**Esercizi per il corso di analisi II per Ingegneria 2012/13, $4^o$ foglio.**

**1.** Trovare la lunghezza delle curve date da $(t^2, t^3) : t \in [2,3]$, $(t, e^t) : t \in [0,1]$, $(t^7, 3t^7) : t \in [1,2]$, $(t, 5|t|), t \in [-2,1]$.

**2.** Per ognuna delle seguenti due forme differenziali, dire se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che la forma è esatta su $\mathbf{R}^2$ (e determinare tale $a$): $x^2 y\,dx + ax^3\,dy$, $(x+y)^{a^2+8}\,dx + (x+y)^{3+2a^2}\,dy$.

**3***. Provare che se $f_1$ e $f_2$ sono funzioni continue da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ e $\omega(x,y) := f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$ è una forma differenziale esatta su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, allora $\omega$ è esatta anche su $\mathbf{R}^2$.

**4**. Sia $\gamma$ una curva (regolare a tratti) che parametrizza quella parte dell'ottagono regolare centrato nell'origine e con un vertice in $P = (0,-1)$ che parte da $P$ e arriva a $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ percorsa in senso *orario*. Calcolare $\int_\gamma y\,dx + x\,dy$.

**5**. Sia $\gamma$ la curva data nell'esercizio precedente (4). Calcolare $\displaystyle\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$

**6***. Provare che se una forma differenziale $\omega$ è chiusa su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e per $r > 0$ $\gamma_r$ è la curva data da $\gamma_r(t) = \big(r\cos(t), r\sin(t)\big), t \in [0, 2\pi]$, ossia la circonferenza di centro l'origine e raggio $r$ percorsa in senso antiorario, allora $\int_{\gamma_r} \omega$ ha lo stesso valore per tutti gli $r > 0$.

**7**. Calcolare l'integrale doppio $\int_A x\cos(y)\,dx\,dy$ ove

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \le 1, -x \le y \le x\big\}.$$

**8**. Calcolare l'area dell'insieme $\big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le 3 - x^2\big\}$.

**9**. Sia $A := \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{2} \le x \le 2, x \le y \le x^2\big\}$. Calcolare l'integrale doppio $\int_A e^x\,dx\,dy$.

**10**. Calcolare l'integrale doppio $\int_A x\,dx\,dy$ ove

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x + y \ge 1, x^2 + y^2 \le 1\big\}.$$

**11**. Sia $u(x,y) = \max\big\{2 - (x^2+y^2), 0\big\}$. Sia $E$ la palla aperta in $\mathbf{R}^2$ di centro $(0,0)$ e raggio 10. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_E u(x,y)\,dx\,dy\,.$$

**12**. Sia $A$ la palla chiusa in $\mathbf{R}^2$ di centro $(0,0)$ e raggio 1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A \arctan(x)\,dx\,dy\,.$$

**13**. Sia $A_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \times \big(\sin(n), \sin(n)+1\big)$. Sia $f(x,y) = \sin^2(x+y)e^{x\arctan(y)}$. Dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f(x,y)\,dx\,dy\,.$