Esercizi proposti per il corso di analisi II per Ingegneria 2012/13.

1. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$.
a) Disegnare A.
b) Dire se A è aperto, chiuso, compatto.
c) Determinare, se esistono, massimo e minimo su A della funzione $f(x,y) = x^2 - 6xy + ay$ quando $a = 3$ e quando $a = 12$.

2. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
a) Disegnare A.
b) Dire se A è aperto, chiuso, compatto.
c) Determinare, se esistono, massimo e minimo su A della funzione $f(x,y) = e^x - xe^y + 2y$.

3. Sia $A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \big((x-1)^2 + y^2 - 1\big)\big((x+1)^2 + y^2 - 1\big) = 0\big\}$.
a) Disegnare A.
b) Sia $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ se } (x,y) \in A \\ 1 \text{ se } (x,y) \notin A \end{cases}$. Calcolare tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$.
c) Dire se f è continua in $(0,0)$.

4. Stesse domande dell'esercizio 3 quando però $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Sia f una funzione C^1 da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}$. Calcolare, in base ad f e alle sue derivate, le derivate, rispetto a x e a y, della funzione $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$g(x,y) = f\big(x^2 + y^4, e^{\cos(xy)}\ln(x^4+5), y\sin(7x)\big).$$

6. Provare che se $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ soddisfa $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ allora f è differenziabile in $(0,0)$.

7. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2 - 3xy + y^2}{x^2 - xy + 6y^2}$.
a) Provare che il dominio di f è $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (Cenno: per esempio, si può studiare il denominatore in x per y fissato).
b) Dire se $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è aperto, chiuso, compatto.
c) Dire se f ha massimo e minimo su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e nel caso calcolarli (piú difficile).

8. Dato un sottoinsieme non chiuso A di $\mathbf{R}^n$, provare che esiste una funzione continua da A in $\mathbf{R}$ senza minimo.

9. Calcolare $\sum_{i=2}^{10} a_i$, ove $a_n = 2n+1$ se n dispari, $a_n = 4$ se n pari.

10. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{100} 4\frac{7^n}{10^{\frac{n}{3}}}$, $\displaystyle\sum_{n=24}^{100} 4\frac{7}{10^{\frac{n}{3}}}$.

11. Usare l'uguaglianza $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ per trovare una formula per $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

12. Usare l'uguaglianza $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$ per trovare una formula per $\sum_{i=1}^{n} i^3$.