1. Per una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, siano date le seguenti quattro affermazioni:

(A) *Se* $x > 2$ *allora* $f(x) > 8$

(B) *Se* $x > 3$ *allora* $f(x) > 8$

(C) *Se* $x > 2$ *allora* $f(x) > 7$

(D) *Se* $x > 3$ *allora* $f(x) > 7$

Dire quali implicazioni ci sono tra (A), (B), (C), (D).

2. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)^{\sqrt{7}} - x^{\sqrt{6}} \ln(x^4 - 8);$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin\left(x^2-1\right)\left(2^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)^{-4}\right)}{\left((\sqrt{2})^{\frac{1}{x-1}} + \ln(x)\right)^2 (x-1)};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - \left(\sqrt[5]{x^2+\ln(x)}+1\right)^b}{x^a \ln(x^2+5) - x^a \ln(x^2+4)}$$

al variare dei numeri positivi a e b.

3. Calcolare la derivata della funzione g definita da

$$g(x) = (3x^2+1)^{\pi} e^{\ln(x^7+4)\cos\left(\frac{\sin(3x)}{x^6+2}\right) + \sqrt[7]{x}}.$$

4. Premessa: Dato $a \in \mathbf{R}$, diciamo che una funzione $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ ha la proprietà (B) se f è continua e crescente in $[a, +\infty[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e inoltre vale $\dfrac{f(x^3)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

a) Dare un esempio di una funzione con la proprietà (B).

b) Provare che se f ha la proprietà (B), allora $\dfrac{f(x^2)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.