

1. Determinare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{f(x)}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^\alpha}{f(x)}$, $\alpha \in \mathbf{N}$, quando f è una delle seguenti funzioni: $f(x) = \ln(1-8x^2) - \cos(4x) + 1$, $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$, $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)$, $f(x) = \sin(x \sin(e^x - 1)) - x^2$.

2. Calcolare la derivata della funzione f definita da $f(x) = |x^2 + |3x - 1||$.

3. Calcolare la derivata delle funzioni f definite da $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, $f(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{-t^2} dt$,

$$f(x) = \int_x^{\sin(x)} e^{-t^2} dt.$$

4. Dire per quali numeri reali a la funzione f definita da $f(x) = |\sin(x) - ax|$ è derivabile in 0. Provare inoltre che se $|a| \geq 1$ f è derivabile in tutti i punti $x \neq 0$.

5. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(1, 1)$, quando $f(x) = x^6$, $f(x) = \frac{1}{\cos(1)} \cos(x)$, $f(x) = e^{x^2} - e^2 + \ln(x) + x$.

6. Provare che $e^x \geq 1 + x$ e che $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ per ogni numero reale x .

7. Calcolare i seguenti integrali indefiniti $\int \frac{t}{t^2 + 2t + 5} dt$, $\int \frac{5t - 2}{t^2 + 2t - 3} dt$, $\int \frac{t}{t^3 + 1} dt$, $\int \frac{t^5}{t^6 - 3t^3 + 1} dt$, $\int \frac{1}{t(\ln^4(t) + 1)} dt$, $\int \sqrt{t^2 - 5t + 6} dt$.

8.* (Già iniziato in classe). Dopo avere calcolato gli integrali $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$, notando che $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$, e, integrando per parti, $J_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} J_n$, e dopo avere notato che J_n è una successione decrescente, provare che la successione

$$\left(\frac{2}{1}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{11}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{13}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{15}, \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{17}, \dots \right)$$

tende a $\frac{\pi}{2}$.

9.* Provare che π è irrazionale. Suggerimento: Supponiamo per assurdo $\pi = \frac{p}{q}$ con p e q interi positivi, e scriviamo

$$A_n := \int_0^\pi \frac{x^n (p - qx)^n}{n!} \sin(x) dx.$$

Provare che $A_n > 0$, A_n è un numero intero (questa è la parte più delicata), e $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, e arrivare a una contraddizione.

Gli esercizi che seguono sono presi da quelli che ho dato in passato nei corsi tenuti a biotecnologie. Sono su vari argomenti e di varia difficoltà. Alcuni sono molto facili, altri chiaramente difficili, altri di livello intermedio. Ho evitato di mettere esercizi molto facili dal 30 in poi.

10. a) Sia g una funzione tale che $g'(x) = \sin(x^7) \cos(x)$. Calcolare la derivata della funzione h definita da $h(x) = g(x^3)$.

b) Trovare gli intervalli di crescita e decrescita della funzione α definita da $\alpha(x) = (x^2 + 4x + 700)^{\sqrt{2}}$.

11. Provare che la successione a_n definita da $a_n = \ln(\sin(n) + 7)e^{\sin n}$ è limitata.

12) a) Calcolare l'integrale definito $\int_1^3 \left(2 + \frac{x^{\sqrt{5}\sqrt{10}}}{x^{5\sqrt{2}}}\right) dx$ mostrando che il risultato è un numero intero.

b) Calcolare $\int (e^{6x} \ln(e^{6x} + 1)) dx$.

13) Sia f la funzione definita da $f(x) = 3^{5 \cdot 2^x + 2} - 81$.

a) Calcolare la derivata della funzione g definita da $g(x) = x^3 f(x)$.

b) Risolvere la disequazione $f(x) < 0$.

c) Risolvere la disequazione $f(x)\sqrt{7-x^2} < 2f(x)$.

14) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(\sqrt{x} \left(\sqrt[3]{x} + 1 \right)^2 + x\sqrt{3x+1} \right) dx$.

15) Calcolare il dominio e la derivata della funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt[4]{7 - \sqrt{2x+6}} \ln \left(- (5x-2)(x^2-3) \right).$$

16) Posto $f(x) = \frac{1}{2} |\sin x| + \frac{1}{3} |\cos x|$, provare che $f(x) \geq \frac{1}{8}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

17) Calcolare, per un opportuno numero reale $a \neq 0$, l'integrale indefinito

$$\int (7x^2 + 1) \cos(ax^3 + x) dx.$$

18) Sia α la funzione definita da

$$\alpha(x) = \frac{\frac{x^2}{3+x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x+2} \frac{2}{x^5} + 1}.$$

a) Scrivere α come quoziente di due polinomi.

b) Calcolare la derivata della funzione β definita da $\beta(x) = \alpha(x) \cos \left(x^2 \sin \left(\frac{1}{\ln(x)} \right) - 3 \right)$.

19) a) Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \frac{x^3 - x^5}{x^3 - x^2} dx \quad \text{e} \quad \int \frac{x}{(3x^2 + 1)^2} (x^3 + x) dx.$$

b) Posto $F(x) = \int_3^x (7 - \cos(t^2)) dt$, provare che $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

20) a) Sia f la funzione definita da $f(x) = 3x^2 e^x + 2e^x$. Dire se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = 100$ e se esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) = -1$.

b) Provare che per ogni funzione $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ esiste un numero reale a tale che l'equazione

$$u(f(x)) = a$$

nell'incognita x ha almeno due soluzioni distinte.

21) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \sqrt[n]{n!} - n^2 + \cos(n)$.

22) Sia α la funzione data da $\alpha(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x \sqrt[3]{x} + x}$. Calcolare l'integrale definito $\int_1^{16} \alpha(x) dx$

e l'integrale indefinito $\int \alpha(x^2 + 7) x dx$.

23) a) Determinare il dominio e gli intervalli di crescita e decrescita della funzione f definita da $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}} + 4$.

b) Sia g la funzione definita da $g(x) = \ln(f(x) + x^3 \cos(x))$. Calcolare la derivata di g .

24) Date le disequazioni (D_1) e (D_2)

$$-(x-4)(x-5) \leq 0 \quad (D_1)$$

$$-(x-4)(x-5) + 6^x u(x) \leq 0 \quad (D_2)$$

ove $u(x) = 30 + \sin\left(\frac{-x^4 + \cos(x^2 + x)}{2 + x^4}\right)$.

Dire se tutte le x che risolvono (D_1) risolvono anche (D_2) e dire se tutte le x che risolvono (D_2) risolvono anche (D_1) .

25) Sia α la funzione data da

$$\alpha(x) = \left(\frac{(3(x+2))^6}{3^4(x+2)^5} \right)^2.$$

Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 \alpha(x) dx$ e l'integrale indefinito $\int \cos\left(\frac{\alpha(x)}{\pi}\right) \alpha'(x) dx$.

26) a) Sia s una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ periodica di periodo 1. Provare che la funzione r definita da $r(x) = s\left(\frac{x}{5}\right)$ è periodica. Ricordo che una funzione f si dice periodica se esiste

un numero reale $a > 0$ tale che $f(x+a) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. In tal caso si dice che a è un periodo di f .

b) Provare che se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(2x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora f è costante.

27) a) Calcolare $\sum_{n=0}^{107} 5 \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2^n}$. Si suggerisce di tenere conto della formula $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$, valida per ogni numero naturale k e per ogni $x \neq 1$.

b) Sia a_n una successione tale che $a_{n+3} = a_n$ per ogni numero intero positivo n . Provare che la successione b_n definita da

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

è convergente (ricordo che convergente significa che ha un limite che è un numero reale).

28) Provare che se g è una funzione da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$, derivabile in 0, tale che $x^2 \leq g(x) \leq x^2 + |x|$ per ogni numero reale x , allora $g'(0) = 0$.

29) FACILE

a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{(\sqrt{x}(x+2))^2}{2x+4} dx$.

b) Calcolare l'integrale definito $\int_2^3 \frac{x^2(\sqrt{x}+1)^5}{(-\sqrt{x}-1)^4} dx$.

c) Calcolare l'integrale definito $\int_1^4 \left(\sqrt{\sqrt{x}+1} \sqrt{\sqrt{x}-1} + \sqrt{x} \right) dx$.

d) Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 \sqrt{x^2+1} \sqrt{x^2+1} \frac{\sqrt{2x^2+5}}{\sqrt{4x^2+10}} dx$.

e) Calcolare l'integrale definito $\int_1^3 \left(\frac{x^{x^2+2}}{x^{x+1}} (x^{1-x})^x + \sqrt{x^\pi} \right) dx$

f) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(\left(\frac{x}{x^3+1} \right)^{\sqrt{5}-1} \left(\frac{x^3+1}{x} \right)^{\sqrt{5}} + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

g) Calcolare l'integrale definito $\int_1^2 \left(\frac{x^{1+\sqrt{2}} + x^{\sqrt{2}}}{2+2x} \right) dx$.

30) a) Dire per quali numeri reali a si ha $\int_{\frac{1}{\pi}}^a \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx = 1$.

b) Provare che per ogni numero reale b esiste al massimo un numero finito di numeri reali $a \geq 10^{-7}$ tali che $\int_{\frac{1}{\pi}}^a \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx = b$.

31) Provare che, per ogni k intero positivo, si ha

$$\sum_{n=1}^k \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{k+1}{(k+2)^2}.$$

32) Sia s definita da

$$s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-7, 7] \\ 49 & \text{se } x \notin [-7, 7]. \end{cases}$$

Risolvere la disequazione $s(5-x) < 10$.

33) Siano $f(x) = \sin\left(\frac{\sin(x^3 \cos(x) + 7)}{x^2 + 1}\right)$, $g(x) = x^7 - x^{15} - x$.

a) Dire se $g(50 + 10^{1000}) > g(10^{1000})$.

b) Provare che esiste un numero reale b tale che se $x > b$ allora $f(x) \neq \frac{1}{10}$. Provare che, dato $a \neq 0$, esiste un numero reale b tale che se $x > b$ allora $f(x) \neq a$.

34) Determinare una funzione f tale che $\sin(x)f'(x) = 6\cos(x) - 3f'(x)$.

35) Siano $\alpha(x) = x^3 + 5^x$, $u(x) = 2(8x-1)^7 + x^4(1-8x)^7$. Risolvere le disequazioni

$$u(x) \leq 0; \quad \alpha(x+2)u(x) \leq \alpha(x)u(x); \quad u(x) \int_3^x e^{-t^2} dt \leq 0.$$

36) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(-\cos\left(\frac{1}{x} + x\right) + \cos\left(\frac{1}{x} + x\right)\frac{1}{x^2} \right) dx$.

37) Sia u la funzione definita da $u(x) = \frac{(x^3 + 6x^2 + x)^3}{(x^2 + 6x + 1)^2}$. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(u(x) + (\ln(x) + \cos(x))^6 \left(-\sin(x) + \frac{1}{x} \right) \right) dx$$

e l'integrale indefinito

$$\int \left(u(x) \frac{1}{1+x^2} + u'(x) \arctan(x) \right) dx.$$

38) Sia α la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^7 - x^2 + 3x & \text{se } x \leq 2 \\ \ln(e^x - x + x^3) & \text{se } x > 2 \end{cases}.$$

a) Calcolare, se esistono, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} \alpha(x)$.

b) Dire se la funzione α è derivabile in 2.

c) Determinare $b \in \mathbf{R}$ tale che l'equazione $\alpha(x) = b$ ha almeno due soluzioni.

39) Calcolare l'integrale indefinito $\int x(8(x^2+1)^7 \ln(x^2+1) + (x^2+1)^7) dx$.

40) Sia r una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $r(0) = 0$, $r(1) = 18\pi$. Poniamo $s(x) = \sin(r(x))$.

a) Provare che esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $s'(x) = 0$.

b) Provare che esiste $x \in \mathbf{R}$ tale che $s'(x) \geq 1$.

41) Risolvere le disequazioni

$$\left(\left(\frac{13}{5 - \frac{x}{x+1}} \right)^4 - 81 \right) (x^{19} - 2) \leq 0; \quad \left(\frac{13}{5 - \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+1}} \right)^4 < 81.$$

42) Dire per quali numeri reali b la successione a_n definita (per $n = 1, 2, 3, \dots$) da $a_n = \frac{(1 + 2b^2)^{2-3n}}{7^{2-3n}}$ è crescente.

43) Siano $\alpha(x) = \ln((1 - 5^x)(2x - 11))$ e $\beta(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$. Determinare il dominio della funzione $\alpha(x) + \sqrt{\beta(x)}$.

44) Calcolare l'integrale indefinito $\int \cos(8 \cos^2(x) + 7 \sin^2(x)) \sin(x) \cos(x) dx$.

45) Sia $g(x) = 2e^{3x^2} + 3e^{2x^2} - 2e^{x^2}$. Risolvere la disequazione $-x^7 g(x) < -2x^3 g(x)$.

46) a) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^2} \frac{\sqrt[7]{8+x}}{\sqrt[7]{x}} \right) dx$

b) Provare che esiste un numero $x > 0$ tale che $\int_{-x}^x (e^{t^2} - 2) dt = 0$.

47) a) Risolvere la disequazione $(7x + 1)^{2560} - x^{1280} < 0$.

b) Determinare un intervallo (a, b) con a e b numeri reali e $a < b$ tali che la disequazione $(7x + 1)^{2560} < x^{1280} + x^{26}$ è verificata da tutti gli $x \in (a, b)$.

48) Calcolare l'integrale indefinito $\int e^{x^2} e^{x^4} (2x^3 + x) dx$.

49) Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x\sqrt{x^4 - 16}}{\sqrt[3]{2x^2 + 8}\sqrt[6]{x^2 + 4}} dx$.

50) Risolvere la disequazione $3^{x+5}(2x - 6) < 5^{2x+1}(3x - 9)$.

51) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \left((\sqrt{2} + 1)^{x^2+1} (\sqrt{2} - 1)^{x^2-1} x^2 \right) dx$$

e l'integrale indefinito $\int (\ln(\sin(x)) + \ln(x))(\sin(x) + x \cos(x)) dx$.

52) a) Determinare gli intervalli di crescita e decrescenza della funzione β definita da $\beta(x) = 7(3x + 1)^{\sqrt{2}+1} - (3x + 1)^{2\sqrt{2}+1}$.. Sia $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

- b) Provare che $g(x) + g(x+1) < 2$ per ogni $x > 0$.
 c) Provare che $g(x) + g(x^2) < 2$ per ogni $x > 0$.

53) a) Provare che per ogni $a > 0$ la funzione α definita da

$$\alpha(x) = ax^6 - x^{10}$$

non è strettamente crescente in $\mathbf{R}$.

b) Provare che per ogni $a > 0$ la funzione β definita da

$$\beta(x) = a(x^{10} + 5x^4) - e^x$$

non è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, ma che esiste $a > 0$ tale che la funzione β definita prima è strettamente crescente in $[3^{90}, 3^{99}]$.

54) Calcolare l'integrale indefinito $\int \left((\pi + 1)x^\pi + (\pi - 1)x^{\pi-2} \right) \arctan(x) dx$.

55) a) Determinare due funzioni u e v da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad v(x) - u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ma non è vero che $\ln(v(x)) - \ln(u(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

b) Provare che, se u e v sono due funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad v(x) - u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

e s è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e inoltre $s'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3$, allora

$$s(v(x)) - s(u(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

56) a) Sia $f(x) = 1$ se $x \leq 8$, $f(x) = 2$ se $x > 8$. Determinare una successione a_n tale che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 8$, ma non è vero che $f(a_n) + 5a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(8) + 5 \times 8$.

b) Provare che, se f è una funzione crescente da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e $l \in \mathbf{R}$, e $f(a_n) + 5a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l) + 5l$, allora $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

57) a) Provare che se ϕ è una funzione definita su $\mathbf{R}$ tale che $\phi(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e inoltre ϕ è strettamente decrescente in $(-\infty, 5]$ e strettamente crescente in $[5, +\infty)$, allora per ogni numero reale a l'equazione $\beta(\phi(x)) = a$ ha al massimo un numero finito di soluzioni, ove $\beta(x) = x^5 + \frac{1}{x}$.

b) Risolvere la disequazione $\left(\ln \left(x - \frac{1}{x} \right) - 3 \right) (x - 7) < 0$.

58) Poniamo $g(x) = \begin{cases} x^4 - 4x + 8 & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(x) + 3\sin(x^2) & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Determinare un numero b tale che $g(x) \neq b$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

59) Calcolare l'integrale indefinito $\int (2x \sin(x) + x^2 \cos(x)) \ln(x) dx$.

60) a) Determinare il dominio della funzione g_5 definita da $g_5(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{2^x - 8}{2^x - 16}} - 5 \right)$.

Provare inoltre che per ogni $a > 0$, posto $g_a(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{2^x - 8}{2^x - 16}} - a \right)$, il dominio di g_a è non vuoto, ossia esiste almeno un numero reale x tale che $g_a(x)$ è definita.

b) Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x)) - (\ln(x))^2$.

61) Calcolare l'integrale indefinito $\int \sin(\ln(x)) \frac{\ln(3^{x^x})}{\ln(7^{x^{x+1}})} dx$.

62) a) Risolvere la disequazione $x^8(x+2) < x^7(5x+1)$.

b) Trovare il dominio della funzione g definita da

$$g(x) = \frac{\ln(x^8(x+2) - x^7(5x+1))}{\alpha(x)}$$

ove $\alpha(x) = \begin{cases} x^2 - 10^{16} & \text{se } x > 10 \\ (x-3)(x-15)\sin(x) & \text{se } x \leq 10. \end{cases}$

c) Dire se esiste un numero reale a tale che la disequazione $x^8(x+2) < x^7(5x+1) + a$ è sempre verificata (ossia vale per ogni numero reale x).

63) Determinare un numero reale $x > 0$ tale che $\int_0^x t \cos(t^2 + 1) dt = 0$.

64) a) Siano $\alpha(x) = x(3x+1)^7$, $\beta(x) = (3x+1)^6$. Risolvere le disequazioni $\alpha(x) < \beta(x)$, $\ln(\alpha(x)) < \ln(\beta(x))$.

b) Provare che la funzione α è inferiormente limitata.

c) Provare che esiste un numero reale c tale che le disequazioni

$$\alpha(x) < \beta(x) \quad \text{e} \quad \ln(\alpha(x) + c) < \ln(\beta(x) + c)$$

hanno le stesse soluzioni.

65) Calcolare gli integrali indefinito $\int \ln(x+3) \frac{x}{x+3} dx$.

66) a) Determinare i punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo della funzione g definita da $g(x) = (x^2 + 1)^5 e^{3x}$.

b) Provare che la funzione h definita da $h(x) = e^{2-7\cos^2(x)} + \frac{1}{x^8+1}$ non ha minimo assoluto su $\mathbf{R}$.

67) Sia $f(x) = (2x - \frac{1}{2x})^{111} - (2x - \frac{1}{2x})^{106}$,

a) Dire in quali intervalli f è decrescente.

b) Determinare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

68) Sia $u(x) = e^x + e^{\frac{4}{x}}$.

a) Provare che l'equazione $u(x) = \frac{3}{2}$ non ha soluzioni positive.

b) Provare che esiste $b > 0$ tale che l'equazione $u(x) = b$ ha almeno due soluzioni positive.

c) Provare che l'equazione $u(x) = b$ non ha soluzioni positive se $b < e^2$, e invece ha almeno due soluzioni positive se $b > 2e^2$.

Nota: Ovviamente per soluzione positiva dell'equazione $u(x) = b$ intendiamo un numero $x > 0$ che risolve tale equazione.

69) Provare che se f è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $f(x) \geq 9$ se $x \geq 5$, allora esiste un numero reale b tale che l'equazione $f\left(x^2(1 + \cos(x))\right) = b$ non ha soluzioni reali.

70) Provare che esiste $a > 100$ tale che $\int_a^{a^6} e^{\sin(x)} \cos(x) dx = 0$.

71) Data la disequazione

$$(x - 3) \sin(x^4 - 3x + 1) < 0 \quad (D)$$

provare che per ogni numero reale b esiste $x > b$ che risolve (D) ed esiste $x' > b$ che non risolve (D).

72) Calcolare l'integrale indefinito $\int x^{7x} D(x \ln(x)) dx$

73) a) Determinare il dominio della funzione

$$\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}} \sin(x) + \ln\left(\left((3x^2 - 1)^4 - 2\right)(x - 7)\right).$$

b) Dire se esiste un numero reale a tale che sia vuoto il dominio della funzione

$$\sqrt{-\frac{(x-a)(x-2)}{(x-3)}} \sin(x) + \ln\left(\left((3x^2 - 1)^4 - 2\right)(x^2 - e^x - 17)\right).$$

74) Calcolare l'integrale indefinito $\int (x^2 - 3x)^{19\pi} (4x - 6) dx$, $\int (x^2 - 3x)^{19\pi} (2x - 3)^3 dx$.

75) Determinare una funzione continua $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$\int_x^{x+1} g(t) dt = (x + 1) \sin(x + 1) - x \sin(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

76) a) Trovare gli intervalli di crescita e decrescenza della funzione α definita da $\alpha(x) = \sqrt{e^{2x} - 5e^x + 4}$.

b) Dire per quali numeri reali a la funzione $\sqrt{e^{2x} + ae^x + 4} + \sqrt[3]{x}$ è definita in tutto $\mathbf{R}$.

c) Determinare una funzione continua $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $x \cos(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 5$.

77) Sia $u(x) = \frac{3^x}{2^x + \sin^2(x)}$. Provare che la disuguaglianza $u(x+1) > u(x)$ vale per tutti gli $x > 100$, ma comunque scelto $a \in \mathbf{R}$, non è vero che vale in tutto l'intervallo $(-\infty, a)$.

78) Calcolare l'integrale indefinito $\int (\ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x - 1))(e^x + 1)e^x dx$.

79) Siano

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{3 + x \sin x}\right) \ln(x^8 + e^x x^6),$$

$$v(x) = (x^2 + 2x + 2)^\pi e^{-x}, \quad u(x) = (x^2 + 2x + 2)^\pi (x + 1).$$

a) Determinare i punti di massimo relativo e di minimo relativo di v .

b) Calcolare, se esistono, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)^4 - x^3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u(x) - x^7)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \sin\left(\frac{1}{u(x)}\right)$.

c) Determinare $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tali che $u(x) - x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $u(x) - x^\beta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

d) Provare che per ogni numero reale y esistono $x \in \mathbf{R}$ e $\gamma > 0$ tali che $u(x) - x^\gamma = y$.

80)

a) Calcolare l'integrale indefinito $\int u(x) dx$, ove u è definita come nell'esercizio precedente.

b) Provare che $\int_{\frac{7}{10}}^{\frac{8}{10}} (x^2 + 2x + 2)^\pi dx \geq \frac{1}{10}$.

81) Sia $g(x) = \frac{1 + \sin^2(x)}{x^8 + 1}$.

a) Provare che esiste $z \in (0, \pi)$ tale che $g'(z) = \frac{\frac{1}{\pi^8 + 1} - 1}{\pi}$.

b) Provare che g ha almeno un massimo relativo nell'intervallo $[300\pi, 301\pi]$.

c) Quanti punti di massimo relativo ha g su $\mathbf{R}$?

82) a) Risolvere le disequazioni

$$(86^4 - (3x - 1)^4)(x^7 - 2) \leq 0,$$

$$\frac{\sqrt{86^4 - (3x - 1)^4}}{\sqrt[4]{x^7 - 2} \sqrt[4]{17 - x}} > 0.$$

b) Dire per quali numeri reali x è positivo almeno uno dei due seguenti numeri

$$86^4 - (3x - 1)^4, \quad (x^7 - 2)(17 - x).$$

83) a) Provare che esiste un unico numero reale $a > 0$ tale che $\sum_{n=1}^{823} \frac{1}{(an)^{\frac{3}{5}}} = \sum_{n=1}^{823} \frac{1}{n^2}$.

- b) Provare che esistono numeri interi m_n , per $n = 1, 2, 3, \dots$ tali che $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{8}$.
- c) Provare che esistono numeri interi M_n , per $n = 1, 2, 3, \dots$ tali che $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n M_k^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{8}$.