

## Esercizi proposti per il corso di analisi II per Ingegneria 2012/13.

Prima di tutto un'indicazione per il foglio 1. Nell'esercizio 7 parte c) del foglio 1 notare che  $f$  soddisfa  $f(tv) = f(v)$  se  $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ,  $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

1. Calcolare le derivate direzionali di  $g$  nel punto  $(0,0)$  quando  $g$  è definita come  $f$  nell'esercizio 3 del foglio 1, con l'unica differenza che la si pone uguale a 1 anche nel punto  $(0,0)$ . Stessa cosa per l'esercizio 4 del foglio 1.

2. Sia  $f : \mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}$  definita da  $f(x, y) = \begin{cases} y + \sin(x) & \text{se } y > \sin(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

a) Dire in che punti di  $\mathbf{R}^2$   $f$  è continua.

b) Calcolare le derivate direzionali di  $f$  in  $(0,0)$ .

3. Trovare il massimo e il minimo (se esistono) della funzione  $f$  definita da  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$  nell'insieme  $A$  definito da  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

4. Dire se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è convergente quando  $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ ,  $a_n = \frac{n^5}{2-n^5}$ ,  $a_n = \frac{1}{(n!)^n}$ ,  $a_n = \frac{6^n}{3^n}$ ,  $a_n = \frac{6^n}{3^n+4^n}$ ,  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$ ,  $a_n = \frac{n^4}{3^n}$ ,  $a_n = \frac{2^n}{n^{38}}$ ,  $a_n = \frac{\sqrt{n} \sqrt[5]{n} \sqrt{3n+7}}{n^2+n\sqrt{2}\sqrt{n}}$ ,  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sin(n^5)}$ ,  $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ ,  $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ ,  $a > 0$ ;  $a_n = \frac{n^7+n^5+3}{n^6+n^8+\cos(n)}$ ,  $a_n = (-1)^n \frac{1}{1+\ln(n)}$ ,  $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ ,  $a_n = \frac{1}{n^{n^n}}$ ,  $a_n = \frac{1}{((n!)!)!}$ ,  $a_n = \frac{1}{8+\ln(\ln n)}$ ,  $a_n = n \sin(\frac{1}{n^2})$ ,  $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ,  $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!-n!}$ ,  $a_n = \left(\frac{2a+1}{3-a}\right)^n$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ;  $a_n = \frac{n^2}{n^4-(\ln n)^{10}}$ ,  $a_n = \frac{2^n+n^{15}}{3^n+n^2}$ ,  $a_n = n^a \left(1 - \cos(\frac{1}{n^3})\right)$ ,  $a > 0$ ;  $a_n = \frac{3}{2^n} - 5 \frac{3^n}{4^n}$ ,  $a_n = \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2+1}$ ;  $a_n = \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 3964^n}$ ,  $a_n = \frac{n^2 \sin(n)+n+1}{n^4+6n+1}$ ,  $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+6}$ ,  $a_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{(x^2-8)^n}{n}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;  $a_n = \left(\frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+5)}\right)^{2+\sin(n)}$ ;  $a_n = \frac{(n^2+4)^3(3^n+n^2+1)^{16}}{n!+n}$ ;  $a_n = \frac{3^{n^2(1+\frac{1}{n})}}{3^{n^2}} \frac{1}{2^n}$ ;  $a_n = \frac{n^3 \sin(n^3)}{n^{\sqrt{17}}+1}$ ;  $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 10 \\ \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln n)} & \text{se } n > 10 \end{cases}$ ;  $a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$ ;  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{3}{n^3} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ .

5. Dire se la serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{13}{2^n} - \frac{5}{3^n}\right)$  è convergente e nel caso trovarne la somma. Dire se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge, e nel caso calcolarne la somma, ove  $a_n = \begin{cases} \frac{n}{3n+2} & \text{se } n \leq 4 \\ \frac{3^n}{4^n} & \text{se } n > 4 \end{cases}$ .

6. a) Provare che, per ogni  $k$  intero positivo, si ha

$$\sum_{n=1}^k \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2}.$$

b) Calcolare la somma della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ .

7\*. Provare che, se  $a_n$  è una successione positiva (cioè  $a_n > 0$ ) e decrescente, e inoltre converge la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n^2}$ , (cioè la serie  $a_1 + a_4 + a_9 + a_{16} + \dots$ ), allora converge anche la

serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{4\sqrt{n}}$ .