Scritto di CAM1
Anno Accademico 2010/11 06/09/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Siano $A_1 =]0,2[\times]5,9[$, $A_2 = [1,3]\times[7,12]$. Provare che A_1, A_2 e $A_1 \cup A_2$ sono boreliani di $\mathbf{R}^2$ e calcolarne la misura di Lebesgue m_2.
b) Fissato $a > 0$, provare che l'insieme

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, \frac{x^2}{x^2+1} < y < a\right\}$$

è un boreliano in $\mathbf{R}^2$ e dire per quali $a > 0$ ha misura di Lebesgue m_2 finita.

2) a) Dire se la funzione α definita da $\alpha(x) = \sin^2(x)$ è A.C. e se B.V. in $[0, 2\pi]$.
b) Sia A un boreliano di $\mathbf{R}$. Provare che la funzione β definita da $\beta(x) = m_1(A \cap [0,x])$ è B.V. in $[0,1]$ e che β è A.C. in $[0,1]$.
c) Provare che, data una funzione $\phi : [0,1]$ in $[0,+\infty[$, la funzione β_A definita da $\beta_A(x) = m_1(A \cap [0,\phi(x)])$ è A.C. per ogni boreliano A di $\mathbf{R}$ se e solo se ϕ è A.C.

3) a) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{\sin^{28}(x)}{n}.$$

b) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^{28}(x)}{n}.$$

c) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B} \frac{\sin^{28}(x)}{n}.$$

ove $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, n+\frac{1}{n^2}]$.
d) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[n,+\infty[} \frac{\sin^2(x)}{x^2+4}.$$

Scritto di CAM1

Anno Accademico 2010/11 11/07/2011

NOME: COGNOME:

1) Siano

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x \leq 1, n < y < 2n\right\},$$

$$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 < y < x^{\frac{-3}{n}}\right\}.$$

$$C_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : n < x < n+1\right\}.$$

a) Provare che gli insiemi A_n, B_n e C_n, n intero positivo, sono tutti Boreliani.
b) Dire quali tra tali insiemi hanno misura di Lebesgue finita.
c) Provare che la σ-algebra generata da tutti gli insiemi C_n non è quella dei Boreliani di $\mathbf{R}^2$.

2) Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$
a) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ si ha $f \in \mathrm{Ł}^p[0,1]$.
b) Dire se f è a variazione limitata e se è assolutamente continua su $[0,1]$ e se f è a variazione limitata e se è assolutamente continua su $[1,2]$.

3) a) Provare che se α è una funzione continua e limitata da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora

$$\int_0^1 \frac{\alpha(x)}{n}\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Provare che se α è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ sommabile e limitata, allora

$$\int_0^n \frac{\alpha(x)}{n}\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) Provare che se α è una funzione continua e limitata da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, con $\alpha(x) \geq 0$, α non identicamente nulla, ed esiste un numero reale positivo A tale che $\alpha(x) = 0$ se $|x| > A$, allora non esiste nessuna funzione sommabile β da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che si abbia $n\alpha(nx) \leq \beta(x)$ per ogni n intero positivo e per ogni numero reale x.
d) La tesi di c) continua a valere se togliamo l'ipotesi esiste un numero reale positivo A tale che $\alpha(x) = 0$ se $|x| > A$?

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2010/11 11/07/2011

NOME: COGNOME:

1) Siano

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x \leq 1, 3n < y < 8n\right\},$$

$$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 < y < x^{\frac{-5}{n}}\right\}.$$

$$C_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : n < x < n+1\right\}.$$

a) Provare che gli insiemi A_n ,B_n e C_n, n intero positivo, sono tutti Boreliani.
b) Dire quali tra tali insiemi hanno misura di Lebesgue finita.
c) Provare che la σ-algebra generata da tutti gli insiemi C_n non è quella dei Boreliani di $\mathbf{R}^2$.

2) Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
a) Dire per quali $p \in [1, +\infty[$ si ha $f \in L^p[0,1]$.
b) Dire se f è a variazione limitata e se è assolutamente continua su $[0,1]$ e se f è a variazione limitata e se è assolutamente continua su $[1,2]$.

3) a) Provare che se α è una funzione continua e limitata da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora

$$\int_0^1 \frac{\alpha(x)}{n}\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Provare che se α è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ sommabile e limitata, allora

$$\int_0^n \frac{\alpha(x)}{n}\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) Provare che se α è una funzione continua e limitata da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, con $\alpha(x) \geq 0$, α non identicamente nulla, ed esiste un numero reale positivo A tale che $\alpha(x) = 0$ se $|x| > A$, allora non esiste nessuna funzione sommabile β da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che si abbia $n\alpha(nx) \leq \beta(x)$ per ogni n intero positivo e per ogni numero reale x.
d) La tesi di c) continua a valere se togliamo l'ipotesi esiste un numero reale positivo A tale che $\alpha(x) = 0$ se $|x| > A$?

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2010/11 24/02/2011

NOME: COGNOME:

1) Siano $A =]0,1[\times]0,+\infty[$, $B =]0,+\infty[\times]0,1[$, $C = A \cup B$.
a) Dire se la funzione f definita da $f(x,y) = \frac{1}{x+3}$ è misurabile e limitata su B.
b) Dire per quali $p \in]1,\infty[$, $f \in L^p(B)$.
c) Dire per quali $p \in]1,\infty[$, $f \in L^p(C)$.

2)
a) Dire se la funzione α definita da $\alpha(x) = \int_0^x e^{3t^2}\,dt$ è assolutamente continua in $[0,1]$.
b) Dire se la funzione β definita da $\beta(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ è assolutamente continua in $[0,1]$.
c) Sia f Lipshitziana su $[0,1]$ e sia L un numero reale tale che $L > |f'(x)|$ per tutti gli $x \in [0,1]$ per cui esiste $f'(x)$. Provare che esiste $A \subseteq [0,1]$ misurabile tale che $m_1(A) > \frac{9}{10}$ e $\sup\limits_A |f'| < L$.

3) Sia f una funzione misurabile e positiva in $\mathbf{R}^2$. Siano

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : ||(x,y) - (0,3n)|| < \frac{1}{n}\right\},$$

$$U_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |y| < \frac{1}{n}\right\},$$

$$V_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |y(y-5x)| < \frac{1}{n}\right\}.$$

a) Provare che se f è limitata, allora

$$\int_{A_n} f\,dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

b) Provare che se f è sommabile, allora

$$\int_{U_n} f\,dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

c) Provare che se f è sommabile, allora

$$\int_{V_n} f\,dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

d) Dire se, sempre supponendo f sommabile, allora per ogni successione $v_n \in \mathbf{R}^2$, si ha

$$\int_{U_n+v_n} f\,dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Scritto di CAM1

Anno Accademico 2010/11 24/02/2011

NOME: COGNOME:

1) Siano $A =]0,1[\times]0,+\infty[$, $B =]0,+\infty[\times]0,1[$, $C = A \cup B$.

a) Dire se la funzione f definita da $f(x,y) = \frac{1}{y+2}$ è misurabile e limitata su A.

b) Dire per quali $p \in]1,\infty[$, $f \in L^p(A)$.

c) Dire per quali $p \in]1,\infty[$, $f \in L^p(C)$.

2)

a) Dire se la funzione α definita da $\alpha(x) = \int_0^x e^{-5t^2}\, dt$ è assolutamente continua in $[0,1]$.

b) Dire se la funzione β definita da $\beta(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$ è assolutamente continua in $[0,1]$.

c) Sia f Lipshitziana su $[0,1]$ e sia L un numero reale tale che $L > |f'(x)|$ per tutti gli $x \in [0,1]$ per cui esiste $f'(x)$. Provare che esiste $A \subseteq [0,1]$ misurabile tale che $m_1(A) > \frac{7}{8}$ e $\sup\limits_A |f'| < L$.

3) Sia f una funzione misurabile e positiva in $\mathbf{R}^2$. Siano

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : ||(x,y) - (2n,0)|| < \frac{1}{n}\right\},$$

$$U_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < \frac{1}{n}\right\},$$

$$V_n = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x(x+2y)| < \frac{1}{n}\right\}.$$

a) Provare che se f è limitata, allora

$$\int_{A_n} f\, dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

b) Provare che se f è sommabile, allora

$$\int_{U_n} f\, dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

c) Provare che se f è sommabile, allora

$$\int_{V_n} f\, dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

d) Dire se, sempre supponendo f sommabile, allora per ogni successione $v_n \in \mathbf{R}^2$, si ha

$$\int_{U_n+v_n} f\, dm_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2010/11 31/01/2011

NOME: COGNOME:

1) Siano $A =]3,5[\times]2,6[$, $B_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$, $C_r = A \cap B_r$, per $r > 0$.
a) Dire se C_r è aperto e se C_r è chuso.
b) Dire per quali $r > 0$ l'insieme C_r ha misura positiva.

2) Sia $f(x) = \dfrac{1}{|2x^2 - 1| + 1}$.
a) Dire se f è assolutamente continua in $[0,1]$.
b) Provare che $\int\limits_0^1 f(x+n)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Provare che, se f_n è una successione di funzioni misurabili da $[0,1]$ a valori in $\mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in [0,1]$ si ha $f_n(x) \geq 0$ e $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, allora $\int\limits_0^1 \frac{1}{f_n(x)+1}\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
d) Dire per quali $p \in]1,+\infty[$, sotto le condizioni di c) si ha $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ in $L^p([0,1])$, ove $u_n(x) = \frac{1}{f_n(x)+1}$.
e) Sia data una successione di funzioni misurabili $g_n : [0,1] \to [0,1]$ tale che esiste una successione di sottoinsiemi misurabili A_n di $[0,1]$ per cui $g_n(x) \leq \frac{1}{n}$ se $x \notin A_n$, $m_1(A_n) \leq \frac{3}{n}$. Si può concludere che $\int\limits_0^1 g_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

3) Sia $D =]0,1[\times]0,1[$.
a) Trovare una successione di punti $v_n \in \mathbf{R}^2$ tale che gli insiemi $D + v_n$ siano tutti disgiunti tra di loro.
b) Provare che se la successione $v_n \in \mathbf{R}^2$ è limitata gli insiemi $D + v_n$ non possono essere tutti disgiunti tra di loro.
c) Provare che se la successione $v_n \in \mathbf{R}^2$ è limitata, allora esiste una sottosuccessione v_{n_h} tale che l'intersezione $\bigcap\limits_{h=1}^{\infty} \left(D + v_{n_h}\right)$ è non vuota.
d) Provare che se F è un insieme boreliano limitato in $\mathbf{R}^2$ di misura di Lebesgue positiva, allora, se la successione $v_n \in \mathbf{R}^2$ è limitata, esiste una sottosuccessione v_{n_h} tale che l'intersezione $\bigcap\limits_{h=1}^{\infty} \left(F + v_{n_h}\right)$ è non vuota.

Scritto di CAM1
Anno Accademico 2010/11 31/01/2011

NOME: COGNOME:

1) Siano $A =]4,9[\times]5,8[$, $B_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 < r^2\}$, $C_r = A \cap B_r$, per $r > 0$.
a) Dire se C_r è aperto e se C_r è chuso.
b) Dire per quali $r > 0$ l'insieme C_r ha misura positiva.

2) Sia $f(x) = \dfrac{1}{|3x^2-1|+1}$.
a) Dire se f è assolutamente continua in $[0,1]$.
b) Provare che $\int_0^1 f(x+n)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Provare che, se f_n è una successione di funzioni misurabili da $[0,1]$ a valori in $\mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in [0,1]$ si ha $f_n(x) \geq 0$ e $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, allora $\int_0^1 \frac{1}{f_n(x)+1}\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
d) Dire per quali $p \in]1,+\infty[$, sotto le condizioni di c) si ha $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ in $L^p([0,1])$, ove $u_n(x) = \frac{1}{f_n(x)+1}$.
e) Sia data una successione di funzioni misurabili $g_n : [0,1] \to [0,1]$ tale che esiste una successione di sottoinsiemi misurabili A_n di $[0,1]$ per cui $g_n(x) \leq \frac{1}{n}$ se $x \notin A_n$, $m_1(A_n) \leq \frac{7}{n}$. Si può concludere che $\int_0^1 g_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

3) Sia $D =]0,1[\times]0,1[$.
a) Trovare una successione di punti $v_n \in \mathbf{R}^2$ tale che gli insiemi $D+v_n$ siano tutti disgiunti tra di loro.
b) Provare che se la successione $v_n \in \mathbf{R}^2$ è limitata gli insiemi $D+v_n$ non possono essere tutti disgiunti tra di loro.
c) Provare che se la successione $v_n \in \mathbf{R}^2$ è limitata, allora esiste una sottosuccessione v_{n_h} tale che l'intersezione $\bigcap_{h=1}^{\infty} \left(D + v_{n_h}\right)$ è non vuota.
d) Provare che se F è un insieme boreliano limitato in $\mathbf{R}^2$ di misura di Lebesgue positiva, allora, se la successione $v_n \in \mathbf{R}^2$ è limitata, esiste una sottosuccessione v_{n_h} tale che l'intersezione $\bigcap_{h=1}^{\infty} \left(F + v_{n_h}\right)$ è non vuota.

Secondo esonero di CAM1
Anno Accademico 2010/11 14/01/2011

NOME: **COGNOME:**

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) a) Provare che la funzione f definita da $f(x) = [x]$ è a variazione limitata su $[0, \sqrt{17}]$ e la funzione g definita da $g(x) = x^3 - x^4$ è variazione limitata su $[0, 1]$.
b) Calcolare $V_0^{\sqrt{17}}(f)$ e $V_0^1(g)$.
c) Dire se g è assolutamente continua su $[0, 1]$.

2) Sia $(X, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \to]0, +\infty[$ misurabile. Sia data la proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \Big((A \in \mathcal{E}, \mu(A) < \delta) \Rightarrow \big(\int_A f \, d\mu < \varepsilon \big) \Big). \qquad (P)$$

a) Provare che se non vale (P), allora esistono insiemi $A_n \in \mathcal{E}$ tali che $\mu(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ma non è vero che $\int_{A_n} f \, d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Provare che se non vale (P) allora $\int_X f \, d\mu = +\infty$.

3) a) Sia $B = [0, 3] \times [0, 1]$ e sia u la funzione definita da

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}} & \text{se } x \in B + (12n, 0), n = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{se } x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \big(B + (12n, 0) \big) \end{cases}$$

Dire per quali $p \in [1, \infty[$ si ha $u \in L^p(\mathbf{R}^2)$.
b) Fissato $p \in [1, \infty[$, provare che se $v \in L^p(\mathbf{R}^2)$, allora esistono $v_n \in L^p(\mathbf{R}^2)$ tali che $v_n(x) = 0$ se $||x|| < \frac{5}{n}$, e $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ nella norma $L^p(\mathbf{R}^2)$.
c) Fissato $p \in [1, \infty[$, provare che se A_n è una successione di insiemi boreliani in $[0, 1]$, se

$$m_1(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

allora per ogni funzione $f \in L^p([0, 1])$ esistono $f_n \in L^p([0, 1])$ tali che $f_n(x) = 0 \ \forall x \in A_n$ e $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ nella norma $L^p([0, 1])$.

Ricordo che per definizione $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k \Big)$.

Secondo esonero di CAM1
Anno Accademico 2010/11 14/01/2011

NOME: **COGNOME:**

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ____________________________

1) a) Provare che la funzione f definita da $f(x) = [x]$ è a variazione limitata su $[0, \pi]$ e la funzione g definita da $g(x) = x^2 - x^3$ è variazione limitata su $[0, 1]$.
b) Calcolare $V_0^{\pi}(f)$ e $V_0^1(g)$.
c) Dire se g è assolutamente continua su $[0, 1]$.

2) Sia $(X, \mathcal{E}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : X \to]0, +\infty[$ misurabile. Sia data la proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \Big(\big(A \in \mathcal{E}, \mu(A) < \delta \big) \Rightarrow \big(\int_A f \, d\mu < \varepsilon \big) \Big) . \qquad (P)$$

a) Provare che se non vale (P), allora esistono insiemi $A_n \in \mathcal{E}$ tali che $\mu(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ma non è vero che $\int_{A_n} f \, d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Provare che se non vale (P) allora $\int_X f \, d\mu = +\infty$.

3) a) Sia $B = [0, 1] \times [0, 2]$ e sia u la funzione definita da

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}} & \text{se } x \in B + (10n, 0), n = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{se } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(B + (10n, 0) \big) \end{cases}$$

Dire per quali $p \in [1, \infty[$ si ha $u \in L^p(\mathbf{R}^2)$.
b) Fissato $p \in [1, \infty[$, provare che se $v \in L^p(\mathbf{R}^2)$, allora esistono $v_n \in L^p(\mathbf{R}^2)$ tali che $v_n(x) = 0$ se $||x|| < \frac{7}{n}$, e $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v$ nella norma $L^p(\mathbf{R}^2)$.
c) Fissato $p \in [1, \infty[$, provare che se A_n è una successione di insiemi boreliani in $[0, 1]$, se

$$m_1(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0$$

allora per ogni funzione $f \in L^p([0, 1])$ esistono $f_n \in L^p([0, 1])$ tali che $f_n(x) = 0 \ \forall x \in A_n$ e $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$ nella norma $L^p([0, 1])$.

Ricordo che per definizione $\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \Big)$.

Primo esonero di CAM1
Anno Accademico 2010/11 26/11/2010

NOME: **COGNOME:**

1) Siano

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^4 < 12, x + 2y \geq 1\}, \quad B = A \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}) .$$

a) Provare che A e B sono boreliani in $\mathbf{R}^2$.

b) Calcolare $\displaystyle\int_B x^3 e^y \, dx \, dy$.

2) Sia $f_n(x) = \dfrac{(2x)^n}{\big((2x)^n + 1\big)(4x^2+1)}$.

a) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{]0,+\infty[} f_n \, dm_1 .$$

b) Provare che se α è una funzione da $]0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ misurabile e *non negativa* tale che

$$\alpha(x) = 0 \quad \forall \, x < 1 \tag{1}$$

e se inoltre le funzioni αf_n sono tutte sommabili allora la successione $\int_{]0,+\infty[} \alpha f_n \, dm_1$ è convergente, per $n \to +\infty$.

c) Provare che la tesi di b) vale senza supporre (1).

3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura (quindi $\mathcal{A}$ è una σ-algebra su X), e supponiamo che gli insiemi $A_n \in \mathcal{A}$ siano disgiunti tra di loro per n intero positivo. Supponiamo inoltre che

$$\mu(A_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

per ogni intero positivo n.

a) Provare che esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $7000 < \mu(B) < +\infty$.

b) Provare che esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $7000 < \mu(B) < 7001$.

c) Provare che per ogni $t \in]0,+\infty[$ esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(B) = t$.

Primo esonero di CAM1
Anno Accademico 2010/11 26/11/2010

NOME: **COGNOME:**

1) Siano

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : e^x + \sin(y) < 150, xy \geq 1\big\}, \quad B = A \cap \big(\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}\big).$$

a) Provare che A e B sono boreliani in $\mathbf{R}^2$.

b) Calcolare $\displaystyle\int_B x^2 y^3 \, dx \, dy$.

2) Sia $f_n(x) = \dfrac{(3x)^n}{\big((3x)^n + 1\big)(9x^2+1)}$.

a) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{]0,+\infty[} f_n \, dm_1 .$$

b) Provare che se α è una funzione da $]0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ misurabile e *non negativa* tale che

$$\alpha(x) = 0 \quad \forall \, x < 1 \tag{1}$$

e se inoltre le funzioni αf_n sono tutte sommabili allora la successione $\int_{]0,+\infty[} \alpha f_n \, dm_1$ è convergente, per $n \to +\infty$.

c) Provare che la tesi di b) vale senza supporre (1).

3) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura (quindi $\mathcal{A}$ è una σ-algebra su X), e supponiamo che gli insiemi $A_n \in \mathcal{A}$ siano disgiunti tra di loro per n intero positivo. Supponiamo inoltre che

$$\mu(A_n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

per ogni intero positivo n.

a) Provare che esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $9000 < \mu(B) < +\infty$.

b) Provare che esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $9000 < \mu(B) < 9001$.

c) Provare che per ogni $t \in]0,+\infty[$ esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(B) = t$.