

Esercizi per il corso di analisi II per Ingegneria 2012/13, 3° foglio.

Prima due correzioni sul foglio di *soluzioni* degli esercizi dei primi due fogli. Nell'esercizio 1 del secondo foglio pag. 12 si dice verso metà pagina *le direzioni verticali* $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, mentre invece le direzioni verticali da considerare sono ovviamente $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Simile errore nell'esercizio 2 del secondo foglio, a pag. 13 in una formula verso il fondo si dice $v_1 > 0$ o $v = (1, 0)$, mentre sarebbe $v_1 > 0$ o $v = (0, 1)$, e anche all'inizio di pag. 14 $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ vanno cambiati in $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Infine a pag. 15 in alto, si dice *c'è la derivata direzionale solo nella direzione* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e poi *nella direzione opposta* $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, invece le due direzioni sono $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ come del resto è chiaro dal discorso.

1. Sia f una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$. Supponiamo di sapere che il gradiente di f si annulla esattamente nei punti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e $(1, 2)$ e che $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \pi$, $f(1, 2) = 5$. Supponiamo di sapere che la funzione α definita da $\alpha(t) = f(\cos(t), \sin(t))$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ abbia massimo assoluto in 1 e minimo assoluto in 2 e che $\alpha(1) = 3$, $\alpha(2) = -\sqrt{5}$. In base a questi soli dati, che cosa si può concludere su massimo assoluto e minimo assoluto di f sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$?

2. Sia f una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$. Supponiamo di sapere che il gradiente di f si annulla in $(0, 0)$ e solo in quel punto e che $f(0, 0) = 2$. Supponiamo di sapere che la funzione α definita da $\alpha(t) = f(-1, t)$ abbia massimo assoluto in -3 e minimo assoluto in $\sqrt{5}$ e che $f(-1, -3) = 6$, $f(-1, \sqrt{5}) = \frac{3}{7}$. Supponiamo che la funzione β definita da $\beta(t) = f(1, t)$ sia costantemente uguale a 3. In base a questi soli dati, che cosa si può concludere su massimo assoluto e minimo assoluto di f sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$?

3. Sia f una funzione C^1 da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$. Calcolare, in base ad f e alle sue derivate, le derivate, rispetto a x, y e z , della funzione $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$g(x, y, z) = f(xy + z^2, z \sin(x + 5y)).$$

4. Scrivere le serie di Taylor centrate in 0 delle funzioni f_1, f_2, f_3, f_4 definite da $f_1(x) = x^2(\sin(x) + \cos(x))$, $f_2(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ (estesa per continuità in 0), $f_3(x) = x^3 \arctan(x^2)$, $f_4(x) = (x + 2)^2 \ln(1 + 2x)$.

5. Calcolare l'insieme di convergenza e la somma delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n 3^{n+2} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+3}}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+3}}{(n+5)!}.$$

6. Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzioni f_n, g_n e h_n definite da $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (\frac{101}{100} - \frac{1}{n}, \frac{101}{100} + \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$,

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{n^2+1} & \text{se } x \in (\frac{101}{100} - \frac{1}{n}, \frac{101}{100} + \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{sia su } \mathbf{R} \text{ sia su } [0, 1].$$

7. Provare che la somma della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8 + x^{2n}}$ è una funzione continua su $\mathbf{R}$ e su $\mathbf{R}$ può essere derivata termine a termine. Provare lo stesso per la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^9}{n + x^n}$, ma su $(1, +\infty)$ invece che su $\mathbf{R}$.