Esercizi per Analisi I per Ingegneria

1. Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3-\sqrt{x}+4}\,dx;\quad \int_1^{+\infty} \frac{x^a}{x^6-x+\pi}\,dx,\ a\in\mathbf{R};\quad \int_1^{+\infty} \frac{x^7e^x}{5^x+x^2}\,dx;\quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(e^x)}{x^2+5}\,dx;$$

$$\int_1^{+\infty} \sin\big(\frac{1}{x}\big)\,dx;\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(\sin(x)+3)x^2}\,dx,\quad \int_0^{1} \frac{x^2}{\sin^3(x)}\,dx;\quad \int_0^{1} \frac{x^a}{\sin(x)\big(e^{x^2}-1\big)}\,dx,\ a\in\mathbf{R};$$

$$\int_0^{5} \frac{1}{e^x-e^2}\,dx;\quad \int_0^{5} \frac{x}{\sin(x)}\,dx;\quad \int_{-\infty}^{-2} x^3e^{x^3}\,dx;\quad \int_{-\infty}^{-2} x^3e^{-x^3}\,dx;\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+6}\,dx;\quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\ln\big(\ln(x)\big)}{x^2}\,dx.$$

2. Dire se i seguenti insiemi nel piano sono aperti, chiusi, limitati: $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y > \sin(x), x+y<2\}$; $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geq \sin(x), x+y<2\}$; $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geq\sin(x), x+y\leq 2\}$; $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geq\sin(x), x^2+y<2\}$; $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2\leq y\leq ax^2+3\}$, $a\in\mathbf{R}$.

3. Spiegare perché le seguenti funzioni f sono continue nel loro dominio: $f(x,y) = \ln\big(x^4+e^{xy}\big)$, $f(x,y)=\dfrac{x^2+e^{|x-y^2|}}{\sin(xy^4)+x-y}$, $f(x,y)=\ln\big(x^4+xye^{-xy\sin(x)}\big)$.

4. Determinare il dominio delle seguenti funzioni di due variabili: $f(x,y)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$; $f(x,y)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\ln(x-y^2-1)$; $f(x,y)=\ln\big((x-3y)(y-4)\big)\ln(x^4-6)\sqrt{10^{20}-x^2-y^2}$.

5. Dire per quali $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ vale la formula $x^4-y^2=2y(x^2-y)$.

6. Determinare le derivate parziali delle seguenti funzioni: $f(x,y) = \cos(x^2e^{x+7y})y^2$, $f(x,y)=\ln(3^{x+y})y^x$, $f(x,y,z)=\dfrac{xy+xz+y^2z^3}{x^4e^{yz}+1}$.

7. Risolvere le seguenti equazioni differenziali $y'(t)=ty(t)+t$; $y'(t)=8y(t)+t^7$; $y''(t)+4y'(t)+dy(t)=0$, $d\in\mathbf{R}$, $y''(t)-5y'(t)+4y(t)=e^{2t}$. Nell'ultima equazione risolvere il problema di Cauchy $y''(t)-5y'(t)+4y(t)=e^{2t}$, $y(0)=1, y'(0)=0$.

8. Provare per induzione che per ogni $n=1,2,3,...$ esiste un polinomio P_n di centesimo grado tale che la derivata ennesima della funzione f definita da $f(x)=x^{100}e^x$ è data da $P_n(x)e^x$.

I seguenti esercizi (dal 9 al 43) sono presi da compiti dati a biotecnologie.

9. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Bigg(\Big(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+1}\Big)^9+6\Bigg)\frac{-4\sin x\cos x}{(\sin^2 x+1)^2}\,dx\,.$$

10. Sia data la successione a_n definita da

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2+1} & \text{se } n < 4 \\ \dfrac{1}{4} & \text{se } n \geq 4\,. \end{cases}$$

Calcolare $\sum\limits_{n=1}^{40} a_n$.

11. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + x^5}{x^{\sqrt{26}} + \sin(x^3)}\,.$$

12) Calcolare l'integrale

$$\int_{e^{\pi}}^{e^{2\pi}} \sin(3\ln(x))\frac{1}{x}\,dx\,.$$

13) Sia f la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = (e^{6x} - 8e^{5x})(x-10).$$

a) Risolvere la disequazione

$$f(x) < 0\,.$$

b) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Determinare i punti di massimo relativo di g.
c) Determinare una funzione g da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

14) Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2e)^x}{x^8 + \cos(7x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(2e)^{x+2\sin x}}{x^8 + \cos(7x)}.$$

15) Sia f la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da $f(x) = \frac{2}{7}x^8 e^{x^3} + 4$. Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 2 \\ 14 & \text{se } x = 2\,. \end{cases}$$

a) Calcolare, se esistono, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
b) Dire se 2 è un punto di massimo relativo o di minimo relativo per g.

16) Sia u una funzione da $[\pi, 2\pi]$ in $\mathbf{R}$, e sia v una funzione strettamente crescente da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Sia $w : [\pi, 2\pi] \to \mathbf{R}$ la funzione composta $v \circ u$ cioè $w(x) = v\big(u(x)\big)$.

a) Provare che se x_0 è un punto di minimo assoluto per u, allora x_0 è anche un punto di minimo assoluto per w.
b) Dire se vale il viceversa, cioè se ogni x_0 punto di minimo assoluto per w è anche un punto di minimo assoluto per u.

17) Sia f la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le -2 \\ x^4 - 17 & \text{se } x > -2 \,. \end{cases}$$

a) Disegnare un grafico (approssimato) di f
b) Dire per quali numeri reali x si ha $f(x) = 1$.

18) a) Calcolare

$$2\Big(\big(\sqrt[3]{3}\big)^{\sqrt{3}}\Big)^{\sqrt{3}} + 3.$$

b) Provare che esistono due numeri irrazionali positivi a e b tali che a^b è razionale. Ricordiamo che $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{3}$ sono entrambi numeri irrazionali

19. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = 3x\cos(x) + x^4 \frac{\ln\left(x^6 + e^{x\sin(x)}\right)}{x^2+1} + 2\,.$$

a) Trovare una costante c reale tale che il grafico della funzione g definita da $g = f + c$ (ossia $g(x) = f(x) + c$) passi per l'origine.
b) Provare che esiste un numero naturale $\overline{n}$ tale che se n è un numero naturale e $n > \overline{n}$ allora

$$g\Big(\frac{1}{n} + \frac{10}{n^{30}}\Big) < g\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{29}}\Big)\,.$$

20) a) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = x^3\cos(x)\Big(\sqrt{x^4 - 1000} + x\Big)\,.$$

b) Determinare un intervallo della forma (a, b) con a e b numeri reali e $a < b$, su cui f è negativa.

21) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \ln\Big(2x + \sqrt{x^2+6}\Big)\sin\Big(\frac{x^2}{x^2+5}\Big)\,.$$

Dire se esiste un numero reale x tale che $f(x) > 350$.

22) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(x\sqrt{x}\sqrt[9]{x}\ln x + \cos(\cos x)\sin x\Big)\,dx\,.$$

23. Trovare il dominio della funzione γ definita da

$$\gamma(x) = \cos(x)\sqrt{\Big((5-x^2)^8 - 1\Big)}\;\;\ln(30x^3 - 5x^4)\,.$$

24) Siano f e g definite da $\quad f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = 8 - x^4\,.$
Calcolare l'area della zona A compresa tra il grafico di f e il grafico di g, in altre parole A è definita da

$$A = \Big\{(x,y) : f(x) \le y \le g(x)\Big\}\,.$$

25) Sia f definita da $f(x) = x^6(3-5x)^{11}$. Sia g la funzione definita da
$g(x) = (\sin x)\ln\Big(\big(f(x)\big)^2 + 3\Big)$. Calcolare la derivata di g. Dire inoltre se esiste il limite

$$\lim_{x\to 1000} \frac{g(x) - g(1000)}{x - 1000}\,.$$

Nota. Come detto *non* è richiesto calcolare il limite dato se questo esiste.

26. Sia α la funzione definita da

$$\alpha(x) = x^3\Big(x^{11} + \frac{2}{x^4}\Big) - 5\frac{(x^5+7)^3}{(x^5+7)^{\sqrt{2}}}\,x^4\,.$$

a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \alpha(x)\,dx\,.$$

b) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x)\,.$

27) Sia w una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che ha un unico punto $\overline{x}$ di minimo assoluto. Quindi $w(\overline{x}) < w(x)$ se $x \ne \overline{x}$.
a) Provare che esiste un numero reale a tale che l'equazione $\quad w(x) = a \quad$ non ha soluzioni (ossia la relazione $w(x) = a$ non è verificata per nessun numero reale x).
b) Provare che esiste un numero reale a tale che l'equazione $\quad w(x) = a \quad$ ha almeno due soluzioni.

28) Risolvere la disequazione

$$-\frac{x+7}{(x+3)(1-\frac{2}{x+9})} > 6$$

precisando se il valore $x = 9^{14}$ risolve la disequazione data.

29) Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che si abbia

$$\frac{\left(\sqrt{1+3\sqrt{x}}\right)^4 - 6\sqrt{x}}{81x^2-1} = \frac{1}{ax-1}$$

(ovviamente per i numeri reali x per cui le espressioni nella formula precedente sono definite. **Non** è richiesto determinare tali x).

30) Sia f la funzione definita da $f(x) = (x+8)\sin x$. Determinare l'integrale indefinito $\displaystyle\int f'(x)\ln(x+8)\,dx$.

31) Sia g la funzione definita da $g(x) = \frac{\ln\left(x^9+2x^7+3x\right)}{x^2-9}$.
a) Determinare il dominio di g.
b) Determinare il dominio della funzione $\frac{\ln\left(x^9+2x^7+3\sin x\right)}{x^2-9}$

32) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{\cos x}-1}}\big(2\sqrt{\cos x}-1\big)\sin x\,dx$.

33) Calcolare, se esistono, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, ove $f(x) = \frac{2^x}{10^x+\sin(x)}$, $g(x) = \frac{2^{x^2}}{10^x+1}$.

34) Sia g la funzione definita da $g(x) = e^{x^3+x-\sin x}$.
a) Dire se g è crescente su $\mathbf{R}$.
b) Dire per quali $\beta > 0$ la funzione definita da

$$g(x) = e^{x^3+x-\beta\sin x}$$

è crescente su $\mathbf{R}$.
c) Dire se il grafico di g interseca la retta di equazione $y = 20$.

35) Risolvere l'equazione $\sin\left(\dfrac{x^4}{8x^4+4x^2e^x+3}\right) = 0$.

36) Calcolare la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = e^{e^{7x}}\sin(x^2+2x)\cos\Big(x^7\ln(x+2)\Big).$$

provando in particolare che $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.

37) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int\left(\Big(\ln(x)+12\Big)^{80}\frac{1}{x} + \sqrt{x^5+4x^3+4x}\right)dx$$

b) Dire quante primitive h della funzione g definita da $g(x) = \cos(x^2)e^{-x^2}$ soddisfano $h(6) = 2$. Si consiglia di non calcolare esplicitamente le primitive date.

38) a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{(1-\ln x)^2}{1+\sqrt{\ln x}}\frac{5}{x}dx\,.$$

b) Determinare il dominio della funzione β definita da $\beta(x) = \ln\Big(\dfrac{1-\ln x}{\ln(x^2-2)}\Big)$.

39) Sia α la funzione definita da $\alpha(x) = (x+1)(7-\sqrt[3]{1-2x})$.
a) Risolvere la disequazione $\alpha(x) < 0$.
b) Sia $\gamma(x) = 3 - x - 2^x$. Provare che γ è strettamente decrescente e calcolare $\gamma(2)$ e $\gamma(3)$.
c) Risolvere la disequazione $\alpha(x)\Big(\gamma(\dfrac{1}{x^5+7}) + 3\Big) < 0\,.$

40) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \sqrt{e^{\frac{5}{3}\ln(\sin(x))}}\cos x\,dx\,.$

41) a) Determinare i punti di massimo relativo e di minimo relativo della funzione f definita da $f(x) = 8x - \ln\Big(e^{10x+2}+3\Big)$.

42. Trovare una funzione h tale che $h'(x) = 9x^8\arctan(x^9)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e inoltre $h(0) = 8$.

43) a) Determinare tre numeri interi m, n e p tali che

$$\sqrt[3]{9}(5+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}) = m + n\sqrt[3]{3} + p\sqrt[3]{9}$$

b) Sia $K = \displaystyle\sum_{n=25}^{90}\Big(\ln(4+n\sqrt{2})\Big)$. Dire per quanti numeri interi p il numero $e^K - p\sqrt{2}$ è un numero intero.

*I seguenti esercizi sono tratti da problemi dati al terzo anno di matematica. Ne ho selezionati alcuni, in particolare ho tolto in linea di massima quelli troppo difficili anche se teoricamente fattibili in base alle cose viste. Ho segnato con * alcuni esercizi che ritengo piú difficili, ho segnato con ** uno che ritengo ancora piú difficile, e con *(*) quelli che per me erano intermedi tra * e **.*

44) a) Provare che esiste $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$, $\dfrac{f|_{\mathbf{Q}}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, ma f non è derivabile in 0.
b)* Se nelle ipotesi di a) assumiamo inoltre che f è continua, possiamo concludere che f è derivabile in 0?
c) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ se x è il reciproco di un intero positivo dispari, $f(x) = x$ se x è il reciproco di un intero positivo pari. Provare che f non ha derivata destra in 0.

d)** Provare che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è Lipshitziana (ossia esiste $K > 0$ tale che $|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$ per tutti i numeri reali x e x'), $f(0) = 0$, e inoltre per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = ax$ ha al massimo un numero finito di soluzioni in $]0, +\infty[$ allora f ha derivata destra in 0.

45) Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sin(x) \leq y \leq \sin(2x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Provare che per ogni $\alpha > 1$ l'insieme $B_\alpha = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^\alpha < y < \sin(x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{15}\right\}$ è non vuoto, ma per qualche $\alpha > 0$ tale insieme è vuoto.

46) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - y(t) = t^2$

47) Calcolare l'integrale indefinito $\int (x^3 + x) \sin(x^2 + 1)\, dx$.

48) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

49) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^4}{y(t)} \\ y(0) = -2 \end{cases}.$$

50) Diciamo che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ha la proprietà (A) se f è continua in $\mathbf{R}$, e inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ esistono x_1 e x_2 con $x_1 < x < x_2$ tali che $f(x_1) < f(x)$ e $f(x_2) < f(x)$.
a) Determinare f con la proprietà (A) che ammette massimo assoluto su $\mathbf{R}$.
b) Provare che se ogni f con la proprietà (A) ammette almeno un massimo relativo su $\mathbf{R}$.

51) Provare che se f è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora dato un intervallo (a, b) con $a < b$ esistono c, d con $a < c < d < b$ tale che f è monotona in (c, d).

52) Sia u_α la funzione definita da $u_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Provare che u_α è di classe C^1 su $\mathbf{R}$ se $\alpha > 1$.

53) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(t) - 9y'(t) + 14y(t) = t$ che soddisfano le condizioni $y(0) = y'(0)$, $\big(y(0)\big)^2 + \big(y'(0)\big)^2 = 1$.

54) Sia $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$.
a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int f(t)\, dt$.
b) Provare che per ogni $a > 0$ l'equazione $f(x) = a$ ha al massimo due soluzioni in $]0, +\infty[$.

55) Diciamo che f ha la proprietà (P) se f è una funzione continua da $[0, 1]$ in $\mathbf{R}$ tale che f è strettamente decrescente, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

a) Dare un esempio di f con la proprietà (P).
b) Provare che se f ha la proprietà (P), allora per ogni $\alpha > 0$ esiste un unico $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = x^\alpha$.

56) a) Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = \ln(x^2 - 1) + x$.
b) Provare che se f è una funzione continua, periodica di periodo 1, non costante e positiva da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora la funzione g definita da $g(x) = xf(x)$ non è crescente su $\mathbf{R}$.

57) a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(t) = (y(t))^6 \sin t$.
b) Data l'equazione differenziale $y'(t) = (y(t))^5 - 5(y(t))^3 + 4y(t)$, determinarne le soluzioni costanti;

58)a) Determinare gli estremi relativi su $\mathbf{R}$ delle funzioni α e β definite da $\alpha(x) = x^3 - x$ e $\beta(x) = |x^3 - x|$.
b) Provare che esistono due numeri reali b_1 e b_2 tali che l'equazione $x^9 - \sin x = b_1$ ha un'unica soluzione reale, mentre l'equazione $x^9 - \sin x = b_2$ ha almeno due soluzioni reali.

59) Diciamo che una successione a_n è di tipo Y se $a_n > 0$ per ogni n e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
a) Trovare tre successioni a_n, b_n e c_n, tutte di tipo Y, tali che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
b) Provare che se a_n è di tipo Y, e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbf{R}}$, allora $l \in \{0, 1, +\infty\}$.
c)*(*) Esistono successioni di tipo Y che non hanno limite né finito, né infinito?

60) Provare che il problema di Cauchy P_a

$$\begin{cases} (y'(t))^2 + 2y'(t) = y(t) \\ y(0) = -10. \end{cases}$$

non ha alcuna soluzione.

61) a) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 5x)e^{x+\sin(x)}$.
b) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \sin(te^t)(e^t + te^t)\, dt$.

62) a) Determinare $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3(e^x - 1)}{x^\alpha \cos(x)}$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.
b) Sia f una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ la cui derivata ha solo un numero finito di zeri, tale che $f(0) = f(3) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x \in (0,3)[$ e inoltre f che ha un unico punto di massimo relativo in $(0,3)$. Provare che per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = a$ ha al massimo due soluzioni in $(0,3)$.

63) * Trovare una successione (a_n), tale che $a_{kn} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ per ogni $k = 2,3,4,....$ ma non è vero che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

64) a) Calcolare l'integrale $\int x \arctan(x^2)\, dx$.

b) Provare che se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua che assume sia valori positivi sia valori negativi, allora esistono numeri reali a e b con $a < b$ tali che $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

65) Dire per quali interi positivi n la funzione β definita da $\beta(x) = x^n + e^x$ è crescente su tutto $\mathbf{R}$.

66) Risolvere l' equazione differenziale $\sqrt{y'(t) + y(t)} = e^{2t} - 6e^t$.

67) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y'(t)y(t)}{y(t)^2+1} = t^2 \\ y(0) = c \end{cases}$$

al variare di c.

68) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione s di classe C^1, tale che inoltre
i) $f(x) = 0$ se x è un intero pari
ii) $f'(x) > 0$ se $x \in (n, n+1)$ con n intero pari
iii) $f'(x) < 0$ se $x \in (n, n+1)$ con n intero dispari.
Provare che per ogni $z > 0$ l'equazione $f(x) = z$ ha al massimo un numero finito di soluzioni su un fissato intervallo limitato della forma $[a, b]$.

69) Sia f la funzione definita da $f(x) = 5^x - 40 \cdot 3^x$.
a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.
b) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\big(f(x) + 39\big)}{x + \sin x}$.
c) Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che esiste finito $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\Big(f\big(\frac{1}{x}\big) + 39 - a\frac{1}{x}\Big)$.

70) Sia data una funzione $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ continua e tale che $g(x) > 0$ per ogni $x \in [0, +\infty[$. Supponiamo inoltre che l'integrale improprio di g su $[0, +\infty)$ sia convergente, ossia esiste finito

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b g(x)\,dx\,.$$

a) Provare che la successione $a_n = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx - \int_0^n g(x)\,dx$ è convergente.

b) Provare che la successione $b_n = \int_{n^2}^{2n^2} g(x)\,dx$ è convergente.