

c) Sia f una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Provare che la forma $f(x+y) dx + f(x+y) dy$ è esatta su $\mathbf{R}^2$.

d) Sia α una funzione C^1 da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che la forma $\alpha(x, y) dx + \alpha(x, y) dy$ sia esatta su $\mathbf{R}^2$. Posto $g(x, y) = \alpha(x + y, x - y)$, provare che $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ assume sempre lo stesso valore, e determinare tale valore.

e) Provare che nella situazione di d) esiste una funzione f di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(x, y) = f(x + y)$. Si suggerisce di scrivere $x = u + v$, $y = u - v$ con opportuni u e v . Poi scrivere $\alpha(x, y) = \alpha(u + v, u - v)$ e ora usare d).

4) a) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, e^{2x} - 1 \leq y \leq e^x\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_B \left(1 + \frac{(2x^2 + 2y^2)^{\sqrt{3}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\sqrt{2}\sqrt{6}}} \right) dx dy.$$

b) (ing. Medica) Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in B, 1 \leq z \leq y\}$. Calcolare il volume di C .

b) (Internet-T.L.C.) Risolvere la equazione differenziale $\begin{cases} y'''(x) - y(x) = e^x \\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1 \end{cases}$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   07/09/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{5^n + 1}(a^n + 1)}{(2^n + 3)(5^n + 3)}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^2 + 1} 3^n x^n$ converge precisando per quali $a > 0$ tale serie converge uniformemente in $[0, a)$.

2) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 1\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} 15(x^2 + y^2) - 31(x + y)$, $\min_{(x,y) \in A} 15(x^2 + y^2) - 31(x + y)$.

3) Sia ω la forma differenziale definita da $\omega(x, y) = \frac{x}{(x^2 - y^2)^6} dx - \frac{y}{(x^2 - y^2)^6} dy$.

a) Determinare l'insieme di definizione di ω .

b) Determinare un sottoinsieme aperto, convesso e illimitato di $\mathbf{R}^2$ ove ω è esatta.

c) Sia f una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Provare che la forma $f(x+y) dx + f(x+y) dy$ è esatta su $\mathbf{R}^2$.

d) Sia α una funzione C^1 da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che la forma $\alpha(x, y) dx + \alpha(x, y) dy$ sia esatta su $\mathbf{R}^2$. Posto $g(x, y) = \alpha(x + y, x - y)$, provare che $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ assume sempre lo stesso valore, e determinare tale valore.

e) Provare che nella situazione di d) esiste una funzione f di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(x, y) = f(x + y)$. Si suggerisce di scrivere $x = u + v$, $y = u - v$ con opportuni u e v . Poi scrivere $\alpha(x, y) = \alpha(u + v, u - v)$ e ora usare d).

4) a) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, e^{2x} - 1 \leq y \leq e^x\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_B \left(1 + \frac{(2x^2 + 2y^2)^{\sqrt{3}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\sqrt{2}\sqrt{6}}} \right) dx dy.$$

b) (ing. Medica) Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in B, 1 \leq z \leq y\}$. Calcolare il volume di C .

b) Risolvere la equazione differenziale $\begin{cases} y'''(x) - y(x) = e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1 \end{cases}$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   17/07/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n3^n + 1}$ converge.

b) Discutere, al variare di $c \in \mathbf{R}$ il carattere (convergente, divergente positivamente, divergente negativamente, indeterminata), della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (c \ln(n^2 + 8) - \ln(n^2 + 7))$.

2) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq \sqrt{x}, y \leq 3 - x\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} (y^2 - 2x)$, $\min_{(x,y) \in A} (y^2 - 2x)$.

b) (parte piú difficile del compito) Sia f una funzione continua da $[0, 1] \times [0, 1]$ in $\mathbf{R}$. Sia

$A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n} \right) \times [0, 1] \right)$. Provare che $\sup_{(x,y) \in A_n} f(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \max_{[0,1] \times [0,1]} f$.

3) a) Sia $\omega(x, y) = xy^2 dx + (x^2y + y^2e^{y^2})dy$. Dire se ω è esatta.

b) Sia γ_a la curva in $\mathbf{R}^2$ definita da $\gamma_a(t) = (a(1-t), at) : t \in [0, 1]$ per $a > 0$. Dire se esistono due valori diversi di $a > 0$ per cui l'integrale $\int_{\gamma_a} \omega$ assume lo stesso valore.

c) Sia $g_b(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(7 - x^2 - by^2)}$. Determinare il dominio di g_b per $b = 1$ e provare che per ogni $b > 0$ il dominio di g_b è compatto.

4) a) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_C \left(1 + \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} + \frac{xy^2}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \right) dx dy.$$

b) (Ing. Medica) Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, x \leq z \leq y\}$. Calcolare l'integrale triplo $\int_D z dx dy dz$.

b) (Internet-TLC) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = A\omega, u(0, t) = A \sin(\omega t) \end{cases}$$

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   17/07/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n5^n + n}$ converge.

b) Discutere, al variare di $c \in \mathbf{R}$ il carattere (convergente, divergente positivamente, divergente negativamente, indeterminata), della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (c \ln(n^4 + 6) - \ln(n^4 + 5))$.

2) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq \sqrt{x}, y \leq 5 - x\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} (y^2 - 3x)$, $\min_{(x,y) \in A} (y^2 - 3x)$.

b) (parte piú difficile del compito) Sia f una funzione continua da $[0, 1] \times [0, 1]$ in $\mathbf{R}$. Sia

$A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n} \right) \times [0, 1] \right)$. Provare che $\sup_{(x,y) \in A_n} f(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \max_{[0,1] \times [0,1]} f$.

3) a) Sia $\omega(x, y) = 2xy^2 dx + (2x^2y + y^4 e^{y^4}) dy$. Dire se ω è esatta.

b) Sia γ_a la curva in $\mathbf{R}^2$ definita da $\gamma_a(t) = (a(1-t), at) : t \in [0, 1]$ per $a > 0$. Dire se esistono due valori diversi di $a > 0$ per cui l'integrale $\int_{\gamma_a} \omega$ assume lo stesso valore.

c) Sia $g_b(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(7 - x^2 - by^2)}$. Determinare il dominio di g_b per $b = 1$ e provare che per ogni $b > 0$ il dominio di g_b è compatto.

4) a) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_C \left(1 + \frac{y^3}{\sqrt[5]{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 y}{\sqrt[5]{x^2 + y^2}} \right) dx dy.$$

b) (Ing. Medica) Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, x \leq z \leq y\}$. Calcolare l'integrale triplo $\int_D z dx dy dz$.

b) (Internet-TLC) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = A\omega, u(0, t) = A \cos(\omega t) \end{cases}$$

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   04/07/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\frac{8^n}{3^{n+1}} + n}$ converge.

b) Provare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^5 + n^{10}}$ si può derivare termine a termine nell'intervallo $(0, 1)$.

2) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq 1, xy \geq 0, y \in [-1, 1]\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} (x - 3y)$, $\min_{(x,y) \in A} (x - 3y)$.

b) Siano date due successione a_n e b_n di numeri reali con $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e

sia $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ([a_n, a_n + 1] \times [b_n, b_n + 1])$. Dire se B è sempre compatto e se B non è mai compatto.

c) (parte più difficile del compito) Dire se, dato comunque $a > 0$, si possono trovare delle successioni a_n e b_n come nel punto b) in modo tale che la funzione g definita da $g(x, y) = x - ay$ abbia massimo assoluto e minimo assoluto su B (definito come in b)).

3) Sia f_a la funzione $f_a(x, y) = \sqrt{y - ax} + \ln(x(x + 5y))$.

a) Determinare il dominio di f_a per $a = 1$

b) Dire se il dominio di f_a è non vuoto per ogni $a > 0$.

c) Dire se la forma differenziale $\sin(y^2) dx + 2xy \cos(y^2) dy$ è esatta in $\mathbf{R}^2$ e nel caso determinarne una primitiva.

4) a) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

Calcolare l'integrale doppio $\int_C \left(x + \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \sqrt{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right) dx dy$.

b) (Ing. medica) Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, y \leq z \leq \frac{1}{2}\}$. Calcolare l'integrale triplo $\int_C x dx dy dz$.

b) (Internet). Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = B \sin(\lambda t) \end{cases}$$

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   04/07/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\frac{10^n}{4^n+1} + n}$ converge.

b) Provare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^5 + n^{10}}$ si può derivare termine a termine nell'intervallo $(0, 1)$.

2) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq 1, xy \geq 0, y \in [-1, 1]\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} (x - 2y)$, $\min_{(x,y) \in A} (x - 2y)$.

b) Siano date due successione a_n e b_n di numeri reali con $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ e

sia $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ([a_n, a_n + 1] \times [b_n, b_n + 1])$. Dire se B è sempre compatto e se B non è mai compatto.

c) (parte più difficile del compito) Dire se, dato comunque $a > 0$, si possono trovare delle successioni a_n e b_n come nel punto b) in modo tale che la funzione g definita da $g(x, y) = x - ay$ abbia massimo assoluto e minimo assoluto su B (definito come in b)).

3) Sia f_a la funzione $f_a(x, y) = \sqrt{y - ax} + \ln(x(x + 5y))$.

a) Determinare il dominio di f_a per $a = 1$

b) Dire se il dominio di f_a è non vuoto per ogni $a > 0$.

c) Dire se la forma differenziale $\sin(y^2) dx + 2xy \cos(y^2) dy$ è esatta in $\mathbf{R}^2$ e nel caso determinarne una primitiva.

4) a) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

Calcolare l'integrale doppio $\int_C \left(x + \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \sqrt{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right) dx dy$.

b) (Ing. medica) Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, y \leq z \leq \frac{1}{2}\}$. Calcolare l'integrale triplo $\int_C x dx dy dz$.

b) (Internet). Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, u_x(0, t) = B \sin(\lambda t) \end{cases}$$

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   26/02/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a^n + 2)^{\sqrt{2}} - 1}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}}$ converge.

2) Sia $A_b = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 2, 3 - \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{b}{x} \right\}$, con $b > 0$.

a) Dire per quali $b > 0$ l'insieme A_b è non vuoto.

b) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo su A_{22} della funzione f definita da $f(x, y) = (x - 2)(x - 4)$.

c) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo su A_b della funzione f definita nel punto precedente, al variare di $b > 0$.

3) a) Dire quali punti del piano (x, y) soddisfano la relazione $\ln \left(\frac{x - 3y}{x + 3y} \right) < 0$.

b) Determinare una funzione v da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che la forma differenziale

$\omega := y^6 dx + v(x, y) dy$ sia esatta in $\mathbf{R}^2$. **Nota:** Basta trovare *una* v con tali proprietà; ossia non si chiede di trovare tutte le v con tali proprietà.

c) (parte più difficile del compito). Data una funzione u da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^1 tale che $u(0) = 0$ e $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, poniamo $\gamma(t) = \left((t^2 + 1) \cos(u(t)), (t^2 + 1) \sin(u(t)) \right)$. Provare che esistono infiniti numeri reali positivi d tali che l'integrale di ω lungo l'arco di γ su $[0, d]$ valga 0, ove ω è la forma differenziale definita al punto precedente.

4) a) Sia $C = \{(x, y) \in [-2, 2] \times [-1, 6] : x \geq 2 - y^2\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_C \left(y + (\sqrt{5} - 2)^{x+y+1} (\sqrt{5} + 2)^{x+y-1} \right) dx dy.$$

b) (Ing. medica) Dato C come nel punto precedente, calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, x + 1 \leq z \leq 2x\}.$$

b) (internet-TLC) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \cos(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = B \sin(\lambda t) \end{cases}$$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   26/02/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{(a^n + 4)\sqrt{5} - 1}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{\frac{6\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}}}$ converge.

2) Sia $A_b = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 3, 6 - \frac{1}{y} \leq x \leq \frac{b}{y} \right\}$, con $b > 0$.

a) Dire per quali $b > 0$ l'insieme A_b è non vuoto.

b) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo su A_{42} della funzione f definita da $f(x, y) = (y - 3)(y - 7)$.

c) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo su A_b della funzione f definita nel punto precedente, al variare di $b > 0$.

3) a) Dire quali punti del piano (x, y) soddisfano la relazione $\ln \left(\frac{y - 2x}{y + 2x} \right) < 0$.

b) Determinare una funzione v da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ tale che la forma differenziale

$\omega := \sin(y) dx + v(x, y) dy$ sia esatta in $\mathbf{R}^2$. **Nota:** Basta trovare una v con tali proprietà; ossia non si chiede di trovare tutte le v con tali proprietà.

c) (parte più difficile del compito). Data una funzione u da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^1 tale che $u(0) = 0$ e $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, poniamo $\gamma(t) = \left((t^2 + 1) \cos(u(t)), (t^2 + 1) \sin(u(t)) \right)$. Provare che esistono infiniti numeri reali positivi d tali che l'integrale di ω lungo l'arco di γ su $[0, d]$ valga 0, ove ω è la forma differenziale definita al punto precedente.

4) a) Sia $C = \{(x, y) \in [-3, 3] \times [-1, 10] : x \geq 3 - y^2\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_C \left(y + (\sqrt{10} - 3)^{x+6y+1} (\sqrt{10} + 3)^{x+6y-1} \right) dx dy.$$

b) (Ing. medica) Dato C come nel punto precedente, calcolare il volume dell'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, x + 1 \leq z \leq 2x\}.$$

c) (internet-TLC) Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = B \cos(\lambda t) \end{cases}$$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   07/02/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^{2\pi}-1}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^2 + \frac{1}{2})^{nx}$ converge.

2) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x-3)^2 \leq y, (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$. Determinare se esistono, massimo e minimo su A della funzione f_b definita da $f_b(x, y) = (x-3)^2 + y^2 - 2by$ per $b = \frac{1}{2}$.

b) Dire per quali numeri reali $b > 0$ f_b ha un punto stazionario in A . Ricordo che un punto stazionario di w è un punto dove si annulla il gradiente di w .

c) (parte più difficile del compito, è in più). Provare che se $v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 e definiamo la funzione w ponendo $w(x, y) = v(x(x^2 + y^2 - 1))$, allora esiste almeno un punto stazionario di w nella palla di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

NOTA: Mi sono accorto dopo che questa parte non era poi così difficile. Sembra che comunque gli studenti non al abbiano comunque capita. Si poteva invece mettere: Se w è una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}^2$ costante sui punti di norma 1, allora esiste almeno un punto stazionario di w nella palla di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

3) a) Determinare l'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ in cui vale l'uguaglianza $\frac{x^2 - 4y^2}{x + y - 2} = x - 2y$.

b) Determinare l'integrale della forma differenziale $3x^2y dx + x^3 dy$ lungo la curva $(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

4) a) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{y^2}{3y^2+1} \leq x \leq \frac{1}{4}, |y| \leq 50\}$. calcolare l'integrale doppio

$$\int_B \int y dx dy$$

b) Dire per quali numeri reali $d > 0$ l'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{y^2}{3y^2+1} \leq x \leq d\}$ è limitato.

c) (Igegn. medica) Calcolare il volume dell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$.

c) (Internet e TLC) Risolvere l'equazione

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 1 + H(t - t_0), & t_0 > 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = a \end{cases}$$

Scritto di analisi II per Ingegn. Medica-Internet
Anno Accademico 2012/13   07/02/2013

NOME:

COGNOME:

Corso:

1) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{(n^3+2)^{4e}-1}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^2 + \frac{1}{5})^{-nx}$ converge.

2) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (y+2)^2 \leq x, (y+2)^2 + x^2 \leq 1\}$. Determinare se esistono, massimo e minimo su A della funzione f_b definita da $f_b(x, y) = (y+2)^2 + x^2 - 3bx$ per $b = \frac{1}{3}$.

b) Dire per quali numeri reali $b > 0$ f_b ha un punto stazionario in A . Ricordo che un punto stazionario di w è un punto dove si annulla il gradiente di w .

c) (parte piú difficile del compito, è in piú). Provare che se $v : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione di classe C^1 e definiamo la funzione w ponendo $w(x, y) = v(e^y(x^2 + y^2 - 1))$, allora esiste almeno un punto stazionario di w nella palla di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

NOTA: Mi sono accorto dopo che questa parte non era poi così difficile. Sembra che comunque gli studenti non al abbiano comunque capita. Si poteva invece mettere: Se w è una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}^2$ costante sui punti di norma 1, allora esiste almeno un punto stazionario di w nella palla di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

3) a) Determinare l'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ in cui vale l'uguaglianza $\frac{9x^2 - y^2}{x + y - 5} = 3x - y$.

b) Determinare l'integrale della forma differenziale $2xy^2 dx + 2x^2y dy$ lungo la curva $(3 \cos(t), 3 \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

4) a) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{2x^2+1} \leq y \leq \frac{1}{5}, |x| \leq 30\}$. calcolare l'integrale doppio

$$\int_B \int x dx dy$$

b) Dire per quali numeri reali $d > 0$ l'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{2x^2+1} \leq y \leq d\}$ è limitato.

c) (Igegn. medica) Calcolare il volume dell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq (x^2 + y^2)^2\}$.

c) (Internet e TLC) Risolvere l'equazione

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 1 + H(t - t_0), & t_0 > 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = a \end{cases}$$

Secondo Esonero di Analisi II per Ingegn. Medica

Anno Accademico 2012/13

29/01/2013

NOME:

COGNOME:

Corso

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) a) Sia $\gamma(t) = (t, t^2) : t \in [1, 2]$. Calcolare $\int_{\gamma} x dx + xy dy$.

b) Sia $f_{a,b}(x, y) = \frac{1}{((x-a)^6 + (y-b)^6 - 12)^2}$, quando a e b sono numeri reali. Dire in che punti si annulla il gradiente di $f_{3,6}$ (ovviamente $f_{3,6}$ è la $f_{a,b}$ definita in precedenza con 3 al posto di a e 6 al posto di b). Poniamo ora $h = f_{3,6} + f_{1,4}$ e $\alpha(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$, $\beta(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$.

c) Provare che esiste un numero reale positivo $\bar{R}$ tale che, se $\|(x, y)\| > \bar{R}$, allora (x, y) appartiene al dominio di h .

d) Calcolare $\int_{\gamma_R} \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$, ove $\gamma_R(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $R = \bar{R} + 1$ e $\bar{R}$ è definito nel punto c). Richiamo che α e β sono definiti in b). *Nota: Lo studente che non è riuscito a provare c) può comunque assumere c) vera, e svolgere il presente punto d).*

2) a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A \left(xy^2 + \frac{x^2 - y^2}{xy^2 + x^2y} \right) dx dy$, ove $A = [1, 8] \times [2, 3]$.

b) Calcolare l'integrale doppio $\int_B y dx dy$ ove

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 2| < y < 10 - x, y < 8\}.$$

c) Calcolare l'integrale triplo $\int_C z dx dy dz$ ove $C = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq x + y\}$.

d) Provare che se v è una funzione continua e positiva (ossia $v(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$), da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$, allora esistono D_1 e D_2 sottoinsiemi misurabili di A tali che

i) $D_1 \cap D_2$ ha misura nulla,

ii) $D_1 \cup D_2 = A$,

iii) $\int_{D_1} v = \int_{D_2} v$.

Secondo Esonero di Analisi II per Ingegn. Medica

Anno Accademico 2012/13

29/01/2013

NOME:

COGNOME:

Corso

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) a) Sia $\gamma(t) = (t^3, t) : t \in [0, 3]$. Calcolare $\int_{\gamma} y dx + xy^2 dy$.

b) Sia $f_{a,b}(x, y) = \frac{1}{((x-a)^4 + (y-b)^4 - 17)^2}$, quando a e b sono numeri reali. Dire in che punti si annulla il gradiente di $f_{2,5}$ (ovviamente $f_{2,5}$ è la $f_{a,b}$ definita in precedenza con 2 al posto di a e 5 al posto di b). Poniamo ora $h = f_{2,5} + f_{3,1}$ e $\alpha(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$, $\beta(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$.

c) Provare che esiste un numero reale positivo $\bar{R}$ tale che, se $\|(x, y)\| > \bar{R}$, allora (x, y) appartiene al dominio di h .

d) Calcolare $\int_{\gamma_R} \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$, ove $\gamma_R(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $R = \bar{R} + 1$ e $\bar{R}$ è definito nel punto c). Richiamo che α e β sono definiti in b). *Nota: Lo studente che non è riuscito a provare c) può comunque assumere c) vera, e svolgere il presente punto d).*

2) a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A \left(x^3 y + \frac{x^4 - y^4}{x^3 + xy^2} \right) dx dy$, ove $A = [1, 4] \times [1, 3]$.

b) Calcolare l'integrale doppio $\int_B y^2 dx dy$ ove

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 3| < y < 9, y > 1\}.$$

c) Calcolare l'integrale triplo $\int_C z dx dy dz$ ove $C = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, -x - y \leq z \leq 2\}$.

d) Provare che se v è una funzione continua e positiva (ossia $v(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$), da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$, allora esistono D_1 e D_2 sottoinsiemi misurabili di A tali che

i) $D_1 \cap D_2$ ha misura nulla,

ii) $D_1 \cup D_2 = A$,

iii) $\int_{D_1} v = \int_{D_2} v$.

Secondo Esonero di Analisi II per Ingegn. Medica

Anno Accademico 2012/13

29/01/2013

NOME:

COGNOME:

Corso

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) a) Sia $\gamma(t) = (t, 5t^2) : t \in [1, 3]$. Calcolare $\int_{\gamma} x dx + xy dy$.

b) Sia $f_{a,b}(x, y) = \frac{1}{((x-a)^6 + (y-b)^6 - 14)^2}$, quando a e b sono numeri reali. Dire in che punti si annulla il gradiente di $f_{3,6}$ (ovviamente $f_{3,6}$ è la $f_{a,b}$ definita in precedenza con 3 al posto di a e 6 al posto di b). Poniamo ora $h = f_{3,6} + f_{2,3}$ e $\alpha(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$, $\beta(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$.

c) Provare che esiste un numero reale positivo $\bar{R}$ tale che, se $\|(x, y)\| > \bar{R}$, allora (x, y) appartiene al dominio di h .

d) Calcolare $\int_{\gamma_R} \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$, ove $\gamma_R(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $R = \bar{R} + 1$ e $\bar{R}$ è definito nel punto c). Richiamo che α e β sono definiti in b). *Nota: Lo studente che non è riuscito a provare c) può comunque assumere c) vera, e svolgere il presente punto d).*

2) a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A \left(xy^2 + \frac{x^2 - y^2}{xy^2 + x^2y} \right) dx dy$, ove $A = [1, 5] \times [2, 4]$.

b) Calcolare l'integrale doppio $\int_B y dx dy$ ove

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 2| < y < 10 - x, y < 8\}.$$

c) Calcolare l'integrale triplo $\int_C z dx dy dz$ ove $C = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, 1 \leq z \leq x + y\}$.

d) Provare che se v è una funzione continua e positiva (ossia $v(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$), da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$, allora esistono D_1 e D_2 sottoinsiemi misurabili di A tali che

i) $D_1 \cap D_2$ ha misura nulla,

ii) $D_1 \cup D_2 = A$,

iii) $\int_{D_1} v = \int_{D_2} v$.

Secondo Esonero di Analisi II per Ingegn. Medica

Anno Accademico 2012/13

29/01/2013

NOME:

COGNOME:

Corso

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) a) Sia $\gamma(t) = (2t^3, t) : t \in [0, 2]$. Calcolare $\int_{\gamma} y dx + xy^2 dy$.

b) Sia $f_{a,b}(x, y) = \frac{1}{((x-a)^4 + (y-b)^4 - 17)^2}$, quando a e b sono numeri reali. Dire in che punti si annulla il gradiente di $f_{2,5}$ (ovviamente $f_{2,5}$ è la $f_{a,b}$ definita in precedenza con 2 al posto di a e 5 al posto di b). Poniamo ora $h = f_{2,5} + f_{4,2}$ e $\alpha(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$, $\beta(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$.

c) Provare che esiste un numero reale positivo $\bar{R}$ tale che, se $\|(x, y)\| > \bar{R}$, allora (x, y) appartiene al dominio di h .

d) Calcolare $\int_{\gamma_R} \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy$, ove $\gamma_R(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $R = \bar{R} + 1$ e $\bar{R}$ è definito nel punto c). Richiamo che α e β sono definiti in b). *Nota: Lo studente che non è riuscito a provare c) può comunque assumere c) vera, e svolgere il presente punto d).*

2) a) Calcolare l'integrale doppio $\int_A \left(x^3 y + \frac{x^4 - y^4}{x^3 + xy^2} \right) dx dy$, ove $A = [2, 5] \times [1, 2]$.

b) Calcolare l'integrale doppio $\int_B y^2 dx dy$ ove

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 3| < y < 9, y > 1\}.$$

c) Calcolare l'integrale triplo $\int_C z dx dy dz$ ove $C = \{(x, y, z) : (x, y) \in A, -x - y \leq z \leq 1\}$.

d) Provare che se v è una funzione continua e positiva (ossia $v(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$), da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$, allora esistono D_1 e D_2 sottoinsiemi misurabili di A tali che

i) $D_1 \cap D_2$ ha misura nulla,

ii) $D_1 \cup D_2 = A$,

iii) $\int_{D_1} v = \int_{D_2} v$.

Esonero di analisi II per Ingegn. Medica-Internet

Anno Accademico 2012/13

01/12/2012

NOME:

COGNOME:

Corso

1) Definiamo $f(x, y) = (x - 3)(y - 5)$,

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 3, y \geq 5, y \leq 20 - x^2\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 3)(y - 5) = 0\}.$$

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} f(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} f(x, y)$.

b) Posto $g_t(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \notin B \\ t & \text{se } (x, y) \in B \end{cases}$, determinare, se esistono,

$\max_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

c) Determinare un aperto illimitato U in $\mathbf{R}^2$ tale che f è limitata in U .

2) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)7^n}{9^n + 1}$ converge.

b) Posto

$$a_{t,n} = \frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{tn+1}}, \quad t > 0,$$

provare che per ogni $t > 0$ esiste $\bar{n}_t$ tale che $a_{t,n}$ è definita (questo significa ovviamente che posso fare la frazione) per ogni $n \geq \bar{n}_t$.

c) Dire per quali $t > 0$ la serie $\sum_{n=\bar{n}_t}^{+\infty} a_{t,n}$ converge.

3) a) Determinare una successione $\alpha_n > 0$ di numeri reali positivi tale che la serie di

funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{n^2}{n+x^2}$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$. Nota: basta trovare **una** successione

α_n con questa proprietà .

b) Provare che esiste una successione a_n di numeri reali tale che, posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{3n^2+1} & \text{se } x = a_n \\ 0 & \text{se } x \neq a_n, \end{cases}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $\mathbf{R}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) i tre esercizi valgono circa 12 punti ognuno. Riteniamo la parte b) del terzo esercizio molto piú difficile del resto del compito.

Esonero di analisi II per Ingegn. Medica-Internet

Anno Accademico 2012/13

01/12/2012

NOME:

COGNOME:

Corso

1) Definiamo $f(x, y) = (x + 2)(y - 5)$,

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq -2, y \geq 5, y \leq 12 - x^2\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x + 2)(y - 5) = 0\}.$$

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} f(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} f(x, y)$.

b) Posto $g_t(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \notin B \\ t & \text{se } (x, y) \in B \end{cases}$, determinare, se esistono,

$\max_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

c) Determinare un aperto illimitato U in $\mathbf{R}^2$ tale che f è limitata in U .

2) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^3)n^6}{n^{16} + 1}$ converge.

b) Posto

$$a_{t,n} = \frac{\frac{1}{3^n+1}}{\frac{1}{2^n+3} - \frac{1}{t2^n+1}}, \quad t > 0,$$

provare che per ogni $t > 0$ esiste $\bar{n}_t$ tale che $a_{t,n}$ è definita (questo significa ovviamente che posso fare la frazione) per ogni $n \geq \bar{n}_t$.

c) Dire per quali $t > 0$ la serie $\sum_{n=\bar{n}_t}^{+\infty} a_{t,n}$ converge.

3) a) Determinare una successione $\alpha_n > 0$ di numeri reali positivi tale che la serie di funzioni

$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{3^n}{2^n + x^2}$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$. Nota: basta trovare **una** successione

α_n con questa proprietà.

b) Provare che esiste una successione a_n di numeri reali tale che, posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^5}{n^6+3} & \text{se } x = a_n \\ 0 & \text{se } x \neq a_n, \end{cases}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $\mathbf{R}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) i tre esercizi valgono circa 12 punti ognuno. Riteniamo la parte b) del terzo esercizio molto più difficile del resto del compito.

Esonero di analisi II per Ingegn. Medica-Internet

Anno Accademico 2012/13

01/12/2012

NOME:

COGNOME:

Corso

1) Definiamo $f(x, y) = (x - 2)(y - 6)$,

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 2, y \geq 6, y \leq 14 - x^2\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 2)(y - 6) = 0\}.$$

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} f(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} f(x, y)$.

b) Posto $g_t(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \notin B \\ t & \text{se } (x, y) \in B \end{cases}$, determinare, se esistono,

$\max_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

c) Determinare un aperto illimitato U in $\mathbf{R}^2$ tale che f è limitata in U .

2) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)6^n}{8^n + 1}$ converge.

b) Posto

$$a_{t,n} = \frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{tn+1}}, \quad t > 0,$$

provare che per ogni $t > 0$ esiste $\bar{n}_t$ tale che $a_{t,n}$ è definita (questo significa ovviamente che posso fare la frazione) per ogni $n \geq \bar{n}_t$.

c) Dire per quali $t > 0$ la serie $\sum_{n=\bar{n}_t}^{+\infty} a_{t,n}$ converge.

3) a) Determinare una successione $\alpha_n > 0$ di numeri reali positivi tale che la serie di funzioni

$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{n^4}{n^3 + x^2}$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$. Nota: basta trovare **una** successione

α_n con questa proprietà.

b) Provare che esiste una successione a_n di numeri reali tale che, posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{4n^2+2} & \text{se } x = a_n \\ 0 & \text{se } x \neq a_n, \end{cases}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $\mathbf{R}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) i tre esercizi valgono circa 12 punti ognuno. Riteniamo la parte b) del terzo esercizio molto più difficile del resto del compito.

Esonero di analisi II per Ingegn. Medica-Internet

Anno Accademico 2012/13

01/12/2012

NOME:

COGNOME:

Corso

1) Definiamo $f(x, y) = (x + 1)(y - 7)$,

$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq -1, y \geq 7, y \leq 12 - x^2\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x + 1)(y - 7) = 0\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} f(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} f(x, y)$.

b) Posto $g_t(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \notin B \\ t & \text{se } (x, y) \in B \end{cases}$, determinare, se esistono,

$\max_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

c) Determinare un aperto illimitato U in $\mathbf{R}^2$ tale che f è limitata in U .

2) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^3)n^9}{n^{19} + 1}$ converge.

b) Posto

$$a_{t,n} = \frac{\frac{1}{3^n+1}}{\frac{1}{2^n+3} - \frac{1}{t2^n+1}}, \quad t > 0,$$

provare che per ogni $t > 0$ esiste $\bar{n}_t$ tale che $a_{t,n}$ è definita (questo significa ovviamente che posso fare la frazione) per ogni $n \geq \bar{n}_t$.

c) Dire per quali $t > 0$ la serie $\sum_{n=\bar{n}_t}^{+\infty} a_{t,n}$ converge.

3) a) Determinare una successione $\alpha_n > 0$ di numeri reali positivi tale che la serie di funzioni

$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{5^n}{3^n + x^2}$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$. Nota: basta trovare **una** successione

α_n con questa proprietà.

b) Provare che esiste una successione a_n di numeri reali tale che, posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^4}{n^5+8} & \text{se } x = a_n \\ 0 & \text{se } x \neq a_n, \end{cases}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $\mathbf{R}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) i tre esercizi valgono circa 12 punti ognuno. Riteniamo la parte b) del terzo esercizio molto più difficile del resto del compito.

Esonero di analisi II per Ingegn. Medica-Internet

Anno Accademico 2012/13

01/12/2012

NOME:

COGNOME:

Corso

1) Definiamo $f(x, y) = (x - 4)(y - 1)$,

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 4, y \geq 1, y \leq 20 - x^2\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 4)(y - 1) = 0\}.$$

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} f(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} f(x, y)$.

b) Posto $g_t(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \notin B \\ t & \text{se } (x, y) \in B \end{cases}$, determinare, se esistono,

$\max_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

c) Determinare un aperto illimitato U in $\mathbf{R}^2$ tale che f è limitata in U .

2) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)4^n}{6^n + 1}$ converge.

b) Posto

$$a_{t,n} = \frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{tn+1}}, \quad t > 0,$$

provare che per ogni $t > 0$ esiste $\bar{n}_t$ tale che $a_{t,n}$ è definita (questo significa ovviamente che posso fare la frazione) per ogni $n \geq \bar{n}_t$.

c) Dire per quali $t > 0$ la serie $\sum_{n=\bar{n}_t}^{+\infty} a_{t,n}$ converge.

3) a) Determinare una successione $\alpha_n > 0$ di numeri reali positivi tale che la serie di funzioni

$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{n^9}{n^6 + x^2}$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$. Nota: basta trovare **una** successione

α_n con questa proprietà.

b) Provare che esiste una successione a_n di numeri reali tale che, posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{6n^2+4} & \text{se } x = a_n \\ 0 & \text{se } x \neq a_n, \end{cases}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $\mathbf{R}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) i tre esercizi valgono circa 12 punti ognuno. Riteniamo la parte b) del terzo esercizio molto più difficile del resto del compito.

Esonero di analisi II per Ingegn. Medica-Internet

Anno Accademico 2012/13

01/12/2012

NOME:

COGNOME:

Corso

1) Definiamo $f(x, y) = (x + 3)(y - 7)$,

$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq -3, y \geq 7, y \leq 19 - x^2\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x + 3)(y - 7) = 0\}$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} f(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} f(x, y)$.

b) Posto $g_t(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \notin B \\ t & \text{se } (x, y) \in B \end{cases}$, determinare, se esistono,

$\max_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} g_t(x, y)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

c) Determinare un aperto illimitato U in $\mathbf{R}^2$ tale che f è limitata in U .

2) a) Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^3)n^3}{n^{13} + 1}$ converge.

b) Posto

$$a_{t,n} = \frac{\frac{1}{3^n+1}}{\frac{1}{2^n+3} - \frac{1}{t2^n+1}}, \quad t > 0,$$

provare che per ogni $t > 0$ esiste $\bar{n}_t$ tale che $a_{t,n}$ è definita (questo significa ovviamente che posso fare la frazione) per ogni $n \geq \bar{n}_t$.

c) Dire per quali $t > 0$ la serie $\sum_{n=\bar{n}_t}^{+\infty} a_{t,n}$ converge.

3) a) Determinare una successione $\alpha_n > 0$ di numeri reali positivi tale che la serie di funzioni

$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{7^n}{5^n + x^2}$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$. Nota: basta trovare **una** successione

α_n con questa proprietà .

b) Provare che esiste una successione a_n di numeri reali tale che, posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2}{n^3+7} & \text{se } x = a_n \\ 0 & \text{se } x \neq a_n, \end{cases}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $\mathbf{R}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome, cognome e corso (Ing. medica, oppure internet, etc.).

A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) i tre esercizi valgono circa 12 punti ognuno. Riteniamo la parte b) del terzo esercizio molto più difficile del resto del compito.