Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 24/09/2007

NOME: **COGNOME:**

1) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sin\left(\frac{x^4}{8x^4 + 4x^2e^x + 3}\right).$$

a) Calcolare la derivata di f.
b) Risolvere l'equazione $f(x) = 0$.

2) Dire in quali intervalli è decrescente la funzione g definita da $g(x) = e^{x^{10}-3x^4}$.

3) Dire se convergono $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ove

$$a_n = \frac{n^3 3^n(\sqrt{n}+1)}{n^2 7^n + n}, \quad b_n = \left(\frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+5)}\right)^{n(3+(-1)^n)}$$

4) Sia

$$u(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)^3}{x^2-1}.$$

a) Calcolare l'integrale indefinito $\int u(x)\,dx$
b) Calcolare l'integrale indefinito $\int u(3 + 2\arctan(x))\frac{1}{1+x^2}\,dx$

5) Determinare un punto P di ordinata positiva sulla retta di equazione $y = 2x$ tale che il triangolo avente per vertici l'origine, P e il punto $(1, -4)$ sia isoscele.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) il primo esercizio vale circa 9 punti, il secondo vale 4/5 punti, il terzo 8 punti, il quarto 8 e il quinto 4/5 punti.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 24/09/2007

NOME: **COGNOME:**

1) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \cos\Big(\frac{x^6}{7x^6 + 5x^4 e^x + 7}\Big).$$

a) Calcolare la derivata di f.
b) Risolvere l'equazione $f(x) = 1$.

2) Dire in quali intervalli è decrescente la funzione g definita da $g(x) = e^{x^6 - 3x^{10}}$.

3) Dire se convergono $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ove

$$a_n = \frac{n^4 5^n (\sqrt{n} + 2)}{n^3 9^n + n}, \quad b_n = \Big(\frac{(n+4)(n+5)}{(n+3)(n+6)}\Big)^{n(4+(-1)^n)}$$

4) Sia

$$u(x) = \frac{(x-1)^3 (x+1)^2}{x^2 - 1}.$$

a) Calcolare l'integrale indefinito $\int u(x)\,dx$
b) Calcolare l'integrale indefinito $\int u(3 + 2\arctan(x))\frac{1}{1+x^2}\,dx$

5) Determinare un punto P di ordinata positiva sulla retta di equazione $y = -3x$ tale che il triangolo avente per vertici l'origine, P e il punto $(-1, -6)$ sia isoscele.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) il primo esercizio vale circa 9 punti, il secondo vale 4/5 punti, il terzo 8 punti, il quarto 8 e il quinto 4/5 punti.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 14/09/2007

NOME: **COGNOME:**

1) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt{x^3\sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} + x}\,.$$

2) Dire se convergono $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ove

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^7\sqrt{n}} + 1}, \quad b_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{3^n}$$

3) Sia g definita da

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 7 & \text{se } x \geq 2, \\ (x-3)^2 + a & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

con $a \in \mathbf{R}$.
a) Se $a = 1$ disegnare il grafico di g e dire se il punto $(1,5)$ sta sul grafico di g.
b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ g è continua.

4) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\frac{x^3(x^5+1)+4}{x\sqrt{x}} + \frac{\ln\big(\ln(x)+7\big)}{5x}\right) dx$$

5) (Senza punteggio ufficiale) Dire se vale l'uguaglianza

$$\sqrt{x^3 + x} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x}$$

e se vale l'uguaglianza

$$\sqrt{x^3 + x} = x\sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 17/07/2007

NOME: **COGNOME:**

Orale (segnare preferenza per questo appello o settembre)

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = e^{e^{7x}} \sin(x^2 + 2x) \cos\Big(x^7 \ln(x + 2)\Big) .$$

provando in particolare che $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.
b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) n^{-a}$$

converge.

2) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(7n + 5)\, n!} ,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 (7n + 5)^{2\pi}}{n! + n^8} .$$

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\Big(\ln(x) + 12\Big)^{80} \frac{1}{x} + \sqrt{x^5 + 4x^3 + 4x} \right) dx$$

b) Dire quante primitive h della funzione g definita da $g(x) = \cos(x^2) e^{-x^2}$ soddisfano $h(6) = 2$. Si consiglia di non calcolare esplicitamente le primitive date.

4) Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che la retta di equazione $y = x + k$ abbia esattamente un punto in comune con il grafico della funzione β definita da $\beta(x) = x^2 + 7$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo vale 6 punti, il terzo 11 punti e il quarto 4 punti.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 17/07/2007

NOME: **COGNOME:**

Orale (segnare preferenza per questo appello o settembre)

1) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = e^{e^{5x}} \sin(\sin(x) + x^6) \cos\Big(x^4 \ln(x+4)\Big) .$$

provando in particolare che $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.
b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\Big) n^{-a}$$

converge.

2) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{(4n+3)\, n!} ,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 (4n+3)^{\sqrt{5}}}{n! + n^6} .$$

3) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\Big(\ln(x) - 8\Big)^{77} \frac{1}{x} + \sqrt{x^5 + 6x^3 + 9x} \right) dx$$

b) Dire quante primitive h della funzione g definita da $g(x) = \sin(9x^2) e^{x^4}$ soddisfano $h(4) = -1$. Si consiglia di non calcolare esplicitamente le primitive date.

4) Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che la retta di equazione $y = x - k$ abbia esattamente un punto in comune con il grafico della funzione β definita da $\beta(x) = x^2 + 3$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome. *A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) il primo esercizio vale circa 11 punti, il secondo vale 6 punti, il terzo 11 punti e il quarto 4 punti.*

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 26/06/2007

NOME: **COGNOME:**

1) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{e^x}{x^2-3}}\, \cos\Big(x^3\cos(x) - \ln(x)\Big)\,.$$

2) Sia

$$a_n = \frac{n^7 + \sin\left(\sqrt[7]{n}\right)}{\left(\sqrt[3]{n}\right)^{25} + n}\,.$$

a) Dire se convergono le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n)\,.$

b) (piú difficile) Provare che se c_n è una successione tale che $c_n \leq -n$ e $\frac{b_n}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{b_n}$ converge.

3)
a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(7x^4 + \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} + \frac{(1-\ln x)^2}{1+\sqrt{\ln x}}\frac{5}{x}\Big)dx\,.$$

b) Determinare il dominio della funzione β definita da

$$\beta(x) = \ln\Big(\frac{1-\ln x}{\ln(x^2-2)}\Big)\,.$$

4) Siano date le rette r ed s, ove r è la retta di equazione $x+y=7$ e s è la retta passante per i punti $(-1,1)$ e $(3,5)$. Detto P il punto di intersezione di r ed s, scrivere l'equazione della circonferenza passante per P e con centro in $(0,1)$.

5) (Senza punteggio ufficiale) Semplificare le espressioni

$$\frac{x^3-16x}{x-4}, \qquad \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3 - 16\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}\,.$$

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 27/02/2007

NOME: **COGNOME:**

Orale (segnare preferenza per questo appello o dopo)

1) Sia α la funzione definita da $\alpha(x) = (x+1)(7 - \sqrt[3]{1-2x})$.
a) Risolvere la disequazione $\alpha(x) < 0$.
b) Calcolare la derivata della funzione β definita da $\beta(x) = \frac{\sin(x)}{\alpha(x)}$.
c) Sia $\gamma(x) = 3 - x - 2^x$. Provare che γ è strettamente decrescente e calcolare $\gamma(2)$ e $\gamma(3)$.
d) Risolvere la disequazione

$$\alpha(x)\Big(\gamma\big(\frac{1}{x^5+7}\big) + 3\Big) < 0\,.$$

2) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n\sqrt{n^3}}{3^n - 2n}\,.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^{4+\sin(n)} - 1}\,.$$

Dire inoltre se, posto

$$b_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{2^n\sqrt{n^3}}{3^n - 2n}$$

si ha $b_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(3(7\sqrt{x}+1)^{12}\frac{1}{\sqrt{x}} + 8\Big)\,dx\,.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(2,1)$ e raggio 5. Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che l'intersezione tra la retta di equazione $y = k$ e la circonferenza C è costituita da due punti P e Q e la distanza tra P e Q è uguale a 8.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) il primo esercizio vale circa 16 punti, e nel primo la parte d) è quella che conta di piú, il secondo vale 9 punti, il terzo 5 punti e il quarto 6 punti.

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 27/02/2007

NOME: **COGNOME:**

Orale (segnare preferenza per questo appello o dopo)

1) Sia α la funzione definita da $\alpha(x) = (5-x)(2+\sqrt[3]{2x+1})$.
a) Risolvere la disequazione $\alpha(x) \leq 0$.
b) Calcolare la derivata della funzione β definita da $\beta(x) = \frac{\ln(x)}{\alpha(x)}$.
c) Sia $\gamma(x) = 5 - x - x^5$. Provare che γ è strettamente decrescente e calcolare $\gamma(1)$ e $\gamma(3)$.
d) Risolvere la disequazione

$$\alpha(x)\Big(\gamma\big(3+\frac{1}{x^7}\big)-3\Big) \leq 0\,.$$

2) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5^n\sqrt{n^9}}{7^n-3n}\,.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^9}}{n^{8+\cos(n)}-3}\,.$$

Dire inoltre se, posto

$$b_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{5^n\sqrt{n^9}}{7^n-3n}$$

si ha $b_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{(9-7\sqrt{x})^{11}}{9}\frac{1}{\sqrt{x}} - 13\Big)\,dx\,.$$

4) Sia C la circonferenza di centro $(-1,6)$ e raggio 10. Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che l'intersezione tra la retta di equazione $x = k$ e la circonferenza C è costituita da due punti P e Q e la distanza tra P e Q è uguale a 12.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di piccole variazioni) il primo esercizio vale circa 16 punti, e nel primo la parte d) è quella che conta di piú, il secondo vale 9 punti, il terzo 5 punti e il quarto 6 punti.

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 29/01/2007

NOME: **COGNOME:**

Orale (segnare preferenza per questa settimana o dopo)

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^3}{9 + e^{-x^2}\cos\left(\frac{1}{3+x^6}\right)}$.

a) Calcolare la derivata di f.
b) Provare che f è definita su tutto $\mathbf{R}$.
c) Sia $g(x) = \Big(\sin(f(x)) + 30\Big)(x^8 - 2)(7 - 4x)$. Determinare per quali x si ha $g(x) > 0$.
d) Dire se g è strettamente crescente su $\mathbf{R}$ e se g è crescente su $\mathbf{R}$.

2) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\frac{n^{12}+\ln(n)}{(2n+1)^{10}}}\,.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n}\,n^{\sqrt{2}}}{n^3 + n\ln(3^n + n^{85})}\,.$$

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{e^{\frac{5}{3}\ln(\sin(x))}}\cos x\,dx\,.$$

4) Siano dati i punti nel piano $P = (6,1)$ e $Q = (2,8)$. Determinare i punti della retta che passa per P e Q che stanno sul grafico della funzione α definita da $\alpha(x) = \frac{2x^2-8}{(x-2)^2}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

Scritto di Matematica per Biotecnologie, Anno Accad. 2006/07 29/01/2007

NOME: **COGNOME:**

Orale (segnare preferenza per questa settimana o dopo)

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) Sia f la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^5}{9 + e^{-x^2} \sin\left(\frac{1}{3+x^6}\right)}$.

a) Calcolare la derivata di f.
b) Provare che f è definita su tutto $\mathbf{R}$.
c) Sia $g(x) = \Big(\cos(f(x)) + 28\Big)(x^6 - 2)(5 - 3x)$. Determinare per quali x si ha $g(x) > 0$.
d) Dire se g è strettamente crescente su $\mathbf{R}$ e se g è crescente su $\mathbf{R}$.

2) a) Dire se convergono le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\frac{n^{10}+\ln(n)}{(3n+2)^7}}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n}\, n^{\sqrt{2}}}{n^3 + n\ln(3^n + n^{97})}\,.$$

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{e^{\frac{4}{7}\ln(\cos(x))}}\, \sin x \, dx\,.$$

4) Siano dati i punti nel piano $P = (6, 3)$ e $Q = (2, 5)$. Determinare i punti della retta che passa per P e Q che stanno sul grafico della funzione α definita da $\alpha(x) = \frac{2x^2-8}{(x-2)^2}$.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2006/07 22/01/2007

NOME: COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente
Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ______________________

1) a) Determinare i punti di massimo relativo e di minimo relativo della funzione f definita da $f(x) = 8x - \ln\left(e^{10x+2} + 3\right)$.

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = f(x)\cos\left(x^2 \arctan(\sqrt{x})\right)$. Calcolare la derivata di g.

2) a) Determinare il dominio della funzione u definita da

$$u(x) = \ln(e^{8x} - e^{6x-5}) .$$

b) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{-\cos(x) + (7x+1)^8} .$$

c) Provare che esiste un numero reale a tale che il dominio della funzione v definita da

$$v(x) = \ln\left(5^x + \cos(x) - (7x+1)^8\right)$$

contiene l'intervallo $(a, +\infty)$.

3) a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^3 \sqrt[3]{5\sqrt[4]{\frac{x}{6}}}\, dx .$$

b) Sapendo che

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

(cosa che potete usare ma NON siete tenuti a provare), trovare una funzione h tale che $h'(x) = 9x^8 \arctan(x^9)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e inoltre $h(0) = 8$.

4) Sia α una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che

$$\alpha(x) = -x \quad \text{se } x \le -6$$

$$\alpha(x) = -\frac{1}{x^2+1} \quad \text{se } x \ge 6$$

a) Provare che esiste un numero reale b tale che $\alpha(b) = 0$.

b) Dire se α ha necessariamente un punto di minimo relativo, e se α ha necessariamente un punto di minimo assoluto.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) tutti gli esercizi valgono circa 10 punti. Il terzo vale un poco meno e i primi due forse un poco di piú. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio piú difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2006/07 06/12/2006

NOME: COGNOME:

1) Risolvere la disequazione

$$-5 < \sqrt{\frac{5}{x^4 - 2}} \leq 1\,.$$

Dire inoltre se esiste un numero reale x che risolve la disequazione data tale che il numero $x - 1$ non risolve la disequazione data.

2) Siano dati i punti del piano $P = (2, 1)$ e $Q = (3, 5)$, e sia r la retta passante per P e Q.
a) Scrivere l'equazione della retta r.
b) Sia S un punto che sta sulla retta perpendicolare ad r e passante per P tale che la distanza tra P e S sia uguale a 3. Calcolare la distanza tra Q e S.
c) Dire se esiste una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $r \cup \{S\}$ è il grafico di f.

3) Sia data la successione
$a_n = \frac{n^3 + 5}{n^3 + n + 2} \frac{3^n + n}{4^n + 2^n}$.
a) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \to +\infty} a_n$.
b) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{13^n}{4^{2n-1} + 5}\,.$$

4) a) Determinare tre numeri interi m, n e p tali che

$$\sqrt[3]{4}(3 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = m + n\sqrt[3]{2} + p\sqrt[3]{4}$$

b) Sia

$$K = \sum_{n=10}^{100} \left(\ln(3 + n\sqrt{2})\right).$$

Dire per quanti numeri interi p il numero $e^K - p\sqrt{2}$ è un numero intero.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.
A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) tutti gli esercizi valgono circa 10 punti, il primo un po' meno, il quarto un po' di piú. La somma di tuuti i punteggi è 40 o poco piú. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto piú difficile del resto del compito.

Esonero di Matematica per Biotecnologie

Anno Accademico 2006/07 06/12/2006

NOME: COGNOME:

1) Risolvere la disequazione

$$-8 < \sqrt{\frac{1}{x^3 - 7}} < 3\,.$$

Dire inoltre se esiste un numero reale x che risolve la disequazione data tale che il numero $x-1$ non risolve la disequazione data.

2) Siano dati i punti del piano $P = (6, -2)$ e $Q = (-5, 1)$, e sia r la retta passante per P e Q.
a) Scrivere l'equazione della retta r.
b) Sia S un punto che sta sulla retta perpendicolare ad r e passante per P tale che la distanza tra Q e S sia uguale a 20. Calcolare la distanza tra P e S.
c) Dire se esiste una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $r \cup \{S\}$ è il grafico di f.

3) Sia data la successione
$a_n = \dfrac{n^7 + 5}{n^7 + 5n + 8} \dfrac{6^n + 2^n}{5^n + n^3}$.
a) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \to +\infty} a_n$.
b) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n+4}}{10^n + 1}\,.$$

4) a) Determinare tre numeri interi m, n e p tali che

$$\sqrt[3]{9}(5 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = m + n\sqrt[3]{3} + p\sqrt[3]{9}$$

b) Sia

$$K = \sum_{n=25}^{90} \Big(\ln(4 + n\sqrt{2}) \Big)\,.$$

Dire per quanti numeri interi p il numero $e^K - p\sqrt{2}$ è un numero intero.

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome.

A livello indicativo (cioè a meno di minime variazioni) tutti gli esercizi valgono circa 10 punti, il primo un po' meno, il quarto un po' di piú. La somma di tuuti i punteggi è 40 o poco piú. Riteniamo la parte b) del quarto esercizio molto piú difficile del resto del compito.