Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 08/09/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \ln\left(x^4 e^{\cos(x)} + 1\right) \sin\left(\frac{x^3}{x+2}\right).$$

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza in $(0, +\infty)$ della funzione β definita da $\beta(x) = x^5 + \frac{1}{x}$.
c) Provare che se ϕ è una funzione definita su $\mathbf{R}$ tale che $\phi(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e inoltre ϕ è strettamente decrescente in $(-\infty, 5]$ e strettamente crescente in $[5, +\infty)$, allora per ogni numero reale a l'equazione $\beta\big(\phi(x)\big) = a$ ha al massimo un numero finito di soluzioni.
d) Risolvere la disequazione $\Big(\ln\big(x - \dfrac{1}{x}\big) - 3\Big)\big(x - 7\big) < 0$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{12}\,\sqrt{n+3}}{3^n + n^3 + 1}$.
b) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\Big(\ln(3^n+1) - \ln(3^n)\Big)$.

3) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \left(\left(\frac{x}{x^3+1}\right)^{\sqrt{5}-1} \left(\frac{x^3+1}{x}\right)^{\sqrt{5}} + \frac{1}{x^2}\right) dx.$
b) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che si abbia $g'(x) = e^{x^3}$ per ogni numero reale x e $g(1) = 1$. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 x g(x)\, dx\,.$$

4) Siano $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,4)$, $P_3 = (5,3)$.
a) Verificare che il triangolo T di vertici P_1, P_2 e P_3 è isoscele.
b) Determinare un punto sull'asse delle ascisse che appartiene alla bisettrice del triangolo T in P_3. Può essere utile ricordare un teorema che afferma che in un triangolo la bisettrice in un vertice divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri lati.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare la frazione $\dfrac{x^2\big(\sin(x) - 1\big)}{x^6\big(\sin^2(x) - 1\big) + \sin(x) - 1}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 15 punti, il secondo 6 punti, il terzo circa 7 punti, il quarto circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 08/09/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \ln\Big(\sin\big(x^4 e^x\big) + 3\Big)\cos\Big(\frac{x^3}{x+2}\Big).$$

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza in $(0, +\infty)$ della funzione β definita da $\beta(x) = x^5 + \frac{1}{x}$.
c) Provare che se ϕ è una funzione definita su $\mathbf{R}$ tale che $\phi(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e inoltre ϕ è strettamente decrescente in $(-\infty, 5]$ e strettamente crescente in $[5, +\infty)$, allora per ogni numero reale a l'equazione $\beta\big(\phi(x)\big) = a$ ha al massimo un numero finito di soluzioni.
d) Risolvere la disequazione $\Big(\ln\big(x - \dfrac{1}{x}\big) - 3\Big)\big(x - 7\big) < 0$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{17}\sqrt{n+6}}{4^n + n^4 + 1}$.
b) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n\Big(\ln(4^n + 1) - \ln(4^n)\Big)$.

3) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \Bigg(\Big(\frac{x}{x^4+1}\Big)^{\sqrt{7}-1}\Big(\frac{x^4+1}{x}\Big)^{\sqrt{7}} + \frac{1}{x^3}\Bigg)\,dx$.
b) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che si abbia $g'(x) = e^{x^3}$ per ogni numero reale x e $g(1) = 1$. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 x g(x)\,dx\,.$$

4) Siano $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 4)$, $P_3 = (5, 3)$.
a) Verificare che il triangolo T di vertici P_1, P_2 e P_3 è isoscele.
b) Determinare un punto sull'asse delle ascisse che appartiene alla bisettrice del triangolo T in P_3. Può essere utile ricordare un teorema che afferma che in un triangolo la bisettrice in un vertice divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri lati.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare la frazione $\dfrac{x^2\big(\sin(x) - 1\big)}{x^6\big(\sin^2(x) - 1\big) + \sin(x) - 1}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 15 punti, il secondo 6 punti, il terzo circa 7 punti, il quarto circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 12/07/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \ln\left(x^3 \ln(5x^2+1) + \cos(x)\right).$$

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x) = e^{x^5 - \ln(x)}$.

c) Poniamo $g(x) = \begin{cases} x^4 - 4x + 8 & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(x) + 3\sin(x^2) & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Determinare un numero b tale che $g(x) \neq b$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{80}}{(4^n-1)^2 - 5}$.

b) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{(4^n+1)^2 - (4^n-1)^2 + 3^{(\sqrt{8}-1)n}}$.

c) Dire per quali numeri reali $x > 0$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^{an} + 7^{(1-a)n}}$ converge per ogni numero reale a.

3) a) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^{1+\sqrt{2}} + x^{\sqrt{2}}}{2+2x} + \frac{\sqrt[4]{x^5}}{x^6}\right) dx$.

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(2x\sin(x) + x^2\cos(x)\right)\ln(x)\, dx.$$

4) Siano $P = (3,4)$ e $Q = (2,7)$.
a) Dire se il punto $(1,5)$ appartiene alla retta passante per P e Q.
b) Determinare un punto T sull'asse delle ascisse in modo che il triangolo di vertici T, P e Q abbia area 1.

5) Senza punteggio ufficiale. Svolgere l'espressione $\dfrac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}}$, semplificandola.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 12 punti, il terzo circa 6 punti, il quarto circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 12/07/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \ln\big(\sin(x)\sin(8x^3+1)+\ln(x)\big).$$

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x) = e^{x^5-\ln(x)}$.

c) Poniamo $g(x) = \begin{cases} x^4-4x+8 & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(x)+3\sin(x^2) & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Determinare un numero b tale che $g(x) \neq b$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{70}}{(6^n-1)^2-9}$.

b) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{(6^n+1)^2-(6^n-1)^2+3^{(\sqrt{8}-1)n}}$.

c) Dire per quali numeri reali $x > 0$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^{an}+7^{(1-a)n}}$ converge per ogni numero reale a.

3) a) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2 \Big(\frac{x^{1+\sqrt{2}}+x^{\sqrt{2}}}{2+2x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^7}\Big)\,dx$.

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \big(2x\sin(x)+x^2\cos(x)\big)\ln(x)\,dx.$$

4) Siano $P = (3,4)$ e $Q = (2,7)$.
a) Dire se il punto $(1,5)$ appartiene alla retta passante per P e Q.
b) Determinare un punto T sull'asse delle ascisse in modo che il triangolo di vertici T, P e Q abbia area 1.

5) Senza punteggio ufficiale. Svolgere l'espressione $\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}}$, semplificandola.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 12 punti, il terzo circa 6 punti, il quarto circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 21/06/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \ln\left(e^{5x^2}\cos\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right) + x^8\sqrt{x+2}\right).$$

b) Determinare il dominio della funzione g definita da $g(x) = \sqrt{\frac{2^x-8}{2^x-16}}$.

c) Determinare il dominio della funzione g_5 definita da $g_5(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2^x-8}{2^x-16}} - 5\right)$. Provare inoltre che per ogni $a > 0$, posto $g_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2^x-8}{2^x-16}} - a\right)$, il dominio di g_a è non vuoto, ossia esiste almeno un numero reale x tale che $g_a(x)$ è definita.

d) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} \ln\big(\ln(x)\big) - (\ln(x))^2$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 3^n + 2^n}$.

b) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{26^n}{(2^n+2)^{2\pi} + (5^n+1)^2}$.

3) a) Calcolare l'integrale definito $\int_4^5 \frac{(2x^2-6x)^{13}}{(x-3)^{11}}\,dx$.

b) Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin\big(\ln(x)\big)\frac{\ln\left(3^{x^x}\right)}{\ln\left(7^{x^{x+1}}\right)}\,dx$.

4) Sia C la circonferenza di centro $(1,2)$ e raggio 10.

a) Verificare che i punti $P_1 = (1,12)$ e $P_2 = (9,8)$ appartengono a C.

b) Determinare l'equazione di una retta che non ha punti in comune né con C né con la retta passante per P_1 e P_2

c) Determinare un punto P_3 su C tale che l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 sia massima.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l'espressione

$$\left(\frac{x^5(x^3-1)(x^3+1)}{x^8-x^2}\right)^4 \frac{1}{x^9}.$$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 15/16 punti, il secondo 6/7 punti, il terzo circa 5 punti, il quarto circa 8 punti. Riteniamo la parte c) del quarto esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 21/06/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \cos\left(e^{9x^3}\sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+5}+1}\right) + \frac{x^8}{x+7}\right).$$

b) Determinare il dominio della funzione g definita da $g(x) = \sqrt{\frac{2^x-16}{2^x-32}}$.

c) Determinare il dominio della funzione g_7 definita da $g_7(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2^x-16}{2^x-32}} - 7\right)$. Provare inoltre che per ogni $a > 0$, posto $g_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2^x-16}{2^x-32}} - a\right)$, il dominio di g_a è non vuoto, ossia esiste almeno un numero reale x tale che $g_a(x)$ è definita.

d) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} \ln\big(\ln(x)\big) - (\ln(x))^2$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2 5^n + 3^n}$.

b) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{26^n}{(2^n+2)^{2\pi} + (5^n+1)^2}$.

3) a) Calcolare l'integrale definito $\int_3^4 \frac{(3x^2-6x)^{12}}{(x-2)^{10}}\,dx$.

b) Calcolare l'integrale indefinito $\int \cos\big(\ln(x)\big)\frac{\ln\left(5^{x^x}\right)}{\ln\left(8^{x^{x+1}}\right)}\,dx$.

4) Sia C la circonferenza di centro $(3,1)$ e raggio 10.

a) Verificare che i punti $P_1 = (3,11)$ e $P_2 = (9,9)$ appartengono a C.

b) Determinare l'equazione di una retta che non ha punti in comune né con C né con la retta passante per P_1 e P_2

c) Determinare un punto P_3 su C tale che l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 sia massima.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l'espressione

$$\left(\frac{x^4(x^3-1)(x^3+1)}{x^8-x^2}\right)^3 \frac{1}{x^7}.$$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 15/16 punti, il secondo 6/7 punti, il terzo circa 5 punti, il quarto circa 8 punti. Riteniamo la parte c) del quarto esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 27/04/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \sin\left(\frac{\ln\left(x^9\cos(x)+x\right)}{x^2e^x+3}\right)$.

b) Risolvere la disequazione $x^8(x+2) < x^7(5x+1)$.

c) Trovare il dominio della funzione g definita da

$$g(x) = \frac{\ln\left(x^8(x+2) - x^7(5x+1)\right)}{\alpha(x)}$$

ove $\alpha(x) = \begin{cases} x^2 - 10^{16} & \text{se } x > 10 \\ (x-3)(x-15)\sin(x) & \text{se } x \leq 10. \end{cases}$

d) Dire se esiste un numero reale a tale che la disequazione $x^8(x+2) < x^7(5x+1) + a$ è sempre verificata (ossia vale per ogni numero reale x).

2) a) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7 7^n}{n^5 8^n (n+12)+1}$.

b) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, ove $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n^3 < 7n+2 \\ \frac{1}{n^6} & \text{se } n^3 \geq 7n+2\,. \end{cases}$

c) Provare che per ogni intero positivo n esiste un unico numero reale $x > 0$ (che dipende da n) tale che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k+2} = 7$.

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}-2}\,\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x^2+4}+2}\,dx\,.$$

b) Determinare un numero reale $x > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^x t\cos(t^2+1)\,dt = 0$.

4) Sia $P_1 = (1,3)$ e sia r la retta di equazione $x = 6$.

a) Determinare un punto di r che appartiene alla retta che passa per P_1 e per il punto $(2,5)$.

b) Determinare due punti P_2 e P_3 su r in modo che i punti P_1, P_2 e P_3 siano i vertici di un triangolo equilatero.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l' espresione $\frac{x^2 3^{x^2} - 3^{x^2}}{3^x(x-1)}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) i primi due esercizi valgono circa 12 punti ciascuno, il terzo circa 5 punti, circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del terzo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 27/04/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \cos\left(\dfrac{x^4 e^x + x}{\ln\Big(x^7\sin(x)+6\Big)}\right)$.

b) Risolvere la disequazione $x^8(x+2) < x^7(5x+1)$.
c) Trovare il dominio della funzione g definita da

$$g(x) = \frac{\ln\Big(x^8(x+2) - x^7(5x+1)\Big)}{\alpha(x)}$$

ove $\alpha(x) = \begin{cases} x^2 - 10^{16} & \text{se } x > 10 \\ (x-3)(x-15)\sin(x) & \text{se } x \le 10. \end{cases}$
d) Dire se esiste un numero reale a tale che la disequazione $x^8(x+2) < x^7(5x+1) + a$ è sempre verificata (ossia vale per ogni numero reale x).

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^9 8^n}{n^7 9^n (n+1) + 11}$.

b) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, ove $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n^4 < 9n+5 \\ \\ \frac{1}{n^7} & \text{se } n^4 \ge 9n+5\,. \end{cases}$
c) Provare che per ogni intero positivo n esiste un unico numero reale $x > 0$ (che dipende da n) tale che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k+2} = 7$.

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+9}-3}\,\frac{\sqrt[7]{x}}{\sqrt{x^2+9}+3}\,dx\,.$$

b) Determinare un numero reale $x > 0$ tale che $\displaystyle\int_0^x t\cos(t^2+1)\,dt = 0$.

4) Sia $P_1 = (4,1)$ e sia r la retta di equazione $y = 7$.
a) Determinare un punto di r che appartiene alla retta che passa per P_1 e per il punto $(2,5)$.
b) Determinare due punti P_2 e P_3 su r in modo che i punti P_1, P_2 e P_3 siano i vertici di un triangolo equilatero.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l' espresione $\dfrac{x^2 5^{x^2} - 5^{x^2}}{5^x(x-1)}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) i primi due esercizi valgono circa 12 punti ciascuno, il terzo circa 5 punti, circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del terzo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 22/02/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \sin\left(x^5 \cos\left(\frac{\cos(x)}{x^7 + x^2 + 7}\right)\right)$.
b) Siano $\alpha(x) = x(3x+1)^7$, $\beta(x) = (3x+1)^6$. Risolvere le disequazioni $\alpha(x) < \beta(x)$, $\ln(\alpha(x)) < \ln(\beta(x))$.
c) Provare che la funzione α è inferiormente limitata.
d) Provare che esiste un numero reale c tale che le disequazioni

$$\alpha(x) < \beta(x) \quad \text{e} \quad \ln(\alpha(x) + c) < \ln(\beta(x) + c)$$

hanno le stesse soluzioni.

2) a) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^3 3^n + n^{10}}{5^n + (n^2+1)^3}$.
b) Sia a_n una succesione di numeri positivi (ossia $a_n > 0$ per ogni intero positivo n) tale che $a_{n+1} = \frac{(a_n)^3}{1 - \cos(a_n)}$. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \left(\frac{x^{(x+3)^2}}{x^{x^2+9}}\right)^{\frac{1}{x}} dx\,.$$

b) Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx, \qquad \int \ln(x+3)\frac{x}{x+3}\,dx\,.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(3,1)$ e raggio 7, e sia D il grafico della funzione v definita da $v(x) = 1 + \sqrt{49 - (x-3)^2}$.
a) Dire se il punto $(6,4)$ appartiene a C.
b) Determinare un punto che appartiene a C ma non a D.
c) Dire se esiste una circonferenza C' con centro in $(120,0)$ tale che ogni punto di C' che appartiene a C appartiene anche a D.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare la frazione $\frac{x^7 9^x - x^7}{x^4 3^x - x^4}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 14 punti, il secondo 9, il terzo 6, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte b) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Anno Accademico 2010/11 22/02/2011

NOME: COGNOME:

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \cos\left(x^5 \sin\left(\frac{x^3 + \cos(x)}{x^5 + 2}\right)\right)$.

b) Siano $\alpha(x) = 2x(6x+1)^7$, $\beta(x) = (6x+1)^6$. Risolvere le disequazioni $\alpha(x) < \beta(x)$, $\ln\big(\alpha(x)\big) < \ln\big(\beta(x)\big)$.

c) Provare che la funzione α è inferiormente limitata.

d) Provare che esiste un numero reale c tale che le disequazioni

$$\alpha(x) < \beta(x) \quad \text{e} \quad \ln\big(\alpha(x) + c\big) < \ln\big(\beta(x) + c\big)$$

hanno le stesse soluzioni.

2) a) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^4+1)^5 7^n + n^8}{8^n + (n^4+1)^5}$.

b) Sia a_n una succesione di numeri positivi (ossia $a_n > 0$ per ogni intero positivo n) tale che $a_{n+1} = \frac{(a_n)^3}{1 - \cos(a_n)}$. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^3 \left(\frac{x^{(x+2)^2}}{x^{x^2+4}}\right)^{\frac{1}{x}} dx\,.$$

b) Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \frac{\ln(x+2)}{x+2}\, dx, \qquad \int \ln(x+2)\frac{x}{x+2}\, dx\,.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(3,1)$ e raggio 7, e sia D il grafico della funzione v definita da $v(x) = 1 + \sqrt{49 - (x-3)^2}$.

a) Dire se il punto $(9,2)$ appartiene a C.

b) Determinare un punto che appartiene a C ma non a D.

c) Dire se esiste una circonferenza C' con centro in $(98,0)$ tale che ogni punto di C' che appartiene a C appartiene anche a D.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare la frazione $\frac{x^5 16^x - x^5}{x^4 4^x - x^4}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 14 punti, il secondo 9, il terzo 6, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte b) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 02/02/2011

NOME: COGNOME:

1)
a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \sin\Big(\ln(x^3+8)\ln\left(e^{7x^9}+4\right)\Big)$.
b) Determinare i punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo della funzione g definita da $g(x) = (x^2+1)^5 e^{3x}$.
c) Provare che la funzione h definita da $h(x) = e^{2-7\cos^2(x)} + \frac{1}{x^8+1}$ non ha minimo assoluto su $\mathbf{R}$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^2-5n+1)^{51}}{n!+1}$.
b) Provare che $e^{2x}\sin^2(x) - 4e^x\sin(x) + 5 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
c) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^{\frac{9}{2}} + e^{2n}\sin^2(n) - 4e^n\sin(n) + 5}$ è convergente, e se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{12n^{\frac{9}{2}} + e^{2n}\sin^2(n) - 4e^n\sin(n) - 3} \quad \text{è convergente.}$$

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_3^4 \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x+4}{(x+2)^2-4}}\right) dx\,.$$

b) Calcolare l'integrale definito $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\big(\sin(x) - \sin^3(x)\big)}\, dx$.

4) Sia C la circonferenza di centro $(3,0)$ e raggio 5.
a) Determinare i punti di C che appartengono alla retta di equazione $y = x - 1$.
b) Determinare due punti diversi P e Q di C aventi entrambi ordinata negativa tali che la retta che passa per P e Q passa anche per il punto $(3,-80)$

5) Senza punteggio ufficiale. Scrivere l'espressione $\dfrac{6x}{\frac{(9x^2+2x)^{41}}{5x^7+8x^6}}$ come un'unica frazione semplificandola.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 12 punti, il secondo 12, il terzo 6, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 02/02/2011

NOME: COGNOME:

1)
a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \ln\Big(6+\cos(e^{5x^7}+4x)\sin\big(8x^3\big)\Big)$.
b) Determinare i punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo della funzione g definita da $g(x) = (x^2+3)^7 e^{-2x}$.
c) Provare che la funzione h definita da $h(x) = e^{9\sin^2(x)-6} + \frac{1}{x^6+2}$ non ha minimo assoluto su $\mathbf{R}$.

2) a) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^3-7n+2)^{38}}{n!+3}$.
b) Provare che $e^{2x}\sin^2(x) - 6e^x\sin(x) + 10 > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
c) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^{\frac{13}{2}} + e^{2n}\sin^2(n) - 6e^n\sin(n) + 10}$ è convergente, e se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{18n^{\frac{13}{2}} + e^{2n}\sin^2(n) - 6e^n\sin(n) - 2}$$ è convergente.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_7^8 \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\frac{x+6}{(x+3)^2-9}}\right) dx\,.$$

b) Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\big(\cos(x)-\cos^3(x)\big)}\,dx$.

4) Sia C la circonferenza di centro $(-6,0)$ e raggio 13.
a) Determinare i punti di C che appartengono alla retta di equazione $y = x+2$.
b) Determinare due punti diversi P e Q di C aventi entrambi ordinata negativa tali che la retta che passa per P e Q passa anche per il punto $(-6,-100)$

5) Senza punteggio ufficiale. Scrivere l'espressione $\dfrac{7x}{\frac{(4x^3+2x)^{37}}{9x^8-4x^6}}$ come un'unica frazione semplificandola.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 12 punti, il secondo 12, il terzo 6, il quarto vale circa 6 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 22/01/2011

NOME: COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ________________________

1) Siano $f(x) = (2x - \frac{1}{2x})^{111} - (2x - \frac{1}{2x})^{106}$, $g(x) = \cos\left(x^4\left(1 - \sin\left(\frac{x^7}{5\sqrt{x^6+x+4}}\right)\right)\right)$.
a) Calcolare la derivata g' di g.
b) Dire in quali intervalli f è decrescente.
c) Determinare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2) Sia $u(x) = e^x + e^{\frac{4}{x}}$.
a) Provare che l'equazione $u(x) = \frac{3}{2}$ non ha soluzioni positive.
b) Provare che esiste $b > 0$ tale che l'equazione $u(x) = b$ ha almeno due soluzioni positive.
c) Provare che l'equazione $u(x) = b$ non ha soluzioni positive se $b < e^2$, e invece ha almeno due soluzioni positive se $b > 2e^2$.
Nota: Ovviamente per soluzione positiva dell'equazione $u(x) = b$ intendiamo un numero $x > 0$ che risolve tale equazione.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^3 \left(\frac{x^2(2x+2)^6}{(x+1)^5}\right) dx$$

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin\left(4\frac{\ln\left(x^{\ln(x)}\right) - 1}{\ln(x) - 1} - 2\right)\frac{1}{x}\, dx$$

4) Provare che se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(x) \geq 9$ se $x \geq 5$, allora eiste un numero reale b tale che l'equazione $f\left(x^2\left(1 + \cos(x)\right)\right) = b$ non ha soluzioni reali.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo due esercizio vale circa 15 punti, il secondo circa 11, il terzo circa 6/7 punti e il quarto circa 7/8. Riteniamo la parte c) del primo esercizio forse piú difficile del resto del compito.

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 22/01/2011

NOME: COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ________________________

1) Siano $f(x) = (3x - \frac{1}{3x})^{104} - (3x - \frac{1}{3x})^{109}$, $g(x) = x^5 \sin\left(x - \cos\left(\frac{x^3}{x\sqrt{x^6+x}}\right)\right)$.
a) Calcolare la derivata g' di g.
b) Dire in quali intervalli f è decrescente.
c) Determinare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2) Sia $u(x) = e^x + e^{\frac{9}{x}}$.
a) Provare che l'equazione $u(x) = \frac{4}{3}$ non ha soluzioni positive.
b) Provare che esiste $b > 0$ tale che l'equazione $u(x) = b$ ha almeno due soluzioni positive.
c) Provare che l'equazione $u(x) = b$ non ha soluzioni positive se $b < e^3$, e invece ha almeno due soluzioni positive se $b > 2e^3$.
Nota: Ovviamente per soluzione positiva dell'equazione $u(x) = b$ intendiamo un numero $x > 0$ che risolve tale equazione.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^4 \left(\frac{x^3(3x+3)^4}{(x+1)^3}\right) dx$$

b) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \cos\left(2 - 7\frac{\ln\left(x^{\ln(x)}\right) - 1}{\ln(x) - 1}\right)\frac{1}{x}\, dx$$

4) Provare che se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(x) \geq 17$ se $x \geq 14$, allora eiste un numero reale b tale che l'equazione $f\Big(x^2\big(1+\sin(x)\big)\Big) = b$ non ha soluzioni reali.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo due esercizio vale circa 15 punti, il secondo circa 11, il terzo circa 6/7 punti e il quarto circa 7/8. Riteniamo il quarto esercizio molto piú difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 04/12/2010

NOME: **COGNOME:**

1) Risolvere le disequazioni

$$\left(\left(\frac{13}{5-\frac{x}{x+1}}\right)^4-81\right)(x^{19}-2)\le 0\,,$$

$$\left(\frac{13}{5-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3+1}}\right)^4<81\,.$$

2) Sia C la circonferenza di equazione $x^2+y^2=12$.
a) Dire se il punto $(3,2)$ appartiene a C, e se il punto $(-1,5)$ appartiene a C.
b) Dire se tutti punti di C soddisfano l'equazione $(x^2+y^2)(x^2+y^2-13)=12(x^2+y^2-13)$, e dire se tutti i punti che soddisfano $(x^2+y^2)(x^2+y^2-13)=12(x^2+y^2-13)$ appartengono a C.
c) Dire per quali numeri reali a tutti i punti (x,y) che soddisfano la condizione $(x^2+y^2)(x^2+y^2+5-a)(x^2+y^2+2-3a)=12(x^2+y^2+5-a)(x^2+y^2+2-3a)$ appartengono a C.

3) a) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n+n^{10}}{(\frac{5}{2})^n+\sin(n)}-\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+n^2}{(\frac{3}{4})^n+n^2}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^7}{n^5+1}-\frac{n^\alpha}{n^2\sqrt{n}+n+1}$ al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+3}\,\frac{\cos(n^2)+13}{\sin(n)-\frac{6}{5}}$.
b) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2(2n)^{\sqrt{15}}+(3n+1)^3}{7^n+1}$.

4) a) Dire per quali numeri reali b la successione a_n definita (per $n=1,2,3...$) da $a_n=\frac{(1+2b^2)^{2-3n}}{7^{2-3n}}$ è crescente. Ricordo che una successione a_n è crescente se $a_n\le a_{n+1}$.
b) Provare che se a_n è una successione tale che

$$a_{n+1}>a_n-\frac{5}{3^n}\,,$$

allora il limite $\lim_{n\to+\infty}a_n$ esiste e non vale $-\infty$. Può essere utile il fatto, mostrato a lezione, che una successione crescente ha sempre limite che non vale $-\infty$. Poi si può cercare un'opportuna successione crescente collegata con a_n.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primi due esercizi valgono ognuno un po' meno di 10 punti, e circa punti 17 punti in tutto, il terzo circa 13 punti e il quarto circa 10 punti o un po' di piú. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto piú difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2010/11 04/12/2010

NOME: **COGNOME:**

1) Risolvere le disequazioni

$$\left(\left(\frac{2}{3}\frac{13}{5-\frac{2-x}{3-x}}\right)^6-64\right)(3-x^{75})\leq 0\,,$$

$$\left(\frac{2}{3}\frac{13}{5-\frac{2-(4-\sqrt{x})}{3-(4-\sqrt{x})}}\right)^6<64$$

2) Sia r la retta di equazione $2x-3y=7$.
a) Dire se il punto $(5,1)$ appartiene a r, e se il punto $(8,2)$ appartiene a r.
b) Dire se tutti punti di r soddisfano l'equazione $(2x-3y)(x^2+y^2-9)=7(x^2+y^2-9)$, e dire se tutti i punti che soddisfano $(2x-3y)(x^2+y^2-9)=7(x^2+y^2-9)$ appartengono a r.
c) Dire per quali numeri reali a tutti i punti (x,y) che soddisfano la condizione $(2x-3y)(x^2+y^2+a-2)(x^2+y^2+7a-8)=7(x^2+y^2+a-2)(x^2+y^2+7a-8)$ appartengono a r.

3) a) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{6}{7}\right)^n+n^6}{(\frac{9}{10})^n+n^6}-\dfrac{\left(\frac{8}{3}\right)^n+n^{12}}{(\frac{9}{4})^n+\cos(n)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n}{3^n+1}-\dfrac{\alpha^n}{7^n(\sqrt{3})^n+n^2}$ al variare di $\alpha>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^3+7}\dfrac{\sin(n^2)+9}{\cos(n)-\frac{8}{7}}$.
b) Dire se converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)^{\sqrt{26}}+n^4(2n+3)^3}{9^n+21}$.

4) a) Dire per quali numeri reali b la successione a_n definita (per $n=1,2,3...$) da $a_n=\dfrac{5^{4-3n}}{(1+2b^2)^{4-3n}}$ è crescente. Ricordo che una successione a_n è crescente se $a_n\leq a_{n+1}$.
b) Provare che se a_n è una successione tale che

$$a_{n+1}>a_n-\frac{7}{4^n}\,,$$

allora il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ esiste e non vale $-\infty$. Può essere utile il fatto, mostrato a lezione, che una successione crescente ha sempre limite che non vale $-\infty$. Poi si può cercare un'opportuna successione crescente collegata con a_n.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primi due esercizi valgono ognuno un po' meno di 10 punti, e circa punti 17 punti in tutto, il terzo circa 13 punti e il quarto circa 10 punti o un po' di piú. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto piú difficile del resto del compito.