Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 16/09/2009

NOME: **COGNOME:**

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \cos\left(\frac{\ln(x)}{1+\sin^2\left(xe^{3x}\right)}\right).$$

b) Risolvere la disequazione $(3x+1)^2 5^x \leq 2 \cdot 5^x$.
c) Provare che se g è una funzione da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ tale che $x^2 \leq g(x) \leq x^2 + |x|$ per ogni numero reale x, allora $g'(0) = 0$.

2) Siano $a_n = \frac{3^n+n^7+1}{4^{2n}+n^2}$, $b_n = \frac{7n^3\left(n^2\right)!}{\left(2n^2\right)!+1}$.
a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,.$$

b) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n\,.$$

Si può tenere conto del fatto (che non siete tenuti a dimostrare) che $n^3\left(n^2\right)! \leq \left(2n^2\right)!$ per ogni intero positivo n.
c) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \frac{n^2+1}{n^2+3}$.

3) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{\left(\sqrt{x}(x+2)\right)^2}{2x+4} dx$.
b) Dire per quali numeri reali a si ha $\int_{\frac{1}{\pi}}^{a} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,dx = 1$.
c) Provare che per ogni numro reale b esiste al massimo un numero finito di numeri reali $a \geq 10^{-7}$ tali che $\int_{\frac{1}{\pi}}^{a} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,dx = b$.

4) Determinare un numero reale k tale che la retta di equazione $x+2y=k$ interseca l'asse delle ascisse in un punto P e l'asse delle ordinate in un punto Q e la distanza tra P e Q vale 15.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare l'espressione $\frac{x^5+4x^3+4x}{x^2+2}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 12 punti, il secondo 8, il terzo 12, il quarto vale circa 4 punti. Nel quarto la parte a) vale poco. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.*

Anno Accademico 2008/09 **13/07/2009**

NOME: **COGNOME:**

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = \sqrt{x^{10} - 13x^7}$
a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.
b) Trovare la derivata della funzione g definita da $g(x) = f(x) + \dfrac{x^8}{x^3 \cos\left(xe^{-4\sin x}\right)}$.

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 + \sqrt{n^7}}{n^7 + 1}\,.$$

b) Provare che, per ogni k intero positivo, si ha

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2}.$$

c) Calcolare la somma della serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\frac{x}{\frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[5]{x}}{x+2}} + e^x(2x+2)\ln(x) \right) dx\,.$$

Può essere utile tenere presente il fatto che $\int e^x(x+1)dx = xe^x + c$.

4) Sia C la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 13 e siano $P_1 = (5,12)$, $P_2 = (-5,12)$.
a) Verificare che i punti P_1 e P_2 appartengono a C.
b) Determinare un punto P di ordinata positiva tale che la circonferenza di centro P e raggio 18 interseca C nei punti P_1 e P_2.
c) Provare che per ogni $r > 0$ esistono numeri reali a_1 e a_2 tali che il grafico della funzione v_1 definita da $v_1(x) = x^6 + a_1$ interseca la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio r, mentre il grafico della funzione v_2 definita da $v_2(x) = x^6 + a_2$ non interseca la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio r.

5) Senza punteggio ufficiale. Scomporre l'espressione $(2x-3)^{10} - (2x-3)^6$ nel prodotto di polinomi, cercando di ottenere nel prodotto 4 polinomi.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 8/9 punti, il secondo 11, il terzo 6, il quarto vale circa 10/11 punti. Nel quarto la parte a) vale poco. Riteniamo la parte c) del quarto esercizio piú difficile del resto del compito.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 13/07/2009

NOME: COGNOME:

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = \sqrt{x^{10} - 13x^7}$
a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.
b) Trovare la derivata della funzione g definita da $g(x) = f(x) + \dfrac{x^7}{x^5 \sin\left(xe^{-3\cos x}\right)}$.

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^6 + \sqrt{n^9}}{n^9 + 1}\,.$$

b) Provare che, per ogni k intero positivo, si ha

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2}.$$

c) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\frac{x}{\frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[7]{x}}{x+2}} + e^x(3x+3)\ln(x) \right) dx\,.$$

Può essere utile tenere presente il fatto che $\int e^x(x+1)dx = xe^x + c$.

4) Sia C la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 13 e siano $P_1 = (5,12)$, $P_2 = (-5,12)$.
a) Verificare che i punti P_1 e P_2 appartengono a C.
b) Determinare un punto P di ordinata positiva tale che la circonferenza di centro P e raggio 21 interseca C nei punti P_1 e P_2.
c) Provare che per ogni $r > 0$ esistono numeri reali a_1 e a_2 tali che il grafico della funzione v_1 definita da $v_1(x) = x^6 + a_1$ interseca la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio r, mentre il grafico della funzione v_2 definita da $v_2(x) = x^6 + a_2$ non interseca la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio r.

5) Senza punteggio ufficiale. Scomporre l'espressione $(3x-5)^{16} - (3x-5)^{12}$ nel prodotto di polinomi, cercando di ottenere nel prodotto 4 polinomi.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 8/9 punti, il secondo 11, il terzo 6, il quarto vale circa 10/11 punti. Nel quarto la parte a) vale poco. Riteniamo la parte c) del quarto esercizio piú difficile del resto del compito.*

Anno Accademico 2008/09 11/06/2009

NOME: COGNOME:

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = (e^x - e^2)(5 - x)$
a) Risolvere la disequazione $f(x) < 0$
b) Trovare la derivata della funzione g definita da $g(x) = \sin\left(\frac{f(x)}{\cos(x^2)-7}\right)$.
c) Sia s definita da

$$s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-7,7] \\ 49 & \text{se } x \notin [-7,7]. \end{cases}$$

Risolvere la disequazione $s(5 - x) < 10$.

2) a) Dire se converge le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 5}{4^n(2^n + 1)}\,.$$

b) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(3^n + 5\right)^\alpha}{4^n(2^n + 1)}\,.$$

3) Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^3 \frac{x^2\left(\sqrt{x}+1\right)^5}{\left(-\sqrt{x}-1\right)^4}\,dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \ln\left(\frac{(x^{10}+1)^{x^9}}{x}\right) dx\,.$$

4) Sia v la funzione definita da

$$v(x) = \begin{cases} (x^2-1)^2 & \text{se } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

a) Dire quali punti del grafico di v appartengono alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}$.
b) Determinare una retta passante per il punto $(0, 1)$ che interseca il grafico di v in almeno tre punti.

5) Senza punteggio ufficiale. Svolgere l'espressione $\frac{x}{\frac{7}{x}+5} + x^2$ scrivendola come un'unica frazione.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 10/11 punti, il secondo 6/7, il terzo 7, il quarto vale circa 7 punti. Nel quarto vale di piú la parte b).*

Anno Accademico 2008/09 **11/06/2009**

NOME: **COGNOME:**

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = (e^3 - e^x)(x-7)$
a) Risolvere la disequazione $f(x) < 0$
b) Trovare la derivata della funzione g definita da $g(x) = \cos\left(\frac{\sin(x^3)-6}{f(x)}\right)$.
c) Sia s definita da

$$s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-8,8] \\ 64 & \text{se } x \notin [-8,8]. \end{cases}$$

Risolvere la disequazione $s(x-7) < 10$.

2) a) Dire se converge le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n + 2}{3^n(7^n+4)}\,.$$

b) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(10^n + 2\right)^\alpha}{3^n(7^n+4)}\,.$$

3) Calcolare l'integrale definito

$$\int_3^4 \frac{x^3\left(\sqrt{x}+2\right)^7}{\left(-\sqrt{x}-2\right)^6}\,dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \ln\left(\frac{(x^{10}+1)^{x^9}}{x}\right) dx\,.$$

4) Sia v la funzione definita da

$$v(x) = \begin{cases} (x^2-1)^2 & \text{se } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{se } x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

a) Dire quali punti del grafico di v appartengono alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}$.
b) Determinare una retta passante per il punto $(0,1)$ che interseca il grafico di v in almeno tre punti.

5) Senza punteggio ufficiale. Svolgere l'espressione $\frac{x^2}{\frac{5}{x}+5} + x^3$ scrivendola come un'unica frazione.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 10/11 punti, il secondo 6/7, il terzo 7, il quarto vale circa 7 punti. Nel quarto vale di piú la parte b).*

Anno Accademico 2008/09 **24/04/2009**

NOME: **COGNOME:**

1) Siano $f(x) = \sin\left(\frac{\sin\left(x^3\cos(x)+7\right)}{x^2+1}\right)$, $g(x) = x^7 - x^{15} - x$.
a) Calcolare la derivata di f.
b) Dire se $g(50 + 10^{1000}) > g(10^{1000})$.
c) Provare che esiste un numero reale b tale che se $x > b$ allora $f(x) \neq \frac{1}{10}$. Provare che, dato $a \neq 0$, esiste un numero reale b tale che se $x > b$ allora $f(x) \neq a$.

2) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n^2+3}}{n^5+\sin(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n!}}{2^{(n+1)!}+5}.$$

3)
a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^4 \left(\sqrt{\sqrt{x}+1}\sqrt{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}\right) dx$$

b) Determinare una funzione f tale che

$$\sin(x)f'(x) = 6\cos(x) - 3f'(x)\,.$$

4) Determinare un punto P sulla retta di equazione $y = x$ e un punto Q sulla retta di equazione $y = 2x$ tali che P e Q hanno la stessa ordinata, e la distanza tra P e Q sia uguale a 2.

5) Senza punteggio ufficiale. Svolgere l'espressione

$$x\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x+1} + \frac{3x^2+2}{\sqrt[6]{x}\sqrt{x}}\right).$$

Anno Accademico 2008/09 **23/02/2009**

NOME: **COGNOME:**

1) Siano $\alpha(x) = x^3 + 5^x$, $u(x) = 2(8x-1)^7 + x^4(1-8x)^7$.
a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \sin\Big(u(x)\ln\big(x^3\ln(x^2+7)\big)\Big)$.
b) Risolvere le disequazioni

$$u(x) \le 0; \quad \alpha(x+2)u(x) \le \alpha(x)u(x); \quad u(x)\int_3^x e^{-t^2}\,dt \ \le 0.$$

2)
a) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n - (2^n-1)^2}{\sqrt{5^n + 3n^5 + n}}\,.$$

b) Provare che se w è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} w\Big(\frac{na^7}{n+1} + a\Big)$ converge per qualunque numero reale a, allora la funzione w vale sempre 0, ossia $w(x) = 0$ per ogni numero reale x.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}\,\frac{\sqrt{2x^2+5}}{\sqrt{4x^2+10}}\,dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \Big(-\cos\big(\frac{1}{x}+x\big) + \cos\big(\frac{1}{x}+x\big)\frac{1}{x^2}\Big)\,dx\,.$$

4) Sia g la funzione definita da $g(x) = \frac{1}{x}$.
a) Determinare i punti del grafico di g che appartengono alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 7.
b) Provare che per ogni $r > 0$ il grafico di g non interseca la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio r in esattamente tre punti.

5) Senza punteggio ufficiale. Svolgere l'espressione $\frac{x}{x^2+7} + \frac{3x+2}{x+1}\frac{x}{x+2}$ scrivendola come un'unica frazione.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 14 punti, il secondo 12, il terzo 5/6, il quarto vale circa 5/6 punti. Riteniamo la parte b) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 23/02/2009

NOME: COGNOME:

1) Siano $\alpha(x) = x^9 + 4^x$, $u(x) = 5(3x-1)^7 + x^6(1-3x)^7$.
a) Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = \cos\Big(u(x)\ln\big(x^3\cos(x^2+7)\big)\Big)$.
b) Risolvere le disequazioni

$$u(x) \le 0; \quad \alpha(x+2)u(x) \le \alpha(x)u(x); \quad u(x)\int_6^x e^{-t^2}\,dt \ \le 0.$$

2) a) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}+6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n-(3^n-1)^2}{\sqrt{10^n+3n+n^4}}\,.$$

b) Provare che se w è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} w\Big(\frac{na^7}{n+1}+a\Big)$ converge per qualunque numero reale a, allora la funzione w vale sempre 0, ossia $w(x)=0$ per ogni numero reale x.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \sqrt{x^3+x}\sqrt{x^3+x}\frac{\sqrt{7x^2+3}}{\sqrt{14x^2+6}}\,dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \Big(-\sin\big(\frac{1}{x}+x\big)+\sin\big(\frac{1}{x}+x\big)\frac{1}{x^2}\Big)\,dx\,.$$

4) Sia g la funzione definita da $g(x) = \frac{1}{x}$.
a) Determinare i punti del grafico di g che appartengono alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 9.
b) Provare che per ogni $r > 0$ il grafico di g non interseca la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio r in esattamente tre punti.

5) Senza punteggio ufficiale. Svolgere l'espressione $\frac{x^2}{x+5} + \frac{2x+9}{x+1}\frac{x}{x+8}$ scrivendola come un'unica frazione.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 14 punti, il secondo 12, il terzo 5/6, il quarto vale circa 5/6 punti. Riteniamo la parte b) del secondo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 23/01/2009

NOME: COGNOME:

1)
a) Determinare dominio e derivata della funzione f definita da

$$f(x) = x^3 \ln\Big(\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{(x+2)^{99} - 17(x+2)}}\Big).$$

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$. Dire se la funzione u definita da $u(x) = \sin(g(x))$ è strettamente crescente in $\mathbf{R}$.
c) Dire per quali $b > 0$ la funzione u definita da $u(x) = \sin(bg(x))$ è strettamente crescente in $\mathbf{R}$.

2) Dire se convergono la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{100^n + n^2 + n + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n(n^8+2)}{100^n + (3n^2+1)^3 + 1}.$$

3) Sia u la funzione definita da $u(x) = \frac{\left(x^3+6x^2+x\right)^3}{\left(x^2+6x+1\right)^2}$. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(u(x) + \big(\ln(x) + \cos(x)\big)^6 (-\sin(x) + \frac{1}{x})\Big)\, dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \Big(u(x)\frac{1}{1+x^2} + u'(x)\arctan(x)\Big) dx\,.$$

4) Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che la retta di equazione $x + y = k$ interseca la circonferenza con centro nell'origine e raggio 3 in un punto di ordinata 2.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare le frazioni

$$\frac{x^{10} - x^2}{1 - x^2}, \quad \frac{2^{10x} - 2^{2x}}{1 - 2^{2x}}.$$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 18 punti, il secondo 5-6, il terzo 7, l quarto vale circa 5 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 23/01/2009

NOME: COGNOME:

1) a) Determinare dominio e derivata della funzione f definita da

$$f(x) = x^3 \ln\Big(\frac{\sqrt{(x+2)^{99} - 17(x+2)}}{\sqrt{5x-7}}\Big).$$

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = \dfrac{e^{5x}-1}{e^{5x}+1}$. Dire se la funzione u definita da $u(x) = \sin(g(x))$ è strettamente crescente in $\mathbf{R}$.
c) Dire per quali $b > 0$ la funzione u definita da $u(x) = \sin(bg(x))$ è strettamente crescente in $\mathbf{R}$.

2) Dire se convergono la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^n}{40^n + n^4 + 7n + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^n(n^9+3)}{40^n + (4n^3+1)^2 + 1}.$$

3) Sia u la funzione definita da $u(x) = \frac{\left(x^3+6x^2+x\right)^3}{\left(x^2+6x+1\right)^2}$. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(u(x) + \big(\ln(x) + \cos(x)\big)^6 (-\sin(x) + \frac{1}{x})\Big)\, dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \Big(u(x)\frac{1}{1+x^2} + u'(x)\arctan(x)\Big) dx\,.$$

4) Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che la retta di equazione $x + y = k$ interseca la circonferenza con centro nell'origine e raggio 3 in un punto di ordinata 2.

5) Senza punteggio ufficiale. Semplificare le frazioni

$$\frac{x^{13} - x^5}{1 - x^2}, \quad \frac{2^{13x} - 2^{5x}}{1 - 2^{2x}}.$$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 18 punti, il secondo 5-6, il terzo 7, l quarto vale circa 5 punti. Riteniamo la parte c) del primo esercizio piú difficile del resto del compito.

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 13/01/2009

NOME: COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) a) Determinare massimi relativi e minimi relativi della funzione f definita da

$$f(x) = \Big(3x^2 - 2\Big)^{50} - 5x^2.$$

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = f(x) + \sin\left(\dfrac{x^3\cos(x^2)}{x+5}\right)$. Calcolare la derivata di g.

2) Sia α la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x \le 2 \\ \ln(e^x - x + x^3) & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

a) Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x), \quad \lim_{x\to 2} \alpha(x).$$

b) Dire se la funzione α è derivabile in 2.
c) Determinare $b \in \mathbf{R}$ tale che l'equazione $\alpha(x) = b$ ha almeno due soluzioni.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^3}\frac{x^7}{\frac{x}{x+4}}\,dx.$$

b) Sapendo che, posto $l(x) = x^8\ln(x)$, la derivata l' di l vale $l'(x) = 8x^7\ln(x)+x^7$, calcolare l'integrale indefinito $\int x\Big(8(x^2+1)^7\ln(x^2+1) + (x^2+1)^7\Big)\,dx$.

4) Sia r una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $r(0) = 0$, $r(1) = 18\pi$. Poniamo $s(x) = \sin(r(x))$.
a) Provare che esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $s'(x) = 0$.
b) Provare che esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $s'(x) \ge 1$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) i primi tre esercizi valgono circa 10 punti ciascuno, il secxondo un po' di piú, il terzo un po' di meno. Il quarto vale circa 10 punti. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio piú difficile del resto del compito.

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 13/01/2009

NOME: **COGNOME:**

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ________________________

1) a) Determinare massimi relativi e minimi relativi della funzione f definita da

$$f(x) = \Big(6x^2 - 2\Big)^{53} - 4x^2.$$

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = f(x) + \cos\Big(\frac{x^3}{(x+8)\sin(x^6)}\Big)$. Calcolare la derivata di g.

2) Sia α la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x \leq 3 \\ x^3 - \ln(x^2+1) - 7 & \text{se } x > 3 \end{cases}.$$

a) Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x), \quad \lim_{x\to 3} \alpha(x).$$

b) Dire se la funzione α è derivabile in 3.
c) Determinare $b \in \mathbf{R}$ tale che l'equazione $\alpha(x) = b$ ha almeno due soluzioni.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^3 \frac{x+2}{x^4} \frac{x^6}{\frac{x}{x+3}}\, dx.$$

b) Sapendo che, posto $l(x) = x^8 \ln(x)$, la derivata l' di l vale $l'(x) = 8x^7\ln(x) + x^7$, calcolare l'integrale indefinito $\int x^2\Big(8(x^3+1)^7 \ln(x^3+1) + (x^3+1)^7\Big)\, dx$.

4) Sia r una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $r(0) = 0$, $r(1) = 18\pi$. Poniamo $s(x) = \sin(r(x))$.
a) Provare che esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $s'(x) = 0$.
b) Provare che esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $s'(x) \geq 1$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) i primi tre esercizi valgono circa 10 punti ciascuno, il secxondo un po' di piú, il terzo un po' di meno. Il quarto vale circa 10 punti. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio piú difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 29/11/2008

NOME: COGNOME:

1) Risolvere le disequazioni

$$\sqrt{(x^3-2)x+2-x^3}\,\left(\frac{x^8}{1-2x^8}-7\right)<0\,,$$

$$\left(\sqrt{(x^3-2)x+2-x^3}+x^6+6^x\right)\left(\frac{x^8}{1-2x^8}-7\right)<0\,.$$

2) Sia r la retta di equazione $y=3x+2$. a) Dire quali punti di r appartengono anche alla retta passante per i punti $(2,3)$ e $(4,5)$.
b) Dire quali punti (x,y) di r soddisfano la condizione $x^2=y^2$ e quali punti (x,y) di r soddisfano la condizione $(4-2y)^{120}=21x^{60}$.

3) a) Siano a_n, b_n e c_n le successioni definite da

$$a_n=\frac{n^2+\frac{n^4}{2n+1}}{n^3+\cos n},\quad b_n=\frac{2^n+n^{10}}{7^n+1}3^{n+2},\quad c_n=b_n\cdot\frac{10}{n(\sin n)^2+5}\,.$$

Calcolare, se esistono, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$.
b) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3^n4^{2n}+n}{n!+2}\,.$$

4) a) Dire per quali numeri reali x converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x-18)(x+70)n^{2x-3}\sqrt{n^{x+5}}\,.$$

Ricordo che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha>1$, e che, se $c\neq 0$, e a_n è una successione qualunque, allora $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge se e solo se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c\,a_n$ converge.
b) Provare che, se a_n è una successione positiva (cioè $a_n>0$) e decrescente, e inoltre converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{n^2}$, (cioè la serie $a_1+a_4+a_9+a_{16}+....$), allora converge anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{4\sqrt{n}}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 9 punti, il secondo 8 punti, il terzo 12 punti e il quarto 11 punti o un po' di piú. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto piú difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2008/09 29/11/2008

NOME: COGNOME:

1) Risolvere le disequazioni

$$\sqrt{(x^6-5)x+5-x^6}\,\left(\frac{x^7}{1-4x^7}-9\right)<0\,,$$

$$\left(\sqrt{(x^6-5)x+5-x^6}+x^{12}+3^x\right)\left(\frac{x^7}{1-4x^7}-9\right)<0\,,$$

2) Sia r la retta di equazione $x+5y=4$.
a) Dire quali punti di r appartengono anche alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 3.
b) Dire quali punti (x,y) di r soddisfano la condizione $x^2=y^2$ e quali punti (x,y) di r soddisfano la condizione $(3x-7)^{84}=13y^{42}$.

3) a) Siano a_n, b_n e c_n le successioni definite da

$$a_n=\frac{4^n+\frac{15^n}{7\cdot 3^n+n^2}}{5^n+\sin n},\quad b_n=\frac{n^5+n^2}{n^9+1}(3n)^2,\quad c_n=b_n\cdot\frac{8}{n(\cos n)^4+3}\,.$$

Calcolare, se esistono, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$.
b) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{n+2}6^n+4n}{n!+8}\,.$$

4) a) Dire per quali numeri reali x converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x-81)(x+40)n^{3x-1}n^{x+2}\sqrt{n}\,.$$

Ricordo che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha>1$, e che, se $c\neq 0$, e a_n è una successione qualunque, allora $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge se e solo se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c\,a_n$ converge.
b) Provare che, se a_n è una successione positiva (cioè $a_n>0$) e decrescente, e inoltre converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{n^2}$, (cioè la serie $a_1+a_4+a_9+a_{16}+....$), allora converge anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{4\sqrt{n}}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 9 punti, il secondo 8 punti, il terzo 12 punti e il quarto 11 punti o un po' di piú. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto piú difficile del resto del compito.