

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

15/09/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per 16/09, 17/09 o inizio ottobre)

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{\arctan(x^2 \sin(\pi x))}}.$$

b) Sia g una funzione tale che $g'(x) = \sin(x^7) \cos(x)$. Calcolare la derivata della funzione h definita da $h(x) = g(x^3)$.

c) Trovare gli intervalli di crescita e decrescita della funzione α definita da $\alpha(x) = (x^2 + 4x + 700)^{\sqrt{2}}$.

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 \sqrt[4]{3n^7 + n^2}}{n^{18} + 2}.$$

b) Provare che la successione a_n definita da $a_n = \ln(\sin(n) + 7)e^{\sin n}$ è limitata. Ricordo che una successione a_n si dice limitata se esistono numeri reali c e b tali che $c \leq a_n \leq b$ per ogni n .

c) Provare che se u è una funzione continua da \mathbf{R} in \mathbf{R} a valori positivi (ossia $u(x) > 0$ per ogni numero reale x), allora è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u(\sin n)}{3^n}.$$

3) a) Calcolare l'integrale definito $\int_1^3 \left(2 + \frac{x^{\sqrt{5}\sqrt{10}}}{x^{5\sqrt{2}}}\right) dx$ mostrando che il risultato è un numero intero.

b) Sapendo che $\int x \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \ln(x^2 + 1) \right) + c$ (fatto che potete usare ma non siete tenuti a dimostrare), calcolare

$$\int \left(e^{3x} \ln(e^{6x} + 1) \right) e^{3x} dx.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(2, 5)$ e raggio 5. Verificare che il punto $P = (6, 8)$ appartiene a C . Trovare inoltre un punto Q su C tale che il segmento passante per P e Q sia il diametro di C .

5) a) Svolgere l'espressione $(2x + 5)(x^2 + 3)(x - 7)$.

b) Semplificare l'espressione $\frac{x^6 - 1}{2x^3 - 2}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 13 punti, il terzo 7 punti e il quarto 4/5 punti. La parte c) del secondo esercizio è probabilmente la parte più difficili del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

15/09/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per 16/09, 17/09 o inizio ottobre)

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = x^6 \sqrt{\arctan\left(\frac{x^3}{\cos(5x)}\right)}.$$

b) Sia g una funzione tale che $g'(x) = \cos(e^x + x^2)$. Calcolare la derivata della funzione h definita da $h(x) = g(\sin(x))$.

c) Trovare gli intervalli di crescita e decrescita della funzione α definita da $\alpha(x) = (x^2 + 6x + 900)^{\sqrt{5}}$.

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^8 \sqrt[3]{8n^5 + n^4}}{n^{21} + 6}.$$

b) Provare che la successione a_n definita da $a_n = \ln(\cos(n) + 9)e^{\sin n}$ è limitata. Ricordo che una successione a_n si dice limitata se esistono numeri reali c e b tali che $c \leq a_n \leq b$ per ogni n .

c) Provare che se u è una funzione continua da \mathbf{R} in \mathbf{R} a valori positivi (ossia $u(x) > 0$ per ogni numero reale x), allora è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u(\cos n)}{3^n}.$$

3) a) Calcolare l'integrale definito $\int_5^9 \left(\frac{x^{3\sqrt{7}}}{x\sqrt{3\sqrt{21}}} - 3 \right) dx$ mostrando che il risultato è un numero intero.

b) Sapendo che $\int x \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \ln(x^2 + 1) \right) + c$ (fatto che potete usare ma non siete tenuti a dimostrare), calcolare

$$\int \left(e^{6x} \ln(e^{12x} + 1) \right) e^{6x} dx.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(7, 3)$ e raggio 5. Verificare che il punto $P = (4, 7)$ appartiene a C . Trovare inoltre un punto Q su C tale che il segmento passante per P e Q sia il diametro di C .

5) a) Svolgere l'espressione $(x^3 + 5)(7x - 3)(x + 6)$.

b) Semplificare l'espressione $\frac{x^8 - 1}{3x^4 + 3}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 13 punti, il terzo 7 punti e il quarto 4/5 punti. La parte c) del secondo esercizio è probabilmente la parte più difficile del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

16/07/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = 3^{5 \cdot 2^x + 2} - 81.$$

a) Calcolare la derivata della funzione g definita da $g(x) = x^3 f(x)$.

b) Risolvere la disequazione $f(x) < 0$.

c) Risolvere la disequazione

$$f(x)\sqrt{7-x^2} < 2f(x).$$

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^7 5^{3n+1} + n}{\sqrt{n!} + \cos n}.$$

b) Sia a_n una successione di numeri interi positivi con la proprietà che $a_{n+1} = a_n n^2$.
Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a_n)^2}{a_{2n}}$$

è convergente.

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\sqrt{x} \left(\sqrt[3]{x} + 1 \right)^2 + x \sqrt{3x+1} \right) dx.$$

b) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} e^{-x^2} dx.$$

4) Dire per quali numeri reali positivi r la circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio r e la circonferenza di centro $(3,5)$ e raggio r hanno esattamente un punto in comune.

5) Scrivere l'espressione

$$\left(\frac{x^2 - 3x}{x+1} \right)^2 + 3$$

come un'unica frazione.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 8 punti, il terzo 11 punti e il quarto 4/5 punti. La parte b) del secondo e la parte b) del terzo esercizio sono probabilmente le parte più difficili del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

16/07/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = 4^{7 \cdot 2^x + 2} - 64.$$

a) Calcolare la derivata della funzione g definita da $g(x) = (\sin x) f(x)$.

b) Risolvere la disequazione $f(x) < 0$.

c) Risolvere la disequazione

$$f(x) \sqrt{7 - x^2} < 2f(x).$$

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^7 5^{3n+1} + n}{\sqrt{n!} + \cos n}.$$

b) Sia a_n una successione di numeri interi positivi con la proprietà che $a_{n+1} = a_n n^2$.
Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a_n)^2}{a_{2n}}$$

è convergente.

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\sqrt{x} \left(\sqrt[3]{x} + 1 \right)^2 + x \sqrt{3x + 1} \right) dx.$$

b) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} e^{-x^2} dx.$$

4) Dire per quali numeri reali positivi r la circonferenza di centro $(1, 1)$ e raggio r e la circonferenza di centro $(3, 5)$ e raggio r hanno esattamente un punto in comune.

5) Scrivere l'espressione

$$\left(\frac{x^2 - 3x}{x + 1} \right)^2 + 3$$

come un'unica frazione.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 8 punti, il terzo 11 punti e il quarto 4/5 punti. La parte b) del secondo e la parte b) del terzo esercizio sono probabilmente le parte più difficili del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

23/06/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Calcolare il dominio e la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt[4]{7 - \sqrt{2x+6}} \ln \left(- (5x-2)(x^2-3) \right).$$

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2+n)\sqrt{3n+7}}{9^n+n^3}.$$

b) Posto $b_n = \frac{1}{2}|\sin n| + \frac{1}{3}|\cos n|$, provare che $b_n \geq \frac{1}{8}$ per ogni n .

c) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{n^3}{n^4+n+1}.$$

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2}}{e^{\frac{1}{x}}} dx.$$

b) Calcolare, per un opportuno numero reale $a \neq 0$, l'integrale indefinito

$$\int (7x^2+1) \cos(ax^3+x) dx.$$

4) Siano C_1 la circonferenza di centro $(-31, 4)$ e raggio 7 e C_2 la circonferenza di centro $(38, 4)$ e raggio 5.

a) Determinare i punti che appartengono a C_2 aventi ordinata 6.

b) Determinare una retta che ha esattamente tre punti in comune con $C_1 \cup C_2$.

5) (Senza punteggio ufficiale).

a) Svolgere la frazione $\frac{x^2}{\frac{x}{x^3+7} - \frac{x}{6x-1}}$.

b) Semplificare la frazione $\frac{18x^2-2}{1-3x}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 12 punti, il terzo 6 punti e il quarto 5 punti. La parte b) del secondo esercizio è probabilmente la parte più difficile del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

23/06/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Calcolare il dominio e la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt[6]{2x+6}} \ln \left(-(9x-4)(x^2-5) \right).$$

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^3+n)\sqrt{2n+5}}{8^n+n^4}.$$

b) Posto $b_n = \frac{1}{5}|\sin n| + \frac{1}{2}|\cos n|$, provare che $b_n \geq \frac{1}{12}$ per ogni n .

c) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{n^3}{n^4+n+1}.$$

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2}}{e^{\frac{1}{x}}} dx.$$

b) Calcolare, per un opportuno numero reale $a \neq 0$, l'integrale indefinito

$$\int (5x^3+1) \cos(ax^4+x) dx.$$

4) Siano C_1 la circonferenza di centro $(-23, 2)$ e raggio 5 e C_2 la circonferenza di centro $(45, 2)$ e raggio 3.

a) Determinare i punti che appartengono a C_2 aventi ordinata 3.

b) Determinare una retta che ha esattamente tre punti in comune con $C_1 \cup C_2$.

5) (Senza punteggio ufficiale).

a) Svolgere la frazione $\frac{x}{\frac{x^2}{x+3} - \frac{x}{3x-1}}$.

b) Semplificare la frazione $\frac{8x^2-2}{1-2x}$.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo 12 punti, il terzo 6 punti e il quarto 5 punti. La parte b) del secondo esercizio è probabilmente la parte più difficile del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

22/02/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Sia α la funzione definita da

$$\alpha(x) = \frac{\frac{x^2}{3+x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x+2} \frac{2}{x^5} + 1}.$$

a) Scrivere α come quoziente di due polinomi.

b) Calcolare la derivata della funzione β definita da $\beta(x) = \alpha(x) \cos\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 3\right)$.

2) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 + n + 7)^{30}}{3^{2n} + n^2 + 7}$$

e se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) \ln(n)}.$$

3) a) Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \frac{x^3 - x^5}{x^3 - x^2} dx \quad \text{e} \quad \int \frac{x}{(3x^2 + 1)^2} (x^3 + x) dx.$$

Per il calcolo del secondo integrale può essere utile usare il fatto che data la funzione f definita da $f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$, la derivata f' di f vale $f'(x) = \frac{-6x}{(3x^2+1)^2}$.

b) Posto $F(x) = \int_3^x (7 - \cos(t^2)) dt$, provare che $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Si consiglia di NON calcolare questo integrale.

c) Dire per quali numeri reali a , si ha $F(x^a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

4) Siano A il punto $(1, 0)$ e B il punto $(10, 0)$. Determinare i punti Q aventi ascissa 2 tali che la distanza tra Q e B sia il doppio della distanza tra Q e A .

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 9 punti, il secondo 8-9 punti, il terzo 14 punti e il quarto 3-4 punti. Nel primo la parte a) conta poco. La parte b) del terzo esercizio è probabilmente la parte più difficile del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

22/02/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Sia α la funzione definita da

$$\alpha(x) = \frac{\frac{x^7}{x+5} \frac{5}{x^4} + 1}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x+5}}.$$

a) Scrivere α come quoziente di due polinomi.

b) Calcolare la derivata della funzione β definita da $\beta(x) = \alpha(x) \ln \left(x^8 \cos \left(\frac{1}{\sin(x)} \right) + 7 \right)$.

2) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^4 + n + 5)^{20}}{2^{5n} + n^4 + 5}$$

e se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)}.$$

3) a) Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \frac{x^6 - x^4}{x^3 - x^4} dx \quad \text{e} \quad \int \frac{x^3}{(5x^4 + 1)^2} (x^5 + x) dx.$$

Per il calcolo del secondo integrale può essere utile usare il fatto che data la funzione f definita da $f(x) = \frac{1}{5x^4+1}$, la derivata f' di f vale $f'(x) = \frac{-20x^3}{(5x^4+1)^2}$.

b) Posto $F(x) = \int_3^x (9 + \sin(t^4)) dt$, provare che $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Si consiglia di NON calcolare questo integrale.

c) Dire per quali numeri reali a , si ha $F(x^a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

4) Siano A il punto $(0, 3)$ e B il punto $(0, 15)$. Determinare i punti Q aventi ordinata 4 tali che la distanza tra Q e B sia il triplo della distanza tra Q e A .

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 9 punti, il secondo 8-9 punti, il terzo 14 punti e il quarto 3-4 punti. Nel primo la parte a) conta poco. La parte b) del terzo esercizio è probabilmente la parte più difficile del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

25/01/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = 3x^2e^x + 2e^x$.

a) Determinare i minimi relativi di f .

b) Dire se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = 100$ e se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = -1$.

c) Provare che per ogni funzione $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ esiste un numero reale a tale che l'equazione

$$u(f(x)) = a$$

nell'incognita x ha almeno due soluzioni distinte.

d) Calcolare la derivata della funzione g definita da $g(x) = f(x) \sin\left(\frac{\sqrt{3x+1}}{\ln(x)}\right)$.

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{12} 7^n}{8^n + n^{12} + 1}.$$

b) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \sqrt[n]{n!} - n^2 + \cos(n).$$

Si può usare il fatto, che non siete tenuti a dimostrare, che $n^n \geq n!$ per ogni numero naturale n .

3) Sia α la funzione data da

$$\alpha(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x \sqrt[3]{x} + x}.$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^{16} \alpha(x) dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \alpha(x^2 + 7) x dx.$$

4) Sia P il punto $(3, 4)$. Determinare i punti Q appartenenti alla retta di equazione $x+y=2$ tali che P appartiene alla circonferenza di centro Q e raggio 8.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 17 punti, il secondo 9 punti, il terzo 6 punti e il quarto 4 punti. La parte c) del primo esercizio è probabilmente la parte più difficile del compito.

Scritto di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

25/01/2008

NOME:

COGNOME:

Orale (segnare preferenza per quest'appello o dopo)

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = -5x^2e^x - 4e^x$.

a) Determinare i minimi relativi di f .

b) Dire se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = 2$ e se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = -150$.

c) Provare che per ogni funzione $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ esiste un numero reale a tale che l'equazione

$$u(f(x)) = a$$

nell'incognita x ha almeno due soluzioni distinte.

d) Calcolare la derivata della funzione g definita da $g(x) = \cos(f(x)) \ln\left(\frac{2x+3}{\sqrt{x}} + 5\right)$.

2) a) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{17} 5^n}{6^n + n^{17} + 3}.$$

b) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 2\sqrt[n]{n!} + \sin(n).$$

Si può usare il fatto, che non siete tenuti a dimostrare, che $n^n \geq n!$ per ogni numero naturale n .

3) Sia α la funzione data da

$$\alpha(x) = \frac{x \sqrt[9]{x} + x}{\sqrt[3]{x} \sqrt[9]{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^8 \alpha(x) dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \alpha(x^3 + 5) x^2 dx.$$

4) Sia P il punto $(5, 1)$. Determinare i punti Q appartenenti alla retta di equazione $x - y = 7$ tali che P appartiene alla circonferenza di centro Q e raggio 10.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale circa 17 punti, il secondo 9 punti, il terzo 6 punti e il quarto 4 punti. La parte c) del primo esercizio è probabilmente la parte più difficile del compito.

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

09/01/2008

NOME:

COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) a) Determinare il dominio e gli intervalli di crescita e decrescita della funzione f

definita da $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}} + 4$.

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = \ln(f(x) + x^3 \cos(x))$. Calcolare la derivata di g .

2) a) Sia u la funzione definita da

$$u(x) = 30 + \sin\left(\frac{-x^4 + \cos(x^2 + x)}{2 + x^4}\right).$$

Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.

b) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u(n)$.

c) Date le disequazioni (D_1) e (D_2)

$$-(x-4)(x-5) \leq 0 \quad (D_1)$$

$$-(x-4)(x-5) + 6^x u(x) \leq 0 \quad (D_2)$$

dire se tutte le x che risolvono (D_1) risolvono anche (D_2) e dire se tutte le x che risolvono (D_2) risolvono anche (D_1) .

3) Sia α la funzione data da

$$\alpha(x) = \left(\frac{(3(x+2))^6}{3^4(x+2)^5} \right)^2.$$

Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 \alpha(x) dx$ e l'integrale indefinito $\int \cos\left(\frac{\alpha(x)}{\pi}\right) \alpha'(x) dx$.

4) a) Sia s una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} periodica di periodo 1. Provare che la funzione r definita da $r(x) = s\left(\frac{x}{5}\right)$ è periodica. Ricordo che una funzione f si dice periodica se esiste un numero reale $a > 0$ tale che $f(x+a) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. In tal caso si dice che a è un periodo di f .

b) Provare che se f è una funzione continua da \mathbf{R} in \mathbf{R} tale che $f(2x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora f è costante.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) i primi due esercizi valgono circa 11-12 punti, il terzo 7 punti e il quarto 10 punti. Nel terzo la parte c) è quella che vale di più. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio più difficile del resto del compito.

Secondo Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2007/08

09/01/2008

NOME:

COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) a) Determinare il dominio e gli intervalli di crescita e decrescenza della funzione f

definita da $f(x) = 7 - \sqrt{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+3}}$.

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = x^2 f(x^4 + x)$. Calcolare la derivata di g .

2) a) Sia u la funzione definita da

$$u(x) = 40 + \cos\left(\frac{x^3}{\cos(2^x) + 4 + x^6}\right).$$

Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$.

b) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u(-n)$.

c) Date le disequazioni (D_1) e (D_2)

$$-(x-1)(x-2) \leq 0 \quad (D_1)$$

$$-(x-1)(x-2) + x^{80}u(x) \leq 0 \quad (D_2)$$

dire se tutte le x che risolvono (D_1) risolvono anche (D_2) e dire se tutte le x che risolvono (D_2) risolvono anche (D_1) .

3) Sia α la funzione data da

$$\alpha(x) = \left(\frac{2^4(x+3)^8}{(2(x+3))^7} \right)^2.$$

Calcolare l'integrale definito $\int_2^3 \alpha(x) dx$ e l'integrale indefinito $\int e^{\alpha(x)\sqrt{2}} \alpha'(x) dx$.

4) a) Sia s una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} periodica di periodo 1. Provare che la funzione r definita da $r(x) = s(\frac{x}{4})$ è periodica. Ricordo che una funzione f si dice periodica se esiste un numero reale $a > 0$ tale che $f(x+a) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. In tal caso si dice che a è un periodo di f .

b) Provare che se f è una funzione continua da \mathbf{R} in \mathbf{R} tale che $f(3x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora f è costante.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) i primi due esercizi valgono circa 11-12 punti, il terzo 7 punti e il quarto 10 punti. Nel terzo la parte c) è quella che vale di più. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio più difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Bioteologie
Anno Accademico 2007/08 24/11/2007

NOME: _____ **COGNOME:** _____

1) Risolvere le disequazioni

$$\frac{4(3x+2)-5x}{2-x^5} < 0,$$

$$\left(\frac{x^5}{2-x^5}\right)^{80} \geq 7\left(\frac{x^5}{2-x^5}\right)^6.$$

2) a) Dire se il punto $P = (5, 3)$ sta sulla circonferenza di centro $(3, 1)$ e raggio 4.

b) Siano α e β le funzioni definite da $\alpha(x) = 2^x - 8$, $\beta(x) = (x-1)(6-2x)(x-5)(x-4)$ e siano u e v le funzioni definite da $u(x) = |\alpha(x)| |\beta(x)|$, $v(x) = |\alpha(x)| + |\beta(x)|$. Dire quali punti del grafico di u appartengono alla retta di equazione $y = 0$ e quali punti del grafico di v appartengono alla retta di equazione $y = 0$.

3) Siano date le successioni

$$a_n = \frac{(2n^2+3)^2 - (2n^2+1)(2n^2+2)}{n^3 + \sin(n^2+1)}, \quad b_n = \frac{4n^2}{4^n - 1870 \cdot 3^n + 3}.$$

a) Calcolare, se esistono, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n a_n$.

b) Provare che esiste un numero naturale N tale che $b_n > 0$ se $n \geq N$.

c) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

4) a) Calcolare $\sum_{n=0}^{107} 5 \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^n}$. Si suggerisce di tenere conto della formula $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$, valida per ogni numero naturale k e per ogni $x \neq 1$.

b) Sia a_n una successione tale che $a_{n+3} = a_n$ per ogni numero intero positivo n . Provare che la successione b_n definita da

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

è convergente (ricordo che convergente significa che ha un limite che è un numero reale).

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale 10 punti, il secondo 7, il terzo 13, il quarto 10 (o poco più). Nel secondo vale di più la parte b). Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto più difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Bioteologie
Anno Accademico 2007/08 24/11/2007

NOME: _____ **COGNOME:** _____

1) Risolvere le disequazioni

$$\frac{3x - 2(4x - 5)}{x^7 - 3} < 0,$$

$$\left(\frac{x^7}{x^7 - 3}\right)^{92} \geq 9 \left(\frac{x^7}{x^7 - 3}\right)^{10}.$$

2) a) Dire se il punto $P = (3, 2)$ sta sulla circonferenza di centro $(7, 5)$ e raggio 5.

b) Siano α e β le funzioni definite da $\alpha(x) = x - 2$, $\beta(x) = (3^x - 9)(16 - 4x)(x - 1)(x + 3)$ e siano u e v le funzioni definite da $u(x) = |\alpha(x)| |\beta(x)|$, $v(x) = |\alpha(x)| + |\beta(x)|$. Dire quali punti del grafico di u appartengono alla retta di equazione $y = 0$ e quali punti del grafico di v appartengono alla retta di equazione $y = 0$.

3) Siano date le successioni

$$a_n = \frac{n^5 + \cos(n^3 + 1)}{(3n^3 + 3)(3n^3 + 5) - (3n^3 + 2)^2}, \quad b_n = \frac{6n^3}{6^n - 905 \cdot 5^n + 8}.$$

a) Calcolare, se esistono, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

b) Provare che esiste un numero naturale N tale che $b_n > 0$ se $n \geq N$.

c) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

4) a) Calcolare $\sum_{n=0}^{113} 7 \frac{5^n}{11^{\frac{n}{3}}}$. Si suggerisce di tenere conto della formula $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$, valida per ogni numero naturale k e per ogni $x \neq 1$.

b) Sia a_n una successione tale che $a_{n+4} = a_n$ per ogni numero intero positivo n . Provare che la successione b_n definita da

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

è convergente (ricordo che convergente significa che ha un limite che è un numero reale).

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) il primo esercizio vale 10 punti, il secondo 7, il terzo 13, il quarto 10 (o poco più). Nel secondo vale di più la parte b). Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto più difficile del resto del compito.