Scritto di Matematica per Biotecnologie (valido almeno fino alla sessione invernale)

Anno Accademico 2011/12 10/09/2012

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = x^3 \cos\Big(\frac{e^{x^5}}{\sin^2(x) + \ln(x)}\Big).$$

b) Risolvere la disequazione $\dfrac{x^6}{x-1} \leq \dfrac{7}{1-x}$.
c) Trovare gli intervalli di crescenza della funzione g definita da $g(x) = xe^{x^3}$. Dire inoltre se esiste un numero reale a tale che l'equazione $g(x) = a$ ha almeno una soluzione, mentre l'equazione $g(x) = a - \frac{1}{100}$ non ha soluzioni.
d) Data la disequazione

$$(x-3)\sin\big(x^4 - 3x + 1\big) < 0 \qquad (D)$$

provare che per ogni numero reale b esiste $x > b$ che risolve (D) ed esiste $x' > b$ che non risolve (D).

2) a) Dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{3^n + 2^n}}{2^n + n}$.

b) Dire per quali numeri $\alpha > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln\big(1 + \frac{1}{n^\alpha}\big) + \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big)\Big)$.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^3 \Big(\frac{3^{x^2+2x} - 9^x}{3^{x^2} - 1}\frac{e^x}{9^x}\Big)\, dx.$$

b) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int x^{7x} D\big(x\ln(x)\big)\, dx$.

4) a) Determinare un numero reale a tale che il punto $(2,3)$ appartiene alla retta di equazione $y = ax$.
b) Determinare un numero reale a tale che, chiamati P il punto di intersezione della retta di equazione $y = 7$ con la retta di equazione $y = ax$ e Q il punto di intersezione della retta di equazione $y = 7$ con la retta di equazione $y = 2ax$, il triangolo di vertici P, Q, e l'origine ha area uguale a 5.

5) (Senza punteggio ufficiale) Semplificare l'espressione $\dfrac{\sin^2(x^3-1) - 1}{x - x\sin(x^3-1)}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 17/18 punti, il secondo 7/8, il terzo circa 6, il quarto vale circa 5 punti. Riteniamo la parte d) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie (valido almeno fino alla sessione invernale)

Anno Accademico 2011/12 10/09/2012

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \ln(x) \cos\Big(\frac{e^{x^5}}{\sin^2(x) + x^5}\Big).$$

b) Risolvere la disequazione $\dfrac{x^4}{x-1} \leq \dfrac{5}{1-x}$.

c) Trovare gli intervalli di crescenza della funzione g definita da $g(x) = xe^{x^5}$. Dire inoltre se esiste un numero reale a tale che l'equazione $g(x) = a$ ha almeno una soluzione, mentre l'equazione $g(x) = a - \frac{1}{100}$ non ha soluzioni.

d) Data la disequazione

$$(x-3)\sin\big(x^4 - 3x + 1\big) < 0 \qquad (D)$$

provare che per ogni numero reale b esiste $x > b$ che risolve (D) ed esiste $x' > b$ che non risolve (D).

2) a) Dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{7^n + 3^n}}{3^n + n}$.

b) Dire per quali numeri $\alpha > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln\big(1 + \frac{1}{n^\alpha}\big) + \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big)\Big)$.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^3 \Big(\frac{2^{x^2+3x} - 8^x}{2^{x^2} - 1} \frac{e^x}{8^x}\Big)\, dx.$$

b) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int x^{5x} D\big(x\ln(x)\big)\, dx$.

4) a) Determinare un numero reale a tale che il punto $(3,7)$ appartiene alla retta di equazione $y = ax$.

b) Determinare un numero reale a tale che, chiamati P il punto di intersezione della retta di equazione $y = 9$ con la retta di equazione $y = ax$ e Q il punto di intersezione della retta di equazione $y = 9$ con la retta di equazione $y = 2ax$, il triangolo di vertici P, Q, e l'origine ha area uguale a 4.

5) (Senza punteggio ufficiale) Semplificare l'espressione $\dfrac{\cos^2(x^4 - 1) - 1}{x - x\cos(x^4 - 1)}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 17/18 punti, il secondo 7/8, il terzo circa 6, il quarto vale circa 5 punti. Riteniamo la parte d) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie (valido almeno fino alla sessione invernale)

Anno Accademico 2011/12 10/07/2012

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \ln\Big(x^6 + \cos(x)\sin\big(\cos(x)\sqrt[7]{x}\,\big)\Big).$$

b) Risolvere la disequazione $\dfrac{x^5(x-2)}{x-3} \leq \dfrac{x-2}{x-3}$.

c) Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\tfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}}\sin(x) + \ln\Big(\big((3x^2-1)^4-2\big)(x-7)\Big).$$

d) Dire se esiste un numero reale a tale che sia vuoto il dominio della funzione

$$\sqrt{-\tfrac{(x-a)(x-2)}{(x-3)}}\sin(x) + \ln\Big(\big((3x^2-1)^4-2\big)(x^2-e^x-17)\Big).$$

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3(3^n+n^2+1)^{16}}{n!+n}$

b) Provare che, se a_n è una successione tale che $a_n > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, posto $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, la successione $\sin(s_n)$ è convergente se e solo se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_3^4 \Big(\frac{x^2}{2x-4} - \frac{2}{x-2}\Big)^3\,dx.$$

b) Calcolare gli integrali indefiniti $\displaystyle\int (x^2-3x)^{19\pi}(4x-6)\,dx$, $\displaystyle\int (x^2-3x)^{19\pi}(2x-3)^3\,dx$.

4) a) Determinare un punto che appartiene alla retta di equazione $y = 2x$ e alla retta passante per $(3,1)$ e per $(4,2)$.

b) Siano r la retta di equazione $y = \frac{1}{4}(x+1)$ e r' la retta di equazione $y = -\frac{1}{4}(x+1)$. Provare che se $P \in r$, $Q \in r'$ e i punti P e Q sono allineati con l'origine, e hanno ascissa maggiore di -1, allora l'area del triangolo di vertici P, Q, e $(-1,0)$ vale almeno $\frac{1}{4}$.

5) (Senza punteggio ufficiale) Semplificare l'espressione $\dfrac{12^x - 3^x}{2^x - 1}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 16 punti, il secondo 9, il terzo circa 6, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte b) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie (valido almeno fino alla sessione invernale)

Anno Accademico 2011/12 10/07/2012

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \cos\Big(x^6 + \ln(x)\sin\big(\cos(x)\sqrt[7]{x}\,\big)\Big).$$

b) Risolvere la disequazione $\dfrac{x^5(x-5)}{x-6} \le \dfrac{x-5}{x-6}$.

c) Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\tfrac{(x-1)(x-5)}{(x-6)}}\,\sin(x) + \ln\Big(\big((7x^2-1)^4-2\big)(x-9)\Big).$$

d) Dire se esiste un numero reale a tale che sia vuoto il dominio della funzione

$$\sqrt{-\tfrac{(x-a)(x-5)}{(x-6)}}\,\sin(x) + \ln\Big(\big((7x^2-1)^4-2\big)(x^2-e^x-23)\Big).$$

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^5(5^n+n^4+1)^{14}}{n!+n}$

b) Provare che, se a_n è una successione tale che $a_n > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, posto $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, la successione $\sin(s_n)$ è convergente se e solo se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \Big(\frac{x^2}{3x-9} - \frac{3}{x-3}\Big)^3 dx.$$

b) Calcolare gli integrali indefiniti $\displaystyle\int (x^2-3x)^{16e}(4x-6)\,dx$, $\displaystyle\int (x^2-3x)^{16e}(2x-3)^3\,dx$.

4) a) Determinare un punto che appartiene alla retta di equazione $y = 2x$ e alla retta passante per $(3,3)$ e per $(4,2)$.

b) Siano r la retta di equazione $y = \frac{1}{4}(x+1)$ e r' la retta di equazione $y = -\frac{1}{4}(x+1)$. Provare che se $P \in r$, $Q \in r'$ e i punti P e Q sono allineati con l'origine, e hanno ascissa maggiore di -1, allora l'area del triangolo di vertici P, Q, e $(-1,0)$ vale almeno $\frac{1}{4}$.

5) (Senza punteggio ufficiale) Semplificare l'espressione $\dfrac{18^x - 2^x}{3^x - 1}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 16 punti, il secondo 9, il terzo circa 6, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte b) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie (valido almeno fino alla sessione invernale)

Anno Accademico 2011/12 18/06/2012

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \sin\left(x^2 \cos\left(\frac{x^3}{x^4+7}\right)\right).$$

b) Provare che esiste un numero reale x tale che $f(x) = 1$.
c) Risolvere le disequazioni

$$5x^{15}(x+1)^{799} < x^{14}(x+1)^{800},$$
$$\big((3x^2-1)^{16} - 4\big)\ |\ln(x+30)| < 0,$$
$$\big(\zeta(3x-2) - \zeta(4)\big)(x-7) < 0,$$

ove ζ è definita come $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ se $x > 1$, mentre *non è definita se* $x \leq 1$.

2) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5(n^2+1)^{11}(3n+1)^{34}}{2^n+n}$ e se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(2n+1)^{15}n!}{(3n+2)^{17}(n+1)!+4}.$$

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \left(\sqrt[17]{x} + x^2 \frac{(x^{x^x})^2}{x^{\frac{3}{2}x^x}\sqrt{x^{x^x}}} \right) dx.$$

b) Determinare una funzione continua $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che

$$\int_x^{x+1} g(t)\, dt = (x+1)\sin(x+1) - x\sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

4) Siano C_1 la circonferenza di centro $(5,0)$ e raggio 1 e C_2 la circonferenza di centro $(9,0)$ e raggio 2.
a) Determinare i punti di C_1 che appartengono anche alla retta di equazione $y = x - 5$.
b) Determinare $r > 0$ tale che esiste una retta tangente simultaneamente a C_1, a C_2, e alla circonferenza di centro $(80,0)$ e raggio r.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l'espressione $\frac{(x^2-1)^{600}}{(x-1)^{113}}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 17-18 punti, il secondo e terzo circa 11 in totale, il quarto vale circa 8 punti. Riteniamo la parte b) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie (valido almeno fino alla sessione invernale)

Anno Accademico 2011/12 18/06/2012

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \sin\left(x^6 \cos\left(\frac{x^5}{x^8+17}\right)\right).$$

b) Provare che esiste un numero reale x tale che $f(x) = -1$.
c) Risolvere le disequazioni

$$4x^{13}(x+1)^{749} < x^{12}(x+1)^{750},$$
$$\big((3x^2-1)^{16}-4\big)\ |\ln(x+30)| < 0,$$
$$\big(\zeta(3x-2)-\zeta(4)\big)(x-7) < 0,$$

ove ζ è definita come $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ se $x > 1$, mentre *non è definita se* $x \leq 1$.

2) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^8(n^3+1)^9(7n+1)^{25}}{3^n+n}$ e se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(2n+1)^{18} n!}{(5n+7)^{20}(n+1)!+94}.$$

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^3 \left(\sqrt[23]{x} + x^2 \frac{\left(x^{x^x}\right)^3}{x^{\frac{5}{2}x^x}\sqrt{x^{x^x}}} \right) dx.$$

b) Determinare una funzione continua $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che

$$\int_x^{x+1} g(t)\, dt = (x+1)\cos(x+1) - x\cos(x) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

4) Siano C_1 la circonferenza di centro $(5,0)$ e raggio 1 e C_2 la circonferenza di centro $(9,0)$ e raggio 2.
a) Determinare i punti di C_2 che appartengono anche alla retta di equazione $y = x - 9$.
b) Determinare $r > 0$ tale che esiste una retta tangente simultaneamente a C_1, a C_2, e alla circonferenza di centro $(80,0)$ e raggio r.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l'espressione $\dfrac{(x-1)^{850}}{(x^2-1)^{141}}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 17-18 punti, il secondo e terzo circa 11 in totale, il quarto vale circa 8 punti. Riteniamo la parte b) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 22/02/2012

NOME: **COGNOME:**

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \Big(\cos(x^2+3x+5)\Big)^5 \ \ln(x^2+e^{\sqrt{x}}).$$

b) Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione α definita da $\alpha(x) = \sqrt{e^{2x}-5e^x+4}$.
c) Dire per quali numeri reali a la funzione $\sqrt{e^{2x}+ae^x+4}+\sqrt[3]{x}$ è definita in tutto $\mathbf{R}$.
d) Determinare una funzione continua $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ tale che $x\cos\big(g(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 5$.

2) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3(n+1)^{\sqrt{2}}+5}{n^8+1}$, e per quali $a>0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \ln\big(3^{2n}-1\big)}{a^n+n}.$$

3) a) a) Calcolare l'integrale definito $\int_1^4 \frac{\cos^2(x)+10x\cos(x)+25x^2}{5\cos(x)+25x}\,dx.$
b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(3x+\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)+\cos^2(x)\Big)^{188} dx\,.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(9,4)$ e raggio 5.
a) Determinare i punti di C che appartengono alla retta di equazione $x+y=13$.
b) Sia P il punto $(9,-1)$. Sia S l'ottagono regolare iscritto in C con un vertice in P. Determinare le coordinate dei vertici di S adiacenti a P.

5) Senza punteggio ufficiale. Scrivere il polinomio $(x^4-1)^{800}-1$ come prodotto di due polinomi di grado inferiore.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 19 punti, il secondo e terzo circa 13 in totale, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte d) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 22/02/2012

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \Big(\sin\Big((x^3+7)\ln(x^4+e^{\sqrt{x}})\Big)\Big)^7.$$

b) Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione α definita da $\alpha(x) = \sqrt{e^{2x} - 7e^x + 6}$.
c) Dire per quali numeri reali a la funzione $\sqrt{e^{2x} + ae^x + 6} + \sqrt[5]{x}$ è definita in tutto $\mathbf{R}$.
d) Determinare una funzione continua $g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tale che $x\cos\big(g(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 11$.

2) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^7(n+1)^{\sqrt{5}} + 9}{n^{12}+3}$, e per quali $a > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \ln\big(5^{2n} - 2\big)}{a^n + n}.$$

3) a) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^4 \frac{\cos^2(x) + 12x\cos(x) + 36x^2}{6\cos(x) + 36x}\,dx.$

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(7x + \cos^2(\frac{\pi}{2} - x) + \cos^2(x)\Big)^{175} dx\,.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(7, 2)$ e raggio 5.
a) Determinare i punti di C che appartengono alla retta di equazione $x + y = 9$.
b) Sia P il punto $(12, 2)$. Sia S l'ottagono regolare iscritto in C con un vertice in P. Determinare le coordinate dei vertici di S adiacenti a P.

5) Senza punteggio ufficiale. Scrivere il polinomio $(x^6 - 1)^{900} - 1$ come prodotto di due polinomi di grado inferiore.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 19 punti, il secondo e terzo circa 13 in totale, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte d) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 31/01/2012

NOME: **COGNOME:**

1) Siano $f(x) = \dfrac{x^8\sqrt{e^{-\cos(x)}\ln(x)+3}}{x^8+12}$, $u(x) = \dfrac{3^x}{2^x+\sin^2(x)}$.
a) Calcolare la derivata di f.
b) Risolvere le disequazioni

$$x^8(x-2) < 7(x-2),$$
$$(10-x)\Big(\big(\ln(x+8)\big)^7 - 2\Big) < 0.$$

c) Provare che la disuguaglianza

$$u(x+1) > u(x)$$

vale per tutti gli $x > 100$, ma comunque scelto $a \in \mathbf{R}$, non è vero che vale in tutto l'intervallo $(-\infty, a)$.

2) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{70^n}{(n+1)79^n + \ln(n) + 8}$, e se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(5+\frac{1}{n}\right) - \sin(n)}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}\sqrt[5]{n} + 4}.$$

3) a) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^4 \left(x^2 \frac{(x^2+3)^4-1}{(x^2+3)^2-1}\right) dx$.
b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\ln(e^{2x}-1) - \ln(e^x-1)\Big)(e^x+1)e^x\, dx\,.$$

4) a) Dire se il punto $(6,6)$ appartiene alla retta passante per i punti $(2,3)$ e $(3,4)$.
b) Determinare un punto Q nel piano e un numero reale positivo r tali che la circonferenza di centro Q e raggio r sia tangente sia all'asse delle ascisse sia all'asse delle ordinate e passi per il punto $(3,1)$.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l'espressione $\dfrac{\sin^4(x) + 4\sin^2(x) + 4}{2\sin^2(x) + 4}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 18 punti, il secondo e terzo circa 13 in totale, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 31/01/2012

NOME: COGNOME:

1) Siano $f(x) = \dfrac{\sin(x)+7}{x^6\sqrt{e^{-x^5}\ln(x)+4}}$, $u(x) = \dfrac{4^x}{3^x+\cos^2(x)}$.

a) Calcolare la derivata di f.

b) Risolvere le disequazioni

$$x^6(x+4) < 5(x+4),$$
$$(x-9)\Big(4-\big(\ln(x+6)\big)^5\Big) < 0.$$

c) Provare che la disuguaglianza

$$u(x+1) > u(x)$$

vale per tutti gli $x > 100$, ma comunque scelto $a \in \mathbf{R}$, non è vero che vale in tutto l'intervallo $(-\infty, a)$.

2) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{82^n}{(n+3)90^n + \ln(n) + 5}$, e se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(7+\frac{1}{n}\right) - \cos(n)}{\sqrt[3]{n} + \sqrt[9]{n}\sqrt[5]{n} + 6}.$$

3) a) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_2^3 \left(x^3 \frac{(x^2+5)^4-1}{(x^2+5)^2-1}\right) dx$.

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\ln(e^{2x}-1) - \ln(e^x+1)\Big)(e^x-1)e^x \, dx\,.$$

4) a) Dire se il punto $(2,4)$ appartiene alla retta passante per i punti $(5,7)$ e $(6,8)$.

b) Determinare un punto Q nel piano e un numero reale positivo r tali che la circonferenza di centro Q e raggio r sia tangente sia all'asse delle ascisse sia all'asse delle ordinate e passi per il punto $(2,7)$.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l'espressione $\dfrac{\cos^4(x)+6\cos^2(x)+9}{3\cos^2(x)+9}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 18 punti, il secondo e terzo circa 13 in totale, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 14/01/2012

NOME: COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ________________________

1) Siano

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{3 + x\sin x}\right)\ln\left(x^8 + e^x x^6\right),$$

$$v(x) = (x^2 + 2x + 2)^{\pi} e^{-x}, \qquad u(x) = (x^2 + 2x + 2)^{\pi}(x + 1).$$

a) Calcolare la derivata della funzione f.
b) Determinare i punti di massimo relativo e di minimo relativo di v.
c) Calcolare, se esistono, $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x)^4 - x^3$, $\lim_{x\to+\infty}\left(u(x) - x^7\right)$, $\lim_{x\to+\infty} u(x)\sin\left(\frac{1}{u(x)}\right)$.
d) Determinare $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tali che $u(x) - x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $u(x) - x^{\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
e) Provare che per ogni numero reale y esistono $x \in \mathbf{R}$ e $\gamma > 0$ tali che $u(x) - x^{\gamma} = y$.

2) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^3 \left(\frac{\left((x^2 + x)^{100} + 1\right)\left((x^2 + x)^{100} - 1\right) - (x^2 + x)^{200}}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx.$$

b) Calcolare l'integrale indefinito $\int u(x)\, dx$, ove u è definita come nell'esercizio 1).

c) Provare che $\int_{\frac{7}{10}}^{\frac{8}{10}} (x^2 + 2x + 2)^{\pi}\, dx \geq \frac{1}{10}$.

3) Sia $g(x) = \frac{1 + \sin^2(x)}{x^8 + 1}$.

a) Provare che esiste $z \in (0, \pi)$ tale che $g'(z) = \frac{\frac{1}{\pi^8+1} - 1}{\pi}$.
b) Provare che g ha almeno un massimo relativo nell'intervallo $[300\pi, 301\pi]$.
c) Quanti punti di massimo relativo ha g su $\mathbf{R}$?

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 22-23 punti, il secondo circa 10, il terzo circa 11. Riteniamo le parti b) e c) del terzo esercizio piú difficili del resto del compito.

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 14/01/2012

NOME: **COGNOME:**

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) Siano

$$f(x) = \ln\left(x^5 + \frac{x^2}{7 + x\cos x}\right)\sin\left(e^x x^7\right),$$

$$v(x) = (x^2 + 4x + 5)^e e^{-x}, \qquad u(x) = (x^2 + 4x + 5)^e (x + 2).$$

a) Calcolare la derivata della funzione f.
b) Determinare i punti di massimo relativo e di minimo relativo di v.
c) Calcolare, se esistono, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x)^3 - x^4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u(x) - x^5\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\sin\left(\frac{1}{u(x)}\right)$.
d) Determinare $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tali che $u(x) - x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $u(x) - x^\beta \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
e) Provare che per ogni numero reale y esistono $x \in \mathbf{R}$ e $\gamma > 0$ tali che $u(x) - x^\gamma = y$.

2) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^4 \left(\frac{\left((x^3 + x)^{80} + 1\right)\left((x^3 + x)^{80} - 1\right) - (x^3 + x)^{160}}{x^3} + \sqrt[3]{x}\right) dx.$$

b) Calcolare l'integrale indefinito $\int u(x)\,dx$, ove u è definita come nell'esercizio 1).

c) Provare che $\int_{\frac{5}{7}}^{\frac{6}{7}} (x^2 + 4x + 5)^e\,dx \geq \frac{1}{7}$.

3) Sia $g(x) = \dfrac{1 + \sin^2(x)}{x^8 + 1}$.

a) Provare che esiste $z \in (0, \pi)$ tale che $g'(z) = \dfrac{\frac{1}{\pi^8+1} - 1}{\pi}$.
b) Provare che g ha almeno un massimo relativo nell'intervallo $[300\pi, 301\pi]$.
c) Quanti punti di massimo relativo ha g su $\mathbf{R}$?

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 22-23 punti, il secondo circa 10, il terzo circa 11. Riteniamo le parti b) e c) del terzo esercizio piú difficili del resto del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 26/11/2011

NOME: **COGNOME:**

1) a) Risolvere le disequazioni

$$\big(86^4 - (3x-1)^4\big)(x^7-2) \le 0\,,$$

$$\frac{\sqrt{86^4-(3x-1)^4}}{\sqrt[4]{x^7-2}\;\sqrt[4]{17-x}} > 0\,.$$

b) Dire per quali numeri reali x è positivo almeno uno dei due seguenti numeri

$$86^4 - (3x-1)^4, \quad (x^7-2)(17-x).$$

2) Sia r la retta di equazione $y = 7x - 8$.
a) Dire se il punto $(2, 6)$ appartiene a r.
b) Determinare i punti di r che soddisfano la condizione $(y-x)^5 = 8(x-y)$.
c) Determinare un punto Q sull'asse delle ascisse e due punti P_1 e P_2 appartenenti ad r in modo che il triangolo di vertici Q, P_1 e P_2 sia rettangolo in Q ed abbia area 6.

3) a) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)^n+1}{n^n+n}\,\dfrac{3^n+\sqrt{n}}{6^n+\cos(n^2)}$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{2n+3} - a^{3n+1}$ al variare di $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[7]{n} + n^2\cos^2(n) - 4n\cos(n) + 5$.
b) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^{2-9n}\cdot 8^{3n+2}}{2n^5-1}$.

4) a) Provare che esiste un unico numero reale $a > 0$ tale che $\sum\limits_{n=1}^{823} \dfrac{1}{(an)^{\frac{3}{5}}} = \sum\limits_{n=1}^{823} \dfrac{1}{n^2}$.

b) Provare che esistono numeri interi m_n, per $n = 1, 2, 3, ...$ tali che $\dfrac{1}{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{8}$.

c) Provare che esistono numeri interi M_n, per $n = 1, 2, 3, ...$ tali che $\dfrac{1}{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} M_k^2\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{8}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primi due esercizi valgono ognuno un po' meno di 10 punti, e circa punti 17 punti in tutto, il terzo circa 13 punti e il quarto circa 10 punti o un po' di piú. Riteniamo la parte c) del quarto esercizio la parte piú difficile del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2011/12 26/11/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Risolvere le disequazioni

$$\big(59^6 - (2x+4)^6\big)(9 - x^5) \le 0\,,$$

$$\frac{\sqrt{59^6 - (2x+4)^6}\,\sqrt[4]{9 - x^5}}{\sqrt[4]{x+6}} > 0\,.$$

b) Dire per quali numeri reali x è positivo almeno uno dei due seguenti numeri

$$59^6 - (2x+4)^6, \quad (9 - x^5)(x+6).$$

2) Sia r la retta di equazione $x = 5y - 4$.
a) Dire se il punto $(3, 8)$ appartiene a r.
b) Determinare i punti di r che soddisfano la condizione $(y - x)^7 = 4(x - y)$.
c) Determinare un punto Q sull'asse delle ordinate e due punti P_1 e P_2 appartenenti ad r in modo che il triangolo di vertici Q, P_1 e P_2 sia rettangolo in Q ed abbia area 9.

3) a) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n + 7}{(3n)^n + n}\,\frac{15^n + n^2}{5^n + \sin(\sqrt{n})}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^{5n+3} - 7^{2n-1}$ al variare di $a > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 6n\sin(n) - 10 - n^2\sin^2(n) - n^{\frac{2}{9}}$.

b) Dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{11^{2+2n}}{6^{4+3n}}}{3n^8 - n}$.

4) a) Provare che esiste un unico numero reale $a > 0$ tale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{956} \left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{10}{7}} = \sum_{n=1}^{956} \frac{1}{n^4}$.

b) Provare che esistono numeri interi m_n, per $n = 1, 2, 3, ...$ tali che $\displaystyle\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} m_k\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{8}$.

c) Provare che esistono numeri interi M_n, per $n = 1, 2, 3, ...$ tali che $\displaystyle\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} M_k^2\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{8}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primi due esercizi valgono ognuno un po' meno di 10 punti, e circa punti 17 punti in tutto, il terzo circa 13 punti e il quarto circa 10 punti o un po' di piú. Riteniamo la parte c) del quarto esercizio la parte piú difficile del compito.