Scritto di CAM1
Anno Accademico 2012/13 13/09/2013

1) a) Provare che gli insieme E e F definiti qui sotto sono boreliani.

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \le y < 3x^2\},$$

$$F = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ \exists n \in \mathbf{Z} : x + n \le y < x + n + \frac{1}{5}\big\}.$$

b) Sia f definita da $f(x) = \begin{cases} x + 4 \text{ se } x < 1 \\ 5x^2 \text{ altrimenti} \end{cases}$. Dire se f è A.C. su $[0, 2]$ e se f è B.V. su $[0, 2]$.
c) Sia g una funzione da $[4, 5]$ in $\mathbf{R}$ tale che per ogni intervallo aperto $]a, b[$ con $a < b$ contenuto in $[4, 5]$ si abbia $g\big(]a, b[\big) = \mathbf{Q} \cap [1, 2[$. Provare che g non è B.V. in $[4, 5]$.
d) Determinare una funzione g come in c).

2) a) Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{5}{4}}^{2} \frac{nx}{nx + \sin(nx)}\, dx$.

b) Sia $A = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \ge 1, 0 \le y \le \frac{1}{x}\big\}$. Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione f definita da $f(x, y) = y^2 x^\alpha$ appartiene a $L^4(A)$.
c) Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_A \frac{2ny^3}{ny^2 + x + 1}\, dx\, dy$, ove A è come in b).
d) Sia $B_n = \big\{\big(\rho\cos(t), \rho\sin(t)\big) : \rho \in [2, 3], t \in [n\alpha, (n + 1)\alpha]\big\}$, ove $\alpha = \frac{\pi}{153\sqrt{2}}$. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} \frac{x}{1 + \sin^2(nxy)}\, dx\, dy$.

3) Sia $C = \{0\} \times \mathbf{R}$ e sia μ una misura definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ tale che $\mu(C) = 0$.
a) Provare che se μ è finita, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U aperto di $\mathbf{R}^2$ contenente C tale che $\mu(U) < \varepsilon$.
b) Provare che se per ogni $n \in \mathbf{Z}$ esiste $\delta_n > 0$ tale che $\mu\big([-\delta_n, \delta_n] \times [n, n + 1]\big) < +\infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U aperto di $\mathbf{R}^2$ contenente C tale che $\mu(U) < \varepsilon$.

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2012/13 13/09/2013

1) a) Provare che gli insieme E e F definiti qui sotto sono boreliani.

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x + 7 < y \le x + 8\},$$

$$F = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ \exists\, n \in \mathbf{Z} : x^2 + n < y \le x^2 + n + \frac{1}{3}\big\}.$$

b) Sia f definita da $f(x) = \begin{cases} x+6 \text{ se } x<3 \\ x^2 \text{ altrimenti} \end{cases}$. Dire se f è A.C. su $[2,4]$ e se f è B.V. su $[2,4]$.
c) Sia g una funzione da $[2,3]$ in $\mathbf{R}$ tale che per ogni intervallo aperto $]a,b[$ con $a<b$ contenuto in $[2,3]$ si abbia $g\big(]a,b[\big) = \mathbf{Q} \cap [6,7[$. Provare che g non è B.V. in $[2,3]$.
d) Determinare una funzione g come in c).

2) a) Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{8}{7}}^{2} \frac{nx^2}{nx^2 + \cos(nx)}\, dx$.

b) Sia $A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \ge 1, 0 \le y \le \frac{1}{x}\big\}$. Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione f definita da $f(x,y) = y^\alpha \sqrt{x}$ appartiene a $L^5(A)$.
c) Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_A \frac{4ny^7}{ny^5 + x^2 + 1}\, dx\, dy$, ove A è come in b).
d) Sia $B_n = \{\big(\rho\cos(t), \rho\sin(t)\big) : \rho \in [2,3], t \in [n\alpha, (n+1)\alpha]\}$, ove $\alpha = \frac{\pi}{138\sqrt{3}}$. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} \frac{x^3}{2 + \cos^2(nxy)}\, dx\, dy$.

3) Sia $C = \mathbf{R} \times \{0\}$ e sia μ una misura definita sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ tale che $\mu(C) = 0$.
a) Provare che se μ è finita, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U aperto di $\mathbf{R}^2$ contenente C tale che $\mu(U) < \varepsilon$.
b) Provare che se per ogni $n \in \mathbf{Z}$ esiste $\delta_n > 0$ tale che $\mu\big([n,n+1] \times [-\delta_n, \delta_n]\big) < +\infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste U aperto di $\mathbf{R}^2$ contenente C tale che $\mu(U) < \varepsilon$.

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2012/13 11/07/2013

1) a) Dire se la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x-3}$ è A.C. su $[1,2]$ e se è B.V. su $[1,2]$.
b) Sia u una funzione misurabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Sia v la funzione definita da $v(x) = \int\limits_0^x \cos\big(u(t)\big)\,dt$. Dire se v è sempre A.C. su $[1,4]$.
c) Sia s una funzione da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ continua in 0 e tale che s è monotona su $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ per ogni $n = 1,2,3,.....$ Provare che s è B.V. su $[0,1]$ se e solo se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|s(\frac{1}{n+1}) - s(\frac{1}{n})\right|$ è convergente.

2) a) Dire per quali $p \geq 1$ la funzione g definita da $g(x) = \frac{1}{x}$ è in $L^p([1,4] \cup [7,+\infty[)$ e per quali $p \geq 1$ è in $L^p(A)$, ove $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [n, n+\frac{1}{2}]$.
b) Indichiamo con $B_r(z)$ la palla aperta in $\mathbf{R}^2$ di centro $z \in \mathbf{R}^2$ e raggio r per ogni $r > 0$ e poniamo $B_r := B_r(0)$. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{B_1 \setminus \overline{B_{1-\frac{1}{n}}}} \dfrac{xy}{|x|+|y|+4}\,dx\,dy.$
c) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=n}^{n^2} B_{\frac{1}{k}}(k,k)} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{10}+3}\,dx\,dy.$
d) Dire se esistono, $\alpha_n > 0$ tali che $\int\limits_{\bigcup\limits_{k=n}^{n^2} B_{\alpha_k}(k,k)} e^{x^2y^4}\,dx\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

3) Siano μ e ν due misure di Radon definite sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ e supponiamo inoltre $\nu(\mathbf{R}^2) = 1$ e $\mu([0,1] \times [0,1]) = 1$.
a) Provare che se esiste $\bar{r} > 0$ tale che $\mu(A+v) = \mu(A)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ con $||v|| > \bar{r}$ e per ogni A boreliano di $\mathbf{R}^2$, allora μ coincide con la misura di Lebesgue.
b) Provare che se per ogni A boreliano di $\mathbf{R}^2$ esiste $\bar{r} > 0$ tale che $\mu(A+v) = \mu(A)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ con $||v|| > \bar{r}$, allora μ coincide con la misura di Lebesgue.
c) Provare che se esiste $\bar{s} > 0$ tale che per ogni A boreliano di $\mathbf{R}^2$ e per ogni s tale che $0 < s < \bar{s}$ l'insieme

$$C_A := \{v \in B_s : \mu(A+v) = \mu(A)\}$$

soddisfa $\nu(C_A) > \frac{1}{2}\nu(B_s)$, allora μ coincide con la misura di Lebesgue.

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2012/13 11/07/2013

1) a) Dire se la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin(e^x)}{x-7}$ è A.C. su $[1,3]$ e se è B.V. su $[1,3]$.
b) Sia u una funzione misurabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Sia v la funzione definita da $v(x) = \int_0^x \sin\big(u(t)\big)\,dt$. Dire se v è sempre A.C. su $[1,4]$.
c) Sia s una funzione da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ continua in 0 e tale che s è monotona su $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots..$ Provare che s è B.V. su $[0,1]$ se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|s(\frac{1}{n+1}) - s(\frac{1}{n})\right|$ è convergente.

2) a) Dire per quali $p \geq 1$ la funzione g definita da $g(x) = \frac{1}{x}$ è in $L^p([1,3] \cup [97, +\infty[)$ e per quali $p \geq 1$ è in $L^p(A)$, ove $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, n + \frac{1}{3}]$.
b) Indichiamo con $B_r(z)$ la palla aperta in $\mathbf{R}^2$ di centro $z \in \mathbf{R}^2$ e raggio r per ogni $r > 0$ e poniamo $B_r := B_r(0)$. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \int_{B_1 \setminus \overline{B}_{1-\frac{1}{n}}} \dfrac{x+2y}{|x|+|y|+4}\,dx\,dy.$
c) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\bigcup_{k=n}^{n^2} B_{\frac{1}{k}}(k,k)} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{14}+5}\,dx\,dy.$
d) Dire se esistono, $\alpha_n > 0$ tali che $\int_{\bigcup_{k=n}^{n^2} B_{\alpha_k}(k,k)} e^{x^2y^4}\,dx\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

3) Siano μ e ν due misure di Radon definite sui boreliani di $\mathbf{R}^2$ e supponiamo inoltre $\nu(\mathbf{R}^2) = 1$ e $\mu([0,1] \times [0,1]) = 1$.
a) Provare che se esiste $\bar{r} > 0$ tale che $\mu(A + v) = \mu(A)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ con $||v|| > \bar{r}$ e per ogni A boreliano di $\mathbf{R}^2$, allora μ coincide con la misura di Lebesgue.
b) Provare che se per ogni A boreliano di $\mathbf{R}^2$ esiste $\bar{r} > 0$ tale che $\mu(A + v) = \mu(A)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ con $||v|| > \bar{r}$, allora μ coincide con la misura di Lebesgue.
c) Provare che se esiste $\bar{s} > 0$ tale che per ogni A boreliano di $\mathbf{R}^2$ e per ogni s tale che $0 < s < \bar{s}$ l'insieme

$$C_A := \{v \in B_s : \mu(A + v) = \mu(A)\}$$

soddisfa $\nu(C_A) > \frac{1}{2}\nu(B_s)$, allora μ coincide con la misura di Lebesgue.

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2012/13 13/02/2013

1) a) Provare che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \ln\Big(\sin\big(\frac{1}{10}x\big)\Big) - \ln(x)$ è A.C. su $[1, 3]$
b) Dire se esiste finito il limite $\lim_{a\to 0^+} V_a^3(f)$.

2) a) Data g definita da $g(x, y) = \frac{x^2}{y}$, dire per quali $p > 1$ $g \in L^p(B)$ ove B è la palla aperta centrata in $(8, 10)$ di raggio 1.
b) Data g come in a), dire per quali $p > 1$ $g \in L^p(C)$, ove

$$C =: \big\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 3] : y > 1 - (x - 1)^2\big\}.$$

c) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 2, y \geq 2, x + 2y \leq 8\}$. Calcolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D e^{\frac{(x+2y)^2}{n}}\, dx\, dy.$$

d) Calcolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D \frac{1}{n} \frac{1}{(x-20)^2 + (y-20)^2 - \cos^2(n)}\, dx\, dy.$$

e) Calcolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D n\Big(e^{\frac{(x+y)^2}{n}} - 1\Big)\, dx\, dy.$$

3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $w : X \to \mathbf{R}$ misurabile.
a) Supponiamo $\mu(X) < +\infty$. Provare che per ogni $d > 0$ l'insieme
$\Big\{t \in \mathbf{R} | \mu\big(w^{-1}(\{t\})\big) > d\Big\}$ è finito (eventualmente vuoto).
b) Provare che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finita, allora l'insieme H_w definito da $H_w := \Big\{t \in \mathbf{R} | \mu\big(w^{-1}(\{t\})\big) > 0\Big\}$ è finito o numerabile.
c) Supponiamo $X = \mathbf{R}^N$, $N = 1, 2, 3, ...$, $\mathcal{A}$ sia la σ-algebra dei boreliani di $\mathbf{R}^N$, e μ sia la misura di Lebesgue. Sia G un qualunque sottoinsieme numerabile di $\mathbf{R}$. Provare che esiste una funzione continua $w : X \to \mathbf{R}$ tale che l'insieme H_w definito in b) coincide con G.

Anno Accademico 2012/13 **13/02/2013**

1) a) Provare che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \ln\Big(\sin\big(\frac{1}{11}x\big)\Big) - \ln(x)$ è A.C. su $[1, 2]$

b) Dire se esiste finito il limite $\lim_{a\to 0^+} V_a^2(f)$.

2) a) Data g definita da $g(x, y) = \frac{x^2}{y}$, dire per quali $p > 1$ $g \in L^p(B)$ ove B è la palla aperta centrata in $(9, 11)$ di raggio 1.

b) Data g come in a), dire per quali $p > 1$ $g \in L^p(C)$, ove

$$C =: \big\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 4] : y > 1 - (x - 1)^2\big\}.$$

c) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 2, y \geq 2, 3x + y \leq 10\}$. Calcolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D e^{\frac{(3x+y)^2}{n}}\, dx\, dy.$$

d) Calcolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D \frac{1}{n} \frac{1}{(x-20)^2 + (y-20)^2 - \sin^2(n)}\, dx\, dy.$$

e) Calcolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D n\Big(e^{\frac{(x+y)^2}{n}} - 1\Big)\, dx\, dy.$$

3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $w : X \to \mathbf{R}$ misurabile.

a) Supponiamo $\mu(X) < +\infty$. Provare che per ogni $d > 0$ l'insieme $\Big\{t \in \mathbf{R} | \mu\big(w^{-1}(\{t\})\big) > d\Big\}$ è finito (eventualmente vuoto).

b) Provare che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finita, allora l'insieme H_w definito da $H_w := \Big\{t \in \mathbf{R} | \mu\big(w^{-1}(\{t\})\big) > 0\Big\}$ è finito o numerabile.

c) Supponiamo $X = \mathbf{R}^N$, $N = 1, 2, 3, ...$, $\mathcal{A}$ sia la σ-algebra dei boreliani di $\mathbf{R}^N$, e μ sia la misura di Lebesgue. Sia G un qualunque sottoinsieme numerabile di $\mathbf{R}$. Provare che esiste una funzione continua $w : X \to \mathbf{R}$ tale che l'insieme H_w definito in b) coincide con G.

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2012/13 25/01/2013

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ________________________

1) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \le x \le 3\}$ e sia $C_{v,r} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : r < ||(x,y) - v|| < r+3\}$ ove $v \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$.
a) Provare che $A \cap C_{v,r}$ è un boreliano di misura di Lebesgue finita per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$.
b) Dire se esiste $H > 0$ tale che $m_2\big(A \cap C_{v,r}\big) \le H$ per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$.

2) a) Calcolare, se esiste $\lim_{n\to+\infty} \int_{[1,2]\times[3,4]} \frac{nx^2}{ny^{\frac{5}{4}}+3}\,dx\,dy.$

b) Calcolare, se esiste $\lim_{n\to+\infty} \int_{[1,2]\times]0,1]} \frac{nx^2}{ny^{\frac{5}{4}}+3}\,dx\,dy.$

c) Calcolare, se esiste $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\frac{1}{n}]\times[7,n+7]} \frac{n^2x^2}{n^2y^{\frac{5}{4}}+3}\,dx\,dy.$

d) Calcolare, se esiste $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\frac{1}{n}]\times]0,n]} \frac{nx^2}{ny^{\frac{5}{4}}+3}\,dx\,dy.$

3) a) Dire se la funzione f definita da $f(x) = |x^4 - 2|$ è B.V. su $[-3,3]$, e calcolare $V_{-3}^{3}(f)$.
b) Provare che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura con $\mu(X) = 3$ e $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ e $\mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) > 6$, allora $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$.
c) Provare (piú generalmente) che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura finita e A_i, $i = 1, ..., k$ sono k elementi di $\mathcal{A}$ con k intero positivo, e $\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) > (n-1)\mu(X)$, allora esistono n elementi $A_{i_1}, ..., A_{i_n}$ con gli indici i_j tutti diversi tra loro tali che $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} \neq \emptyset$.
Suggerimento: Si consiglia di considerare gli insiemi $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\bigcap_{i\notin I} A_i^c\big)$ ove A^c indica il complementare di A e I è un sottoinsieme di $\{1, ..., k\}$, e poi unire bene tali insiemi.
d) Provare che se g è una funzione continua da $[2,3]$ in $\mathbf{R}$, limitata ma non B.V. allora esiste un numero reale a tale che l'equazione $g(x) = a$ ha almeno 950 soluzioni.

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2012/13 25/01/2013

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 5 \le x \le 6\}$ e sia $C_{v,r} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : r < ||(x,y) - v|| < r + 3\}$ ove $v \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$.
a) Provare che $A \cap C_{v,r}$ è un boreliano di misura di Lebesgue finita per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$.
b) Dire se esiste $H > 0$ tale che $m_2\big(A \cap C_{v,r}\big) \le H$ per ogni $v \in \mathbf{R}^2$ e $r > 0$.

2) a) Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[1,2]\times[3,4]} \frac{nx^2}{ny^{\frac{7}{6}} + 2}\, dx\, dy.$

b) Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[1,2]\times]0,1]} \frac{nx^2}{ny^{\frac{7}{6}} + 2}\, dx\, dy.$

c) Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\frac{1}{n}]\times[5,n+5]} \frac{n^2x^2}{n^2y^{\frac{7}{6}} + 2}\, dx\, dy.$

d) Calcolare, se esiste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\frac{1}{n}]\times]0,n]} \frac{nx^2}{ny^{\frac{7}{6}} + 2}\, dx\, dy.$

3) a) Dire se la funzione f definita da $f(x) = |x^6 - 2|$ è B.V. su $[-3,3]$, e calcolare $V_{-3}^{3}(f)$.
b) Provare che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura con $\mu(X) = 4$ e $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ e $\mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) > 8$, allora $A_1 \cap A_3 \ne \emptyset$.
c) Provare (piú generalmente) che se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura finita e A_i, $i = 1, ..., k$ sono k elementi di $\mathcal{A}$ con k intero positivo, e $\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) > (n-1)\mu(X)$, allora esistono n elementi $A_{i_1}, ..., A_{i_n}$ con gli indici i_j tutti diversi tra loro tali che $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} \ne \emptyset$.
Suggerimento: Si consiglia di considerare gli insiemi $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \cap \big(\bigcap_{i\notin I} A_i^c\big)$ ove A^c indica il complementare di A e I è un sottoinsieme di $\{1, ..., k\}$, e poi unire bene tali insiemi.
d) Provare che se g è una funzione continua da $[5,6]$ in $\mathbf{R}$, limitata ma non B.V. allora esiste un numero reale a tale che l'equazione $g(x) = a$ ha almeno 950 soluzioni.

Secondo esonero di CAM1
Anno Accademico 2012/13 21/12/2012

NOME: **COGNOME:**

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ________________________

1) Sia f la funzione periodica di periodo 2 tale che $f(x) = 2|x| + 5$ per ogni $x \in [-1, 1]$.
a) Provare che f è A.C. in $[0, \frac{1}{4}]$.
b) Dire se f è B.V. in $[-a, a]$ e se f è A.C. in $[-a, a]$, al variare di $a > 0$
c) Provare che se $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è periodica di periodo 5 e non costante, allora, posto $g_n(x) = g(nx)$, si ha $V_0^1(g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *Nota: non si suppone a priori g continua, né g B.V.*

2) a) Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione h_α definita da $h_\alpha(x, y) = |x|^{-\alpha}$ appartiene a $L^2(B)$ ove $B = [1, 2] \times [4, 8] \cup \big([-20, 20] \times \{0\}\big)$.
b) Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione h_α definita sopra appartiene a $L^2(C)$ ove $C = \Big([-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}] \times [0, 1]\Big) \setminus B_1(0, 1)$, ove ovviamente $B_1(0, 1)$ denota la palla (aperta) centrata in $(0, 1)$ di raggio 1.

3) Diciamo che un boreliano A di $[2, 3[$ è *1-largo* se ogni funzione continua su $[2, 3[$ a valori in $[0, +\infty[$ sommabile su A è anche sommabile su $[2, 3[$, e che un boreliano A di $[2, 3[$ è *debolmente 1-largo* se ogni funzione continua e *crescente* su $[2, 3[$ a valori in $[0, +\infty[$ sommabile su A è anche sommabile su $[2, 3[$.
a) Provare che ogni intervallo della forma $]a, 3[$ con $a \in]2, 3[$ è 1-largo.
b) Provare che se A è 1-largo, allora esiste $a \in]2, 3[$ tale che l'insieme $]a, 3[\setminus A$ ha misura di Lebesgue nulla.
c) Dire se esiste $A \subseteq [2, 3[$ tale che sia A sia $[2, 3[\setminus A$ sono debolmente 1-larghi.

Secondo esonero di CAM1

Anno Accademico 2012/13 21/12/2012

NOME: COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) Sia f la funzione periodica di periodo 2 tale che $f(x) = 4|x| + 3$ per ogni $x \in [-1, 1]$.
a) Provare che f è A.C. in $[0, \frac{1}{4}]$.
b) Dire se f è B.V. in $[-a, a]$ e se f è A.C. in $[-a, a]$, al variare di $a > 0$
c) Provare che se $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è periodica di periodo 5 e non costante, allora, posto $g_n(x) = g(nx)$, si ha $V_0^1(g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *Nota: non si suppone a priori g continua, né g B.V.*

2) a) Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione h_α definita da $h_\alpha(x, y) = |x|^{-\alpha}$ appartiene a $L^2(B)$ ove $B = [3, 6] \times [2, 5] \cup \big([-12, 26] \times \{0\}\big)$.
b) Dire per quali $\alpha > 0$ la funzione h_α definita sopra appartiene a $L^2(C)$ ove $C = \Big([-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}] \times [0, 1]\Big) \setminus B_2(0, 2)$, ove ovviamente $B_2(0, 2)$ denota la palla (aperta) centrata in $(0, 2)$ di raggio 2.

3) Diciamo che un boreliano A di $[2, 3[$ è *1-largo* se ogni funzione continua su $[2, 3[$ a valori in $[0, +\infty[$ sommabile su A è anche sommabile su $[2, 3[$, e che un boreliano A di $[2, 3[$ è *debolmente 1-largo* se ogni funzione continua e *crescente* su $[2, 3[$ a valori in $[0, +\infty[$ sommabile su A è anche sommabile su $[2, 3[$.
a) Provare che ogni intervallo della forma $]a, 3[$ con $a \in]2, 3[$ è 1-largo.
b) Provare che se A è 1-largo, allora esiste $a \in]2, 3[$ tale che l'insieme $]a, 3[\setminus A$ ha misura di Lebesgue nulla.
c) Dire se esiste $A \subseteq [2, 3[$ tale che sia A sia $[2, 3[\setminus A$ sono debolmente 1-larghi.

Esonero di CAM1
Anno Accademico 2012/13 19/11/2012

NOME: COGNOME:

1) Siano A e B_d, $d \in \mathbf{R}$, insiemi definiti da

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < \cos(x)\}; \quad B_d = \{(x, y) \in A : y \geq x^6 - d\}.$$

a) Provare che A e B_d (per qualunque $d \in \mathbf{R}$) sono boreliani.
b) Dire se A ha misura finita, e per quali $d \in \mathbf{R}$ B_d ha misura positiva (ossia > 0).

2) Siano f_n definite da $f_n(x) = \dfrac{7n^{x+1} + 1}{n^{3x} + 1}$.

a) Provare che la successione di integrali $\displaystyle\int_4^5 f_n \, dm_1$ è convergente.

b) Provare che per ogni $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua la successione di integrali $\displaystyle\int_4^5 u \circ f_n \, dm_1$ è convergente.

c) Dire se la successione $\displaystyle\int_0^1 f_n \, dm_1$ è convergente.

3) Sia $A = [4, 5] \times [6, 7]$. Sia data una misura μ definita sui boreliani di A tale che
i) $\mu(A) = 1$.
ii) $\mu(\{P\}) = 0$ per ogni $P \in A$.

a) Posto $B_n = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x, y) = (4 + t, 6 + t), t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}$, provare che $\mu(B_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
b) Provare che esiste $c > 0$ tale che per ogni $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$ esiste un quadrato Q_η della forma $Q_\eta := [a, a + \eta] \times [b, b + \eta]$ contenuto in A tale che $\mu(Q_\eta) \geq c\eta^2$.
c) Provare che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se D è un boreliano di A di diametro minore di δ, allora $\mu(D) < \varepsilon$. Ovviamente il diametro è inteso rispetto alla metrica euclidea.

Esonero di CAM1

Anno Accademico 2012/13 19/11/2012

NOME: **COGNOME:**

1) Siano A e B_d, $d \in \mathbf{R}$, insiemi definiti da

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < \cos(x)\big\}; \quad B_d = \big\{(x,y) \in A : y \geq 3x^4 - d\big\}.$$

a) Provare che A e B_d (per qualunque $d \in \mathbf{R}$) sono boreliani.
b) Dire se A ha misura finita, e per quali $d \in \mathbf{R}$ B_d ha misura positiva (ossia > 0).

2) Siano f_n definite da $f_n(x) = \dfrac{4n^{x+2}+1}{n^{4x}+1}$.

a) Provare che la successione di integrali $\displaystyle\int_3^4 f_n \, dm_1$ è convergente.

b) Provare che per ogni $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua la successione di integrali $\displaystyle\int_3^4 u \circ f_n \, dm_1$ è convergente.

c) Dire se la successione $\displaystyle\int_0^1 f_n \, dm_1$ è convergente.

3) Sia $A = [8,9] \times [2,3]$. Sia data una misura μ definita sui boreliani di A tale che
i) $\mu(A) = 1$.
ii) $\mu(\{P\}) = 0$ per ogni $P \in A$.

a) Posto $B_n = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x,y) = (8+t, 3-t), t \in \big[0, \dfrac{1}{n}\big]\Big\}$, provare che $\mu(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Provare che esiste $c > 0$ tale che per ogni $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$ esiste un quadrato Q_η della forma $Q_\eta := [a, a+\eta] \times [b, b+\eta]$ contenuto in A tale che $\mu(Q_\eta) \geq c\eta^2$.

c) Provare che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se D è un boreliano di A di diametro minore di δ, allora $\mu(D) < \varepsilon$. Ovviamente il diametro è inteso rispetto alla metrica euclidea.