

NOME: _____ COGNOME: _____

1) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x + 2y < 2, x > 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in A : x \in \mathbf{Q}\}$.

a) Provare che A e B sono boreliani.

b) Calcolare la misura di Lebesgue di A e B .

2) a) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos\left(\frac{x + \sqrt[3]{x}}{n}\right) dx$.

b) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \cos\left(\frac{x + \sqrt[3]{x}}{n}\right) dx$.

c) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ continua, e tale che $f(0, 0) = 7$. Sia B_r la palla chiusa di centro l'origine e raggio $r > 0$ in $\mathbf{R}^2$. Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_{\frac{1}{n}}} f(x, y) dx dy$.

d) Con le notazioni di c), calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_{\frac{1}{n}}} n^\alpha f(x, y) dx dy$ al variare di $\alpha > 0$.

3) a) Date le funzioni $g(x) = \sin^7(10x)$, $h(x) = [x^2]$, dire se g è A.C. su $[0, 2]$, se g è B.V. su $[0, 2]$, se h è A.C. su $[0, 2]$, se h è B.V. su $[0, 2]$. Qui $[x]$ denota la parte intera di x .

b) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0, 1 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}$. Posto $u(x, y) = \frac{1}{y}$, dire se $u \in L^2(C)$ e se $u \in L^\infty(C)$.

4) Supponiamo che μ sia una misura finita sui boreliani di $[0, 1]$. Supponiamo inoltre che

i) $\mu(E) = 0$ se e solo se $m_1(E) = 0$ per ogni E boreliano di $[0, 1]$.

ii) Se E boreliano di $[0, 1]$ e $\mu(E) > 0$, allora esiste F boreliano di $[0, 1]$ contenuto in E tale che $\mu(F) = m_1(F) > 0$.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei boreliani F di $[0, 1]$ tali che $\mu(F) = m_1(F)$.

a) Provare che se E e F sono boreliani di $[0, 1]$, $E \notin \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{A}$, $F \subseteq E$, allora esiste $F' \in \mathcal{A}$, tale che $F \subseteq F' \subseteq E$, e $m_1(F') > m_1(F)$.

b) Si può dire che $m_1(E) = \mu(E)$ per ogni boreliano E di $[0, 1]$?

NOME: _____ COGNOME: _____

1) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x + 3y < 4, x > 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in A : x \in \mathbf{Q}\}$.

a) Provare che A e B sono boreliani.

b) Calcolare la misura di Lebesgue di A e B .

2) a) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos\left(\frac{x + \sqrt[5]{x}}{n}\right) dx$.

b) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \cos\left(\frac{x + \sqrt[5]{x}}{n}\right) dx$.

c) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ continua, e tale che $f(0, 0) = 5$. Sia B_r la palla chiusa di centro l'origine e raggio $r > 0$ in $\mathbf{R}^2$. Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_{\frac{1}{n}}} f(x, y) dx dy$.

d) Con le notazioni di c), calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_{\frac{1}{n}}} n^\alpha f(x, y) dx dy$ al variare di $\alpha > 0$.

3) a) Date le funzioni $g(x) = \sin^4(8x)$, $h(x) = [x^3]$, dire se g è A.C. su $[0, 2]$, se g è B.V. su $[0, 2]$, se h è A.C. su $[0, 2]$, se h è B.V. su $[0, 2]$. Qui $[x]$ denota la parte intera di x .

b) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0, 1 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}$. Posto $u(x, y) = \frac{1}{y}$, dire se $u \in L^2(C)$ e se $u \in L^\infty(C)$.

4) Supponiamo che μ sia una misura finita sui boreliani di $[0, 1]$. Supponiamo inoltre che

i) $\mu(E) = 0$ se e solo se $m_1(E) = 0$ per ogni E boreliano di $[0, 1]$.

ii) Se E boreliano di $[0, 1]$ e $\mu(E) > 0$, allora esiste F boreliano di $[0, 1]$ contenuto in E tale che $\mu(F) = m_1(F) > 0$.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei boreliani F di $[0, 1]$ tali che $\mu(F) = m_1(F)$.

a) Provare che se E e F sono boreliani di $[0, 1]$, $E \notin \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{A}$, $F \subseteq E$, allora esiste $F' \in \mathcal{A}$, tale che $F \subseteq F' \subseteq E$, e $m_1(F') > m_1(F)$.

b) Si può dire che $m_1(E) = \mu(E)$ per ogni boreliano E di $[0, 1]$?

NOME: _____ COGNOME: _____

1) Sia $A_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 + x^3 \geq r\}$.

a) Provare che per ogni numero reale r , A_r è un boreliano di $\mathbf{R}^2$.

b) Dire se, data una successione di numeri reali r_n , l'insieme $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{r_n}$ è un boreliano di $\mathbf{R}^2$.

c) Dire se data una qualunque famiglia $\{r_i : i \in I\}$ di numeri reali, l'insieme $\bigcup_{i \in I} A_{r_i}$ è un boreliano di $\mathbf{R}^2$.

d) Dire se la funzione f definita da $f(r) = \max_{(x,y) \in A_r \cap B_{1000-r}} (y^2 + e^{xy})$ è B.V. su $[2, 3]$.

NOTA: qui e nel seguito B_c indica la palla chiusa di centro $(0, 0)$ e raggio c .

e) Dire se la funzione u definita da $u(x) = x |\sin(x)|$ è A.C. su $[0, 4]$ e se è B.V. su $[0, 4]$.

2) Sia $\alpha(x, y) = e^{-(x^2+y^4)}$.

a) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1} \alpha(x+n, y+n) dx dy$.

b) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[n, n+1] \times [n, n+2]} \alpha(x, y) dx dy$.

c) Dire se esiste, e nel caso se è finito, il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} \alpha(x, y) dx dy$.

d) Dire per quali $p \in]1, +\infty[$ si ha $\alpha \in L^p(V)$ ove $V := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < x^3 + \sin(x)\}$.

3) a) Provare che se v è continua e positiva da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e se la misura ν definita sui boreliani di $\mathbf{R}$ da $\nu(A) = \int_A v dm_1$ è invariante per traslazione, allora v è costante.

b) Sia $\mathcal{A}$ la classe degli intervalli della forma $[a, b[$ con a e b numeri reali e $a < b$. Provare che se una misura μ definita sui boreliani di $\mathbf{R}$ soddisfa

$$\mu(A+1) = \mu(A), \quad \mu(A+\bar{x}) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

ove $\bar{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n^2}}$, allora si ha $\mu(A+x) = \mu(A)$ per ogni numero reale x e per ogni $A \in \mathcal{A}$.

NOME: _____ COGNOME: _____

1) Sia $A_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 + y^3 \geq r\}$.

a) Provare che per ogni numero reale r , A_r è un boreliano di $\mathbf{R}^2$.

b) Dire se, data una successione di numeri reali r_n , l'insieme $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{r_n}$ è un boreliano di $\mathbf{R}^2$.

c) Dire se data una qualunque famiglia $\{r_i : i \in I\}$ di numeri reali, l'insieme $\bigcup_{i \in I} A_{r_i}$ è un boreliano di $\mathbf{R}^2$.

d) Dire se la funzione f definita da $f(r) = \max_{(x,y) \in A_r \cap B_{1000-r}} (y^2 + e^{xy})$ è B.V. su $[2, 3]$.

NOTA: qui e nel seguito B_c indica la palla chiusa di centro $(0, 0)$ e raggio c .

e) Dire se la funzione u definita da $u(x) = x |\cos(x)|$ è A.C. su $[0, 4]$ e se è B.V. su $[0, 4]$.

2) Sia $\alpha(x, y) = e^{-(x^6 + y^2)}$.

a) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_1} \alpha(x + n, y + n) dx dy$.

b) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[n, n+1] \times [n, n+3]} \alpha(x, y) dx dy$.

c) Dire se esiste, e nel caso se è finito, il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} \alpha(x, y) dx dy$.

d) Dire per quali $p \in]1, +\infty[$ si ha $\alpha \in L^p(V)$ ove $V := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < e^x + \sin(x)\}$.

3) a) Provare che se v è continua e positiva da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e se la misura ν definita sui boreliani di $\mathbf{R}$ da $\nu(A) = \int_A v dm_1$ è invariante per traslazione, allora v è costante.

b) Sia $\mathcal{A}$ la classe degli intervalli della forma $[a, b[$ con a e b numeri reali e $a < b$. Provare che se una misura μ definita sui boreliani di $\mathbf{R}$ soddisfa

$$\mu(A + 1) = \mu(A), \quad \mu(A + \bar{x}) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

ove $\bar{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n^3}}$, allora si ha $\mu(A + x) = \mu(A)$ per ogni numero reale x e per ogni $A \in \mathcal{A}$.

NOME:

COGNOME:

1) Siano $A = [0, 1] \times [0, 3]$, $B = A \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = 2y^2\}$.

a) Provare che A e B sono boreliani.

b) Calcolare la misura di Lebesgue di A e B .

c) Dire se esiste un boreliano C in $\mathbf{R}^2$ tale che si abbia $m_2(C \cap F) = \frac{1}{3}m_2(F)$ per ogni insieme F della forma $F = [a, b] \times [c, d]$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a < b$, $c < d$.

2) Siano $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{se } x \leq 1 \\ 4-x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(4+\sin x)}$.

a) Dire se f è A.C. su $[0, 2]$ e dire se f è B.V. su $[0, 2]$.

b) Dire per quali $p \in]1, +\infty[$ $g \in L^p([2, 5])$ e per quali $p \in]1, +\infty[$ $g \in L^p([2, +\infty[)$.

c) Dire se, data una qualunque funzione α B.V. su $[0, 2]$, allora anche la funzione $[\alpha]$ è B.V. su $[0, 2]$.

3) Siano $u(x) = \frac{x^2}{x^2+3^x}$, $f_n(x) = \frac{nx^5}{nx^2 + \sqrt[3]{x} + 4}$.

a) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_3^{3+\frac{1}{n}} u(x) dx$.

b) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n^7}^{n^7+\frac{1}{n}} u(x) dx$.

c) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_3^4 f_n(x) dx$.

d) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx$.

e) Provare che, se c_n è una successione di numeri reali positivi, allora esistono E_n boreliani di $\mathbf{R}$ tali che $m_1(E_n) = c_n$ e $\int_{E_n} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Anno Accademico 2011/12 17/04/2012

1) Siano $A = [0, 4] \times [0, 1]$, $B = A \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 = 3x^2\}$.
a) Provare che A e B sono boreliani.
b) Calcolare la misura di Lebesgue di A e B .
c) Dire se esiste un boreliano C in $\mathbf{R}^2$ tale che si abbia $m_2(C \cap F) = \frac{2}{5}m_2(F)$ per ogni insieme F della forma $F = [a, b] \times [c, d]$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a < b$, $c < d$.

3) Siano $u(x) = \frac{x^4}{x^4+7^x}$, $f_n(x) = \frac{nx^9}{nx^3 + \sqrt{x} + 6}$.

a) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_5^{5+\frac{1}{n}} u(x) dx$.

b) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n^7}^{n^7+\frac{1}{n}} u(x) dx$.

c) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_5^6 f_n(x) dx$.

d) Calcolare, se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx$.

e) Provare che, se c_n è una successione di numeri reali positivi, allora esistono E_n boreliani di $\mathbf{R}$ tali che $m_1(E_n) = c_n$ e $\int_{E_n} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

NOME: _____ **COGNOME:** _____

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Per ogni n intero positivo e α numero reale positivo siano $B_{n,\alpha}$ la palla di centro $(2n, 2n)$ e raggio $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ in $\mathbf{R}^2$, e $C_{n,\alpha}$ la palla di centro $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ e raggio $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ in $\mathbf{R}^2$, siano $B_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{n,\alpha}$, $C_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_{n,\alpha}$.

a) Provare che, per ogni n intero positivo e α numero reale positivo $B_{n,\alpha}$, $C_{n,\alpha}$, B_α e C_α sono boreliani in $\mathbf{R}^2$.

b) Dire per quali $\alpha > 0$ B_α ha misura finita, e dire per quali $\alpha > 0$ C_α ha misura finita.

c) Dire per quali α la funzione v definita da $v(x, y) = \frac{x^9}{x^6 + 4}$ è in $L^2(B_\alpha)$.

d) Dire se la funzione w definita da $w(x) = (x^7 - x^2)e^x$ è B.V. su $[1, 2]$ e se w è A.C. su $[1, 2]$.

e) Sia $r = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \chi_{[\frac{1}{n^6+1}, \frac{1}{n^6}]}$. Dire se la funzione R definita da $R(x) = \int_0^x r(t) dt$ è A.C. su $[0, 1]$ e se R è B.V. su $[0, 1]$.

2) a) Sia $A_n = \bigcup_{k=1}^n [k, k + \frac{1}{n}]$ e sia $l(x) = \frac{1}{x^8 + \sqrt[4]{x}}$. Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} l(x) dx$.

b) Provare che se D_n è una successione di sottoinsiemi boreliani di $[0, 1]$ aventi misura di Lebesgue uguale a $\frac{1}{2}$ e t_n è una successione di numeri reali tale che la successione $t_n \chi_{D_n}$ tende puntualmente a 0 per $n \rightarrow +\infty$, allora $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

c) Trovare una successione $c_n > 0$ tale che esistono D_n boreliani di $[0, 1]$ con $m_1(D_n) = c_n$ e la successione χ_{D_n} tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

d) Esiste una successione $c_n > 0$ tale che comunque dati D_n boreliani di $[0, 1]$ con $m_1(D_n) = c_n$, la successione χ_{D_n} tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$?

e) Esiste una successione $c_n > 0$ tale che esistono D_n, D'_n boreliani di $[0, 1]$ con $m_1(D_n) = m_1(D'_n) = c_n$ e la successione χ_{D_n} tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$, mentre la successione $\chi_{D'_n}$ non tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$?

NOME:

COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Per ogni n intero positivo e α numero reale positivo siano $B_{n,\alpha}$ la palla di centro $(2n, 2n)$ e raggio $\frac{1}{n^{3\alpha}}$ in $\mathbf{R}^2$, e $C_{n,\alpha}$ la palla di centro $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ e raggio $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ in $\mathbf{R}^2$, siano $B_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{n,\alpha}$, $C_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_{n,\alpha}$.

a) Provare che, per ogni n intero positivo e α numero reale positivo $B_{n,\alpha}$, $C_{n,\alpha}$, B_α e C_α sono boreliani in $\mathbf{R}^2$.

b) Dire per quali $\alpha > 0$ B_α ha misura finita, e dire per quali $\alpha > 0$ C_α ha misura finita.

c) Dire per quali α la funzione v definita da $v(x, y) = \frac{x^{11}}{x^8 + 6}$ è in $L^2(B_\alpha)$.

d) Dire se la funzione w definita da $w(x) = \cos(2x)x^7$ è B.V. su $[1, 2]$ e se w è A.C. su $[1, 2]$.

e) Sia $r = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n} \chi_{[\frac{1}{n^4+1}, \frac{1}{n^4}]}$. Dire se la funzione R definita da $R(x) = \int_0^x r(t) dt$ è A.C. su $[0, 1]$ e se R è B.V. su $[0, 1]$.

2) a) Sia $A_n = \bigcup_{k=1}^n [k, k + \frac{1}{n}]$ e sia $l(x) = \frac{1}{x^6 + \sqrt[8]{x}}$. Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} l(x) dx$.

b) Provare che se D_n è una successione di sottoinsiemi boreliani di $[0, 1]$ aventi misura di Lebesgue uguale a $\frac{2}{5}$ e t_n è una successione di numeri reali tale che la successione $t_n \chi_{D_n}$ tende puntualmente a 0 per $n \rightarrow +\infty$, allora $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

c) Trovare una successione $c_n > 0$ tale che esistono D_n boreliani di $[0, 1]$ con $m_1(D_n) = c_n$ e la successione χ_{D_n} tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

d) Esiste una successione $c_n > 0$ tale che comunque dati D_n boreliani di $[0, 1]$ con $m_1(D_n) = c_n$, la successione χ_{D_n} tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$?

e) Esiste una successione $c_n > 0$ tale che esistono D_n, D'_n boreliani di $[0, 1]$ con $m_1(D_n) = m_1(D'_n) = c_n$ e la successione χ_{D_n} tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$, mentre la successione $\chi_{D'_n}$ non tende quasi ovunque a 0 per $n \rightarrow +\infty$?

NOME: _____ **COGNOME:** _____

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Siano f le funzioni $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $g(z) = \int_{B_z} \alpha(x, y) dx dy$, ove B_z è la palla chiusa di centro

l'origine e raggio z , e α è una funzione continua e positiva da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$.

a) Provare che f e g sono A.C. e B.V. su $[\frac{1}{10}, 1]$.

b) Determinare la variazione totale di f e g su $[\frac{1}{10}, 1]$ se $\alpha(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 15$.

2) Sia $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

a) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $u \in L^p([1, 2] \times [4, 5])$.

b) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $u \in L^p(A)$ ove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in]0, 1[, x^2 \leq y \leq 3x^2\}$.

3) Siano

$$\beta(x) = e^{-x^4}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{x + x^{\frac{\pi}{10}} + 2}.$$

a) Dire se $\int_{[n^2, n^2+n]} \beta(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) Dire per quali $c > 0$ si ha

$$\int_{[n, n+n^c]} \gamma(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

c) Provare che per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste una funzione $h : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[$ misurabile tale che

$$\int_{[a, a+\frac{1}{n}]} h dm_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

d) Dire se è vero che per ogni successione a_n convergente di numeri reali e per ogni successione d_n positiva e infinitesima esiste una funzione $h : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[$ misurabile tale che

$$\int_{[a_n, a_n+d_n]} h dm_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

NOME: _____ **COGNOME:** _____

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Siano f le funzioni $f(z) = \frac{1}{z^3}$, $g(z) = \int_{B_z} \alpha(x, y) dx dy$, ove B_z è la palla chiusa di centro

l'origine e raggio z , e α è una funzione continua e positiva da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$.

a) Provare che f e g sono A.C. e B.V. su $[\frac{1}{8}, 1]$.

b) Determinare la variazione totale di f e g su $[\frac{1}{8}, 1]$ se $\alpha(x, y) = (x^2 + y^2)^3 + 9$.

2) Sia $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $u \in L^p([3, 4] \times [2, 3])$.

b) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $u \in L^p(A)$ ove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in]0, 1[, x^4 \leq y \leq 5x^4\}$.

3) Siano

$$\beta(x) = e^{-x^6}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{x + x^{\frac{\pi}{13}} + 4}.$$

a) Dire se $\int_{[n^2, n^2+n]} \beta(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) Dire per quali $c > 0$ si ha

$$\int_{[n, n+n^c]} \gamma(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

c) Provare che per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste una funzione $h : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[$ misurabile tale che

$$\int_{[a, a+\frac{1}{n}]} h dm_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

d) Dire se è vero che per ogni successione a_n convergente di numeri reali e per ogni successione d_n positiva e infinitesima esiste una funzione $h : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[$ misurabile tale che

$$\int_{[a_n, a_n+d_n]} h dm_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Secondo esonero di CAM1
Anno Accademico 2011/12 17/01/2012

NOME:

COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Sia $f_a(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + a & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

- a) Dire se f_0 è a variazione limitata su $[0, 2]$ e se è assolutamente continua su $[0, 2]$.
- b) Dire per quali a f_a è a variazione limitata su $[0, 2]$ e per quali a f_a è assolutamente continua su $[0, 2]$.
- c) Calcolare $V_0^2(f_a)$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2) Siano $\alpha(x, y) = \frac{1}{x(y^2 + 7)}$, $\beta(x, y) = \frac{1}{\sin(x^2 + y^2)}$.

- a) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $\alpha \in L^p([a, a+1[\times]b, b+1[$, al variare di $a \geq 0$, $b \geq 0$.
- b) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $\beta \in L^p(B)$ ove B è la palla di centro l'origine e raggio $\frac{1}{10}$.

3) Sia g una funzione sommabile da $[0, 1]$ a valori in $\mathbf{R}$. Poniamo $M(A) = \frac{1}{m_1(A)} \int_A g \, dm_1$

per ogni boreliano A di misura positiva contenuto in $[0, 1]$.

- a) Provare che se g è continua e se A_n è una successione di boreliani contenuti in $[0, 1]$ di misura positiva, decrescente (ossia $A_{n+1} \subseteq A_n$) e inoltre $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, allora la successione $M(A_n)$ tende a un limite finito (per $n \rightarrow +\infty$).
- b) Provare che se togliamo l'ipotesi A_n decrescente, allora l'enunciato in a) è falso (ossia non è vero che vale per qualunque funzione g continua da $[0, 1]$ a valori in $\mathbf{R}$).
- c) Supponiamo che la funzione g sia continua in tutti i punti di $[0, 1]$ tranne al più uno. Provare che se g è limitata e inoltre la successione $M(A_n)$ tende a un limite finito (per $n \rightarrow +\infty$) per ogni A_n successione decrescente di boreliani di misura positiva contenuti in $[0, 1]$ con $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, allora per ogni $x \in [0, 1]$ esiste finito $\lim_{y \rightarrow x} g(y)$.

Secondo esonero di CAM1
Anno Accademico 2011/12 17/01/2012

NOME: _____ **COGNOME:** _____

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Sia $f_a(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x^3 + a & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

- a) Dire se f_0 è a variazione limitata su $[0, 2]$ e se è assolutamente continua su $[0, 2]$.
- b) Dire per quali a f_a è a variazione limitata su $[0, 2]$ e per quali a f_a è assolutamente continua su $[0, 2]$.
- c) Calcolare $V_0^2(f_a)$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2) Siano $\alpha(x, y) = \frac{1}{(x^2 + 4)y}$, $\beta(x, y) = \frac{1}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$.

- a) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $\alpha \in L^p([a, a+1[\times]b, b+1[$, al variare di $a \geq 0$, $b \geq 0$.
- b) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ $\beta \in L^p(B)$ ove B è la palla di centro l'origine e raggio $\frac{1}{12}$.

3) Sia g una funzione sommabile da $[0, 1]$ a valori in $\mathbf{R}$. Poniamo $M(A) = \frac{1}{m_1(A)} \int_A g \, dm_1$

per ogni boreliano A di misura positiva contenuto in $[0, 1]$.

- a) Provare che se g è continua e se A_n è una successione di boreliani contenuti in $[0, 1]$ di misura positiva, decrescente (ossia $A_{n+1} \subseteq A_n$) e inoltre $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, allora la successione $M(A_n)$ tende a un limite finito (per $n \rightarrow +\infty$).
- b) Provare che se togliamo l'ipotesi A_n decrescente, allora l'enunciato in a) è falso (ossia non è vero che vale per qualunque funzione g continua da $[0, 1]$ a valori in $\mathbf{R}$).
- c) Supponiamo che la funzione g sia continua in tutti i punti di $[0, 1]$ tranne al più uno. Provare che se g è limitata e inoltre la successione $M(A_n)$ tende a un limite finito (per $n \rightarrow +\infty$) per ogni A_n successione decrescente di boreliani di misura positiva contenuti in $[0, 1]$ con $\text{diam}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, allora per ogni $x \in [0, 1]$ esiste finito $\lim_{y \rightarrow x} g(y)$.

NOME: _____ **COGNOME:** _____

1) Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 85, 1 \leq y < 3\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 85, x - 1 < y < x + 1\}.$$

a) Provare che A , B e $A \cup B$ sono boreliani di $\mathbf{R}^2$.

b) Provare che se f è una funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ continua e positiva (ossia $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$), allora

$$\int_{A \cup B} f \, dm_2 < \int_A f \, dm_2 + \int_B f \, dm_2.$$

2) Sia $f_n(x) = \sqrt[n]{3 + \left(\frac{x}{2}\right)^n}$.

a) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n \, dm_1$.

b) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,5]} f_n \, dm_1$.

c) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n \, dm_1$.

3) Sia f una funzione misurabile da $[0, 7]$ in $[0, +\infty[$.

a) Provare che, se $\int_{[0,7]} f \, dm_1 = +\infty$, allora esiste $z \in [0, 7]$ tale che

$$\int_{[0,7] \cap]z-c, z+c[} f \, dm_1 = +\infty \quad \forall c > 0.$$

b) Fissata una successione $x_n \in [1, 6]$, poniamo

$$A_c = \bigcup_{n=1}^{725} \left[x_n - \frac{c}{2^n}, x_n + \frac{c}{2^n} \right]$$

per ogni $c \in]0, 1[$. Provare che se $\int_{[0,7]} f \, dm_1 < +\infty$, allora $\int_{A_{\frac{1}{h}}} f \, dm_1 \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$.

c) Provare che se x_n e A_c sono definiti come in b), allora esiste $c \in]0, 1[$ tale che

$$\int_{A_c} g \, dm_1 = \frac{2}{107}, \text{ ove } g(x) = x + 2.$$

NOME: _____ **COGNOME:** _____

1) Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 193, -4 \leq y < -2\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 193, x + 1 < y < x + 3\}.$$

a) Provare che A , B e $A \cup B$ sono boreliani di $\mathbf{R}^2$.

b) Provare che se f è una funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ continua e positiva (ossia $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$), allora

$$\int_{A \cup B} f \, dm_2 < \int_A f \, dm_2 + \int_B f \, dm_2.$$

2) Sia $f_n(x) = \sqrt[n]{6 + \left(\frac{x}{3}\right)^n}$.

a) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n \, dm_1$.

b) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,5]} f_n \, dm_1$.

c) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n \, dm_1$.

3) Sia f una funzione misurabile da $[0, 9]$ in $[0, +\infty[$.

a) Provare che, se $\int_{[0,9]} f \, dm_1 = +\infty$, allora esiste $z \in [0, 9]$ tale che

$$\int_{[0,9] \cap]z-c, z+c[} f \, dm_1 = +\infty \quad \forall c > 0.$$

b) Fissata una successione $x_n \in [1, 8]$, poniamo

$$A_c = \bigcup_{n=1}^{637} \left[x_n - \frac{c}{2^n}, x_n + \frac{c}{2^n} \right]$$

per ogni $c \in]0, 1[$. Provare che se $\int_{[0,9]} f \, dm_1 < +\infty$, allora $\int_{A_{\frac{1}{h}}} f \, dm_1 \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$.

c) Provare che se x_n e A_c sono definiti come in b), allora esiste $c \in]0, 1[$ tale che

$$\int_{A_c} g \, dm_1 = \frac{8}{691}, \text{ ove } g(x) = 4x + 1.$$