1) Siano date le successioni $a_n = \dfrac{5^n}{4^n + \sin(3^n)}$, $b_n = \dfrac{n^6}{5n^5 + 2}$. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

2) Siano date le successioni $\frac{n^4 21^n + 1}{n^4 7^n}$, $\frac{n^8 6^n + 1}{n^{80} 2^n + n^4 18^n}$, $c_n = \begin{cases} 11 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{2}{9} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$. Calcolare limiti di a_n, b_n, $c_n a_n$.

3) Sia data la successione
$a_n = \dfrac{n^3 + 5}{n^3 + n + 2} \dfrac{3^n + n}{4^n + 2^n}$. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

4) Siano date le successioni

$$a_n = \frac{(2n^2+3)^2 - (2n^2+1)(2n^2+2)}{n^3 + \sin(n^2+1)}, \qquad b_n = \frac{4n^2}{4^n - 1870 \cdot 3^n + 3}.$$

a) Calcolare, se esistono, $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} 2^n a_n$.
b) Provare che esiste un numero naturale N tale che $b_n > 0$ se $n \geq N$.

5) Siano a_n, b_n e c_n le successioni definite da $a_n = \dfrac{n^2 + \frac{n^4}{2n+1}}{n^3 + \cos n}$, $b_n = \dfrac{2^n + n^{10}}{7^n + 1} 3^{n+2}$, $c_n = b_n \cdot \dfrac{10}{n(\sin n)^2 + 5}$. Calcolare, se esistono, $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$, $\lim_{n\to+\infty} c_n$.

6) Sia a_n la successione definita da $a_n = \dfrac{n^2 + \sin(n^4)}{\sqrt{3n} + \sqrt{5}}$. Calcolare, se esistono, $\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{3}{2}} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{4^n + a_n^5}{7^n + n}$.

7) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{5}{3}\right)^n + n^{10}}{\left(\frac{5}{2}\right)^n + \sin(n)} - \dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + n^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2}$,
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^7}{n^5+1} - \dfrac{n^\alpha}{n^2\sqrt{n} + n + 1}$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+3} \dfrac{\cos(n^2) + 13}{\sin(n) - \frac{6}{5}}$.

8) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)^n + 1}{n^n + n} \dfrac{3^n + \sqrt{n}}{6^n + \cos(n^2)}$,
$\lim_{n\to+\infty} 3^{2n+3} - a^{3n+1}$ al variare di $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[7]{n} + n^2\cos^2(n) - 4n\cos(n) + 5$.

9. Determinare i limiti della successione a_n quando $a_n = 16\sqrt{2}$, $a_n = 5 + \dfrac{1}{n}$, $a_n = n^2 - 6$, $a_n = n^{\frac{2}{3}} - 6$, $a_n = n^{\frac{2}{3}} - \sin(n^2 - 8)$, $a_n = \dfrac{3}{n+1}$, $a_n = \dfrac{n^2}{n - n^2 + 6}$, $a_n = \dfrac{n\sqrt{n} + n + 1}{n^2 + \sin n}$, $a_n = \dfrac{n^{1000} + 1}{n^{998} + n^{997} + 2}$, $a_n = \dfrac{3^n(n^{1000} + 1)}{4^n + n^2 - 3}$, $a_n = \dfrac{n^3}{(1,1)^n + 7}$, $a_n = \dfrac{n^3}{n! - 2^n}$, $a_n = \dfrac{n^3}{n^2 - 2^n}$,

$a_n = \dfrac{(\sqrt{n}+5)^3(3^n+1)}{(n+\cos n)(3^n+2^n)}$, $a_n = \dfrac{(\sqrt{n}+5)^a(3^n+1)}{(n+\cos n)(3^n+2^n)}$ $(a \in \mathbf{R})$, $a_n = \dfrac{6^n+5^n+n}{n!+n^3+\sin n}$,
$a_n = \dfrac{(3^n+1)(2^n+7)^5(n+1)^2+n^{10}}{100^n+2^n}$, $a_n = \dfrac{(3^n+1)(2^n+7)^5(n+1)^2+n^{10}}{b^n+2^n}$ $(b \in \mathbf{R})$,
$a_n = \dfrac{6^n}{n!}$, $a_n = \dfrac{n^7}{2^n}$, $a_n = \dfrac{n^7 3^n}{n!+n+2}$, $a_n = \begin{cases} \frac{n^7 3^n}{n!+n+2} & \text{se } n \leq 1876 \\ \frac{n!}{n^7 3^n} & \text{se } n > 1876\,. \end{cases}$, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^3} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

10) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ nei seguenti casi: $a_n = \pi n - 5$; $a_n = \frac{n^5-n^2+8}{n^2(n^2-8)^2}$; $a_n = n^{3\pi} - 7n^{10} - n^3 - 8$; $a_n = \frac{(n^3+1)^{212}(n^2+7)}{n^{637}-450n^{18}+4}$; $a_n = \frac{(n^3+1)^{212}(n^2+7)}{n^b+7}$, $b \in \mathbf{R}$; $a_n = \frac{3^n 9^{n+2}-25^n}{b^n+1}$, $b > 0$; $a_n = \frac{(n^2+n+7)(2^n-n)}{(\sqrt{n}+5)^4 3^n}$; $a_n = \frac{6^n(5^{2n}-n)}{n!-3}$; $a_n = \frac{n!(n-3)^2}{(n+1)!-n+2}$; $a_n = \dfrac{n!n^b+5}{(n+2)!-n+5}$, $b \in \mathbf{R}$; $a_n = \dfrac{n^4}{n^b+n^{5-2b}}$, $b \in \mathbf{R}$.

11) Dire quali successioni (a_n) soddisfano la seguente proprietà:

$$\exists \nu \in \mathbf{N} : \forall \varepsilon > 0 : \quad n > \nu \Rightarrow |a_n - 5| < \varepsilon$$

12) Dire quali delle seguenti affermazioni a), b), c), d), e), equivale a $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

a) $\forall \varepsilon \in (0,2)\ \exists \nu \in \mathbf{N} : \quad n > \nu \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$
b) $\forall \varepsilon \in (\frac{1}{2000}, 2)\ \exists \nu \in \mathbf{N} : \quad n > \nu \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$
c) $\forall \varepsilon$ della forma $\varepsilon = \frac{1}{10^k}, k \in \mathbf{N},\ \exists \nu \in \mathbf{N} : \quad n > \nu \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$
d) $\forall \varepsilon \in (0,1) \cap \mathbf{Q}\ \exists \nu \in \mathbf{N} : \quad n > \nu \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$
e) $\forall \varepsilon$ della forma $\varepsilon = \frac{k+1}{k+8}, k \in \mathbf{N},\ \exists \nu \in \mathbf{N} : \quad n > \nu \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

13) Provare che la successione $\sin(n)$ non ha limite. Suggerisco una delle possibili dimostrazioni. Supponiamo $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$; allora si ha $l \in \mathbf{R}$ (perché?). Inoltre si ha anche $\sin(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ e $\sin(n-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ (perché?). Studiando $\sin(n+1) - \sin(n-1)$ dedurre $\cos(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, poi studiando $\sin(n+1) - \sin(n)$ dedurre $l = 0$, e arrivare ad un assurdo.

14) Sia (a_n) una successione che tende a 2. Possiamo dire che la disuguaglianza $a_n > 3$ vale al massimo solo per un numero finito di n?

15) Sia (a_n) una successione tale che $a_{n+1} = a_n + \sin^4\big((n!)!\big)$. Provare che esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

16) Sia (a_n) una successione tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, e $a_n \in (2,7)$ per ogni n, che cosa si può dire di l?

17) Sia $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \big(= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\big)$. Provare che esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Si può anche provare (ma è difficile) che tale limite è precisamente $\dfrac{\pi^2}{6}$.

18 Provare che se $l \in \overline{\mathbf{R}}$, e (a_n) è una successione tale che $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, e $a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, allora $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.